De la Conjecture de Minkowski aux Canons Rythmiques Mosaïques

Moreno Andreatta

Résumé : Nous développons ici quelques aspects mathématiques liés à la théorie des canons rythmiques mosaïques en nous concentrant, en particulier, sur une conjecture mathématique dont les métamorphoses musicales constituent un terrain très riche pour la recherche « mathémusicale » contemporaine.

Introduction.

Bien que la notion de canon rythmique mosaïque ait été formalisée, d'un point de vue mathématique, dans les années quatre-vingt-dix, elle est implicitement présente dans l'approche thórique et compositionnelle d'Olivier Messiaen (1908-1992) auquel on doit sans doute l'un des premiers essais de définition de la structure de canon musical en considérant exclusivement l'organisation rythmique, sans s'appuyer préalablement sur l'organisation mélodique ou harmonique.

Par définition, un canon rythmique est la répétition, décalée dans le temps, d'une même structure rythmique, ou d'une de ses transformations. Le pattern rythmique de base, ou « pédale rythmique » dans la terminologie de Messiaen, est à son tour répété, ce qui donne le caractère cyclique (et donc infini) de tout canon rythmique. Un cas particulier de canon rythmique s'obtient en considérant comme pattern rythmique de base un rythme non rétrogradable ou une concaténation de rythmes non rétrogradables[1]. Dans le deuxième Tome du *Traité de Rythme, de Couleur et d'Ornithologie* [21] Messiaen discute deux exemples de canons basés sur des rythmes non rétrogradables, les deux étant des « triple canons » c'est-à-dire des canons à trois voix : la septième partie de la pièce *Harawi* (1945) intitulée « Adieu » et la partie intitulée « Amen des anges, des saints, du chant des oiseaux » de la pièce pour deux pianos *Visions de l'Amen* (1943). Il s'agit, d'un point de vue structurel, du même canon, la différence étant la valeur minimale qui correspond à une croche dans le premier cas et à une double-croche dans le deuxième (figure 1).

Fig. 1 – Extrait de la pièce *Harawi* (à gauche) et représentation rythmique d'un extrait de la pièce *Visions de l'Amen* (à droite).

Cependant, l'aspect fondamental de ce processus compositionnel est l'effet des rythmes non rétrogradables et des entrées régulières sur la structure globale du canon. Le compositeur

[1] Rappelons que, selon Messiaen, les rythmes non-rétrogradables réalisent dans le sens horizontal ce que les modes à transpositions limitées réalisent dans le sens vertical, car « ces rythmes ne peuvent être lus en sens rétrograde sans que l'on retrouve exactement le même ordre de valeurs que dans le sens droit ».

souligne à plusieurs reprises dans le *Traité* le caractère à la fois chaotique et très organisé de la forme globale résultante des superpositions des voix rythmiques. En effet, si l'on se concentre, par exemple, sur *Harawi*, on peut remarquer que « les trois rythmes non rétrogradables divisent les durées en 5+5+7 durées [...]. Ajoutons que les durées sont très inégales. Il résulte de tout cela que les différentes sonorités se mélangent ou s'opposent de manières très diverses, jamais au même moment ni au même endroit. C'est du désordre organisé » [21] .

Nous avons vu dans cette démarche compositionnelle l'intention, de la part de Messiaen, d'obtenir ce que nous appelons un « canon rythmique mosaïque » (*tiling rhythmic canon*). Un canon mosaïque a la propriété de se dérouler dans le temps de telle façon qu'à chaque instant il n'y a qu'une (et une seule) attaque parmi les différentes voix. Autrement dit, les voix sont *complémentaires* et la pulsation résultante des différentes pédales rythmiques est *régulière*. En réalité, cette propriété n'est que partiellement vérifiée dans le cas du triple canon de rythmes non rétrogradables utilisé dans les deux pièces *Visions de l'Amen* et *Harawi* car il y a des instants temporels qui ne sont remplis par aucune attaque des trois voix et, de même, il y a des moments où les attaques de deux ou plusieurs voix coïncident. Cette aspect de « quasi-pavage » est montré en figure 2 qui met en évidence la concaténation des rythmes non rétrogradables dans *Harawi* ainsi que la grille rythmique sous-jacente aux deux pièces. Les deux zones /'ees montrent qu'il y a des instant temporels qui ne correspondent à aucun attaque (trous) et des instants dans lesquels les attaques de deux ou plusieurs voix du canon tombent au même temps (superpositions). La structure des rythmes non rétrogradables n'est évidemment pas la plus adaptée pour résoudre le probléme du pavage de l'axe du temps.

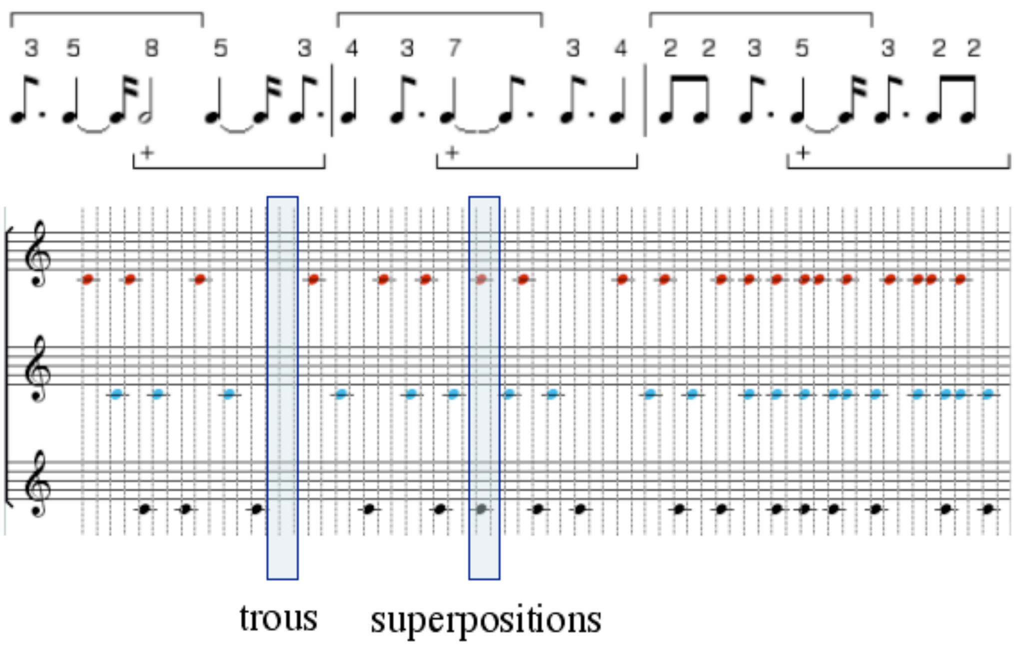

Fig. 2 – Concaténation des rythmes non rétrogradables dans *Harawi* et grille rythmique des triples canons des deux pièces *Harawi* et *Visions de l'Amen*.

Des canons rythmique mosaïques à la Conjecture de Minkowski

Comme nous l'avons amplement discuté dans notre article introductif à l'approche algébrique en musique paru dans un numéro précédent de *L'Ouvert* [7], certaines constructions théoriques initialement décrites par le compositeur et théoricien roumain Anatol Vieru (1926-1998) dans le domaine des hauteurs [33] donnent lieu à des architectures musicales nouvelles une fois appliquées au domaine rythmique. Cette application a été initialement proposée par Dan Tudor Vuza qui a développé un modèle de canons rythmiques basé sur la factorisation d'un groupe cyclique en somme directe de deux sous-ensembles non périodiques (Canons Réguliers Complémentaires de Catégorie Maximale, en abrégé Canons RCCM). Ces structures canoniques ont, entre autres, la propriété remarquable de *paver* l'axe du temps, et cela en dépit du fait que cette théorie a été établie par Vuza indépendamment de toute considération géométrique concernant la notion de pavage d'un espace euclidien. Pourtant, comme nous l'avons montré dans [5], il y a un lien direct entre la structure des canons rythmiques RCCM et le problème du pavage de l'espace à n dimensions par des cubes unités. Nous allons reprendre ici quelques aspects de ce rapport, en esquissant l'histoire de la Conjecture de Minkowski, ainsi que des travaux qu'elle a alimentés autour du problème de la factorisation des groupes.

On trouve une première version de la conjecture de Minkowski dans *Geometrie der Zahlen* [22] à propos d'un problème d'approximation de nombres réels par des rationnels. La conjecture généralise un résultat connu en théorie des nombres et concernant l'approximation d'un nombre réel a par un nombre rationnel $q = \frac{x_1}{x_2}$ tel que :

$$|a - q| < \frac{1}{t \cdot x_2}$$

où $0 < x_2 < t$ et t est un nombre réel, $t > 1$.
Dans le cas général, la conjecture de Minkowski concerne l'approximation des nombres réels $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ avec des entiers $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tels que, si l'on note q_i le nombre rationnel générique $\frac{x_i}{x_n}$ et t un nombre réel strictement positif tel que $0 < x_n < t^{n-1}$, la condition suivante soit vérifiée pour tout indice i :

$$|a_i - q_i| < \frac{1}{t \cdot x_n}$$

On trouve une version géométrique de la conjecture de Minkowski dans l'ouvrage *Diophantische Approximationen* [23] dans lequel l'auteur discute le problème du pavage de l'espace à n dimensions par des cubes unités. La conjecture affirme que dans un tel pavage, on trouvera toujours un couple de cubes ayant en commun une face de dimension $n - 1$. La figure 3 décrit la situation pour $n = 2$ et $n = 3$, deux cas que Minkowski pensait pouvoir généraliser facilement à toute dimension n.
Notons que la conjecture concerne initialement le cas du pavage « simple », c'est-à-dire une collection de cubes congruents qui recouvrent l'espace de telle façon que ces cubes n'ont pas d'intersection (autre que la frontière) et que leurs centres forment un treillis (*lattice*). Ce treillis est appelé « simple » pour le distinguer du cas (multiple) dans lequel les cubes ont plusieurs points d'intersections (autres que les frontières). Notons également que, sans l'hypothèse du treillis, on obtient la Conjecture de Keller qui est vraie pour tout $n \leq 6$ [24] et fausse pour tout $n \geq 10$ [19]. Le cas $6 < n < 10$ reste un problème ouvert.

En faisant référence au dernier problème de Fermat, nous avons proposé d'appeler cette conjecture le « dernier problème de Minkowski » [5] car il aura fallu attendre plus de

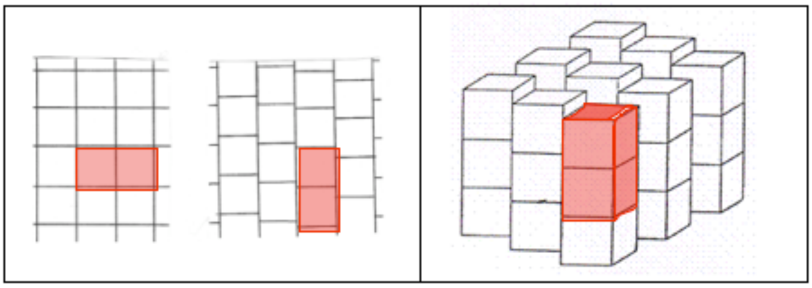

FIG. 3 – Pavage de l'espace $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ par des carrés et des cubes unités.

cinquante ans pour aboutir à la solution du problème dans sa forme générale. La solution a été trouvée *more algebrico* par le mathématicien hongrois G. Hajós qui a transformé la conjecture en un problème de factorisation de groupes. Selon certains historiens des mathématiques, la solution algébrique de Hajós est « le résultat le plus extraordinaire [spectacular] en théorie de la factorisation » [31]. Dans la solution de Hajós, la conjecture géométrique est transformée en un problème de factorisation de groupes, un résultat qui est aussi connu comme le « deuxième théorème général pour les groupes abéliens finis » [26]. Le théorème peut s'énoncer de la façon suivante :

Théorème de Minkowski/Hajós
Soit G un groupe abélien fini et soient $a_1, a_2, \cdots, a_n$ n éléments de G. Supposons que le groupe admette comme factorisation la somme directe des sous-ensembles $A_1, A_2, \cdots, A_n$ suivants :

$$A_1 = \{1,\, a_1, ..., a_1^{m_n-1}\},\ A_2 = \{1,\, a_2, ..., a_2^{m_n-1}\}, ..., A_n = \{1,\, a_n,\, ..., a_n^{m_n-1}\}$$

avec $m_i > 0$ pour tout $i = 1, 2, ..., n$. Alors un des facteurs A_i est un groupe.

Comme Rédei l'a montré, ce résultat est en rapport de dualité logique avec le théorème de Frobenius-Stickenberger qui affirme la possibilité de factoriser tout groupe abélien fini comme la somme directe de ses sous-groupes cycliques. Une discussion de la technique utilisée par Hajós dans sa démonstration, ainsi que l'histoire détaillée de la Conjecture de Minkowski, est contenue dans une monographie qui constitue, aujourd'hui, l'une des meilleures introductions pédagogiques à la Conjecture de Minkowski [32]. Une approche axiomatique au problème de Minkowski/Hajós a été par la suite proposée par K. Corrádi et S. Szabò [10].

Notons que le théorème de Hajós peut s'énoncer de façon équivalente en utilisant la notion d'ensemble périodique. Rappelons qu'un sous-ensemble A d'un groupe G est périodique s'il existe un élément g dans G, autre que l'identité, tel que $g + A = A$, la loi de composition interne du groupe étant, dans ce cas, l'addition. La forme suivante énonce la généralisation du théorème de Hajós proposée par Redei, à l'aide de la notion de périodicité :

Généralisation du théorème de Minkowski/Hajós
Soit G un groupe abélien fini et soient $A_1, A_2, ..., A_n$ n sous-ensembles de G, chacun contenant l'élément neutre du groupe et chacun ayant un nombre premier d'éléments et supposons que le groupe admette comme factorisation la somme directe des sous-ensembles A_i, $i = 1, \ldots, n$. Alors, un des sous-ensembles A_i est périodique.

Ce résultat a ouvert la voie à l'étude des propriétés d'un groupe par rapport au problème de la périodicité des sous-ensembles réalisant sa factorisation. Un groupe G est dit un « groupe de Hajós » (ou groupe ayant la propriété de Hajós) si pour toute factorisation du groupe en somme directe des sous-ensembles $A_1, A_2, ..., A_n$, au moins un des facteurs est périodique. De façon duale, on appellera un groupe G « non- Hajós » si l'on peut trouver comme factorisation du groupe une somme directe de ses sous-ensembles $A_1, A_2, ..., A_n$ telle qu'aucun de ces ensembles ne soit périodique. Le problème d'établir si un groupe infini possède ou non la propriété de Hajós a été abordé de façon systématique par A. D. Sands qui a établi une liste de groupes de Hajós dans le cas d'une factorisation en somme directe de deux sous-ensembles et sous l'hypothèse que l'un des facteurs possède une cardinalité finie. Hajós avait déjà montré [17] que sous une telle hypothèse, le groupe des nombres entiers relatifs $\mathbb{Z}$ possède la propriété de Hajós. Sands montre dans [30] que ce résultat est valable également pour le groupe des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ ainsi que pour les deux groupes $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q} + \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, avec p un nombre premier[2]. Le problème reste toujours ouvert dans le cas où l'hypothèse sur la cardinalité finie de l'un des facteurs est levée.

Ajoutons que le fait pour un groupe d'avoir ou non la propriété de Hajós est strictement dépendant du nombre des sous-ensembles qui en composent la factorisation. Nous concentrerons la discussion sur le cas d'un groupe qui est factorisé en deux sous-ensembles A_1 et A_2 car c'est le cas qui permet d'analyser la conjecture de Minkowski comme un problème « mathémusical » . La liste complète des groupes abéliens finis ayant la propriété de Hajós a été donnée par Sands qui a ainsi résumé le travail d'un bon nombre de mathématiciens, après Hajós. Nous proposons ici la liste dans un ordre chronologique, en restituant à chaque solution sa place dans l'histoire des mathématiques :

- $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ [25]
- $\mathbb{Z}_{p^\alpha}$ [17]
- $\mathbb{Z}_{p^\alpha} \times \mathbb{Z}_q$ [4]
- $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_r$ [4]
- $\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_{q^2}$ [27]
- $\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_r$ [27]
- $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s$ [27]
- $\mathbb{Z}_{2^2} \times \mathbb{Z}_{2^2}$ [28]
- $\mathbb{Z}_{3^2} \times \mathbb{Z}_3$ [28]
- $\mathbb{Z}_{2^\alpha} \times \mathbb{Z}_2$ [28]
- $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ [29]
- $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{2^2} \times \mathbb{Z}_2$ [29]
- $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ [29]
- $\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ [29]
- $\mathbb{Z}_{p^3} \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ [29]
- $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ [29]

[2]Dans la suite on notera $\mathbb{Z}_n$ le groupe cyclique d'ordre n ou groupe quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Dans la liste qui suit, les entiers p, q, r, et s sont des nombres premiers distincts et α est un entier, $\alpha > 1$.

Notons, en particulier, que la démonstration du fait que le groupe $G = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ est un groupe de Hajós précède, historiquement, la démonstration de la conjecture de Minkowski par Hajós. Remarquons aussi que, mise à part cette première solution, les six cas suivants correspondent à des groupes cycliques. Autrement dit, les groupes cycliques de Hajós constituent l'ensemble des groupes $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour lesquels n est :

- Une puissance d'un nombre premier ($n = p^\alpha$)

- Un produit d'une puissance d'un nombre premier par un autre nombre premier distinct ($n = p^\alpha q$)

- Le produit de trois nombres premiers distincts ($n = pqr$)

- Le produit des carrés de deux nombres premiers distincts ($n = p^2q^2$)

- Le produit d'un carré d'un nombre premier par deux autres nombres premiers distincts ($n = p^2qr$)

- Le produit de quatre nombres premiers distincts ($n = pqrs$)

Cette sous-liste permet de retrouver la famille de groupes cycliques établie par Vuza dans la formalisation algébrique des canons RCCM, c'est-à-dire les groupes cycliques qui ne possèdent pas la propriété de Hajós [34]. Cette application musicale naturelle aurait sans doute fasciné Franąis Le Lionnais qui compte $n = 72$ parmi les nombres remarquables à cause précisément du fait que « le groupe cyclique à soixante-douze éléments se décompose sous la forme $S + T$ avec S, T non-périodiques » [20]. En citant l'ouvrage sur les groupes abéliens de L. Fuchs [14], il propose la décomposition suivante :

$S = \{0, 8, 16, 18, 26, 34\}$

$T = \{0, 1, 5, 6, 12, 25, 29, 36, 42, 48, 49, 53\}$

Cette factorisation correspond, en effet, à une des possibles solutions pour la construction d'un canon RCCM de période 72. La figure 4 montre les catalogue exhaustif des solutions ainsi que le « canon remarquable » issu de la décomposition de Fuchs précédente.
Le catalogue a été obtenu en implémentant en *OpenMusic* l'algorithme que Vuza a proposé dans [34]. En générale, la liste des solutions données par l'algorithme de Vuza n'est malheureusement pas exhaustive, comme les travaux d'autres mathématiciens ont montré par la suite (voir, en particulier [13] et [3]). Autrement dit, mis à part les deux premiers groupes cycliques non-Hajós ($\mathbb{Z}_{72}$ et $\mathbb{Z}_{108}$ pour lesquels le catalogue des solutions données par l'algorithme de Vuza correspond à la liste exhaustive des factorisations des deux groupes en somme directe de deux sous-ensembles[3]), il y a des canons réguliers complémentaires de catégorie maximale qui ne sont pas des canons de Vuza, c'est-à-dire qui ne sont pas une solution donnée par l'algorithme de Vuza[4]. Le problème d'obtenir toutes les factorisations possibles d'un groupe n'ayant pas la propriété d'Hajós reste ouvert.

Conclusions et perspectives

Nous avons esquissé ici l'histoire de la conjecture de Minkowski et de quelques-unes de ses surprenantes métamorphoses musicales. Un deuxième volet de cette histoire pourrait s'intituler « Des canons rythmiques mosaïques à la Conjecture de Fuglede ». En effet, les canons rythmiques mosaïques représentent des structures périodiques que l'on peut

[3]Nous avons discuté le probléme de l'implémentation informatique de l'algorithme de Vuza ainsi que de la classification paradigmatique des premiers catalogues exhaustifs de solutions dans [7].

[4]Des variantes de l'algorithme de Vuza ont été proposées, entres autres, par Franck Jedrzejewski [18].

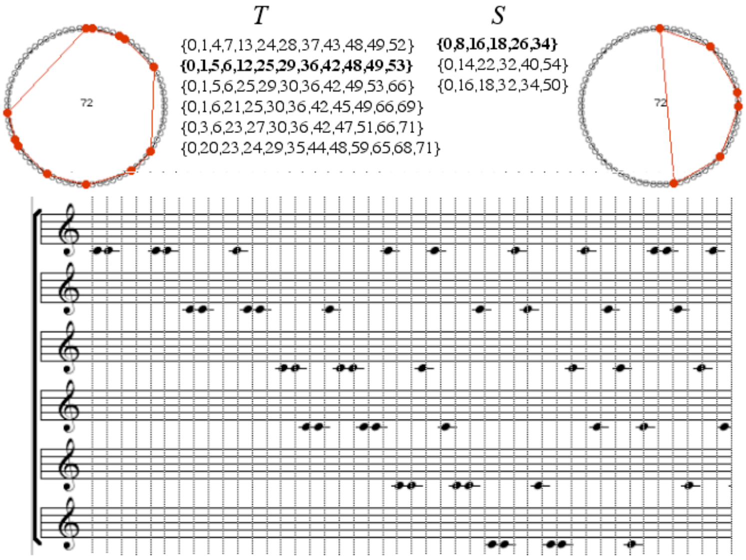

Fig. 4 – Catalogue exhaustif des factorisations du groupe cyclique $\mathbb{Z}_{72}$ en somme directe de sous sous-ensembles T et S et « canon remarquable » correspondant à la décomposition citée par Le Lionnais.

déployer de façon linéaire se rapprochant ainsi d'un champs de recherche tout à fait proche de celui que l'on vient de décrire. Il s'agit du problème du « pavage de la ligne » (*tiling the line*, voir [12] et [8]), qui a déjà suscité de nombreux travaux « mathémusicaux » . Les recherches d'Emmanuel Amiot[5] ont montré, en effet, que l'on peut attaquer la Conjecture de Fuglede (ou conjecture spectrale) [15] en s'appuyant sur la représentation des structures rythmiques susceptibles d'engendrer le pavage de l'axe du temps, en particulier en termes de polynômes à coefficients 0 et 1 et de retrouver ainsi des résultats mathématiques autour du pavage de la ligne qui n'avaient pas de lien direct avec la conjecture de Fuglede [11]. On pourra, à partir de la conjecture spectrale, revenir à la Conjecture de Minkowski, en fermant ainsi la boucle précisément grâce aux problèmes parfois surprenants que la musique pose aux mathématiques. Mais, comme on dit dans ce cas, la marge est trop petite pour aborder le sujet...

Remerciements

Merci à Athanase Papadopoulos et Xavier Hascher de leur invitation à la deuxiéme Journée Mathématique/Musique à Strasbourg organisée par l'Institut de Recherche Mathématique Avancée et le Département de Musique. Merci également de m'avoir donné la possibilité de développer ici quelques aspects d'un problème « mathémusical » que je n'avais pu que mentionner lors de la première Journée Mathématique/Musique. Il s'agit d'un problème qui a représenté un point de rencontre pour de nombreux mathématiciens, informaticiens, musicologues et compositeurs que je remercie ici pour tous les échanges et discussions que nous avons eus ensembles dans les dernières années. Merci enfin aux lecteurs anonymes pour leurs corrections et suggestions.

[5] Voir, en particulier, l'article [3] qui fait le point sur les liens possibles entre canons rythmiques mosaïques et théorie du pavage de la ligne.

Appendice terminologique

Nous allons reprendre ici de, façon synthétique, quelques définitions concernant des termes d'usage courant en musicologie et qui pourraient poser des problèmes à un public de non-musiciens.

Attaque : Dans ce contexte, un attaque est un instant temporel occupé par un élément d'un pattern rythmique. En identifiant un pattern rythmique à un sous-ensemble T d'un groupe cyclique $\mathbb{Z}_n$, un attaque est donc une classe des résidus appartenant à T. Par exemple, le pattern rythmique :

$$T = \{0,\ 1,\ 5,\ 6,\ 12,\ 25,\ 29,\ 36,\ 42,\ 48,\ 49,\ 53\}$$

représenté en figure 4 contient 12 attaques (correspondant à sa cardinalité). Synonymes d'attaques sont les *onsets*.

Canon rythmique : un canon rythmique (par translation) est la répétition, décalée dans le temps, d'un pattern rythmique donné (ou *rythme de base*, ou *pédale rythmique*, ou *voix* du canon). Si le pattern rythmique est translaté et en même temps transformé par une symétrie (par exemple une inversion ou une application affine) on parlera, respectivement de canon rythmique par inversion et par augmentation. Par définition un canon rythmique (par translation) est périodique et sa période correspond à la période du pattern rythmique R qui l'engendre (c'est-à-dire à la plus petite période $m \in \mathbb{Z}_n$ telle que $m + R = R$). Un canon rythmique est donné par deux pattern rythmiques : un pédale rythmique R et un pattern rythmique S indiquant l'entrée temporelle des différentes voix des canons. La cardinalité de R correspond au nombre d'attaques du rythme de base du canon. La cardinalité de S correspond au nombre des voix du canon.

Canon rythmique mosaïque : c'est un canon rythmique ayant la propriété de paver l'axe du temps. Un canon rythmique mosaïque correspond, mathématiquement, à la factorisation d'un groupe cyclique $\mathbb{Z}_n$ en somme directe de deux sous-ensembles. Si la période des deux sous-ensembles est égale à n, on appellera le canon un canon rythmique régulier complémentaire de catégorie maximale (ou canon RCCM). La plus petite période n qui correspond à un canon RCCM est le nombre remarquable 72. Ceci signifie que pour toute factorisation d'un groupe cyclique d'ordre m, avec $m < 72$, en somme directe de deux sous-ensembles R et S, au moins l'un des deux sous-ensembles est *périodique*, c'est-à-dire correspond, dans le domaine des hauteurs à un mode à transposition limitées. Par exemple, un canon rythmique mosaïque de période 12 est donné par la décomposition de $\mathbb{Z}_{12}$ en sous-groupes maximaux (théorème de Sylow). Cette décomposition correspond aux pattern rythmiques suivants :

$R = \{0,\ 3,\ 6,\ 9\}$

$S = \{0,\ 4,\ 8\}$

Hauteur : dans ce contexte une hauteur est toujours une classe de résidus modulo 12, c'est-à-dire un élément d'un groupe cyclique $\mathbb{Z}_{12}$.

Mode à transpositions limitées (en abrégé mode à TL) : terme qui indique toute gamme (ou mode, ou échelle) ayant un nombre limité de transpositions. Formellement, un mode à TL est un sous-ensemble A du groupe cyclique $\mathbb{Z}_{12}$ pour lequel il existe un élément $m \in \mathbb{Z}_{12}$, avec $m \neq 12$ tel que $m + A = A$. Cette notion est donc équivalente à celle de sous-ensemble *périodique* de période non triviale ; noter que cette période est alors nécessairement un diviseur strict de 12. Un mode à TL est donc un sous-ensemble de $\mathbb{Z}_{12}$ qui est *invariant* par transposition (non nulle). La définition se généralise au cas microtonal de façon tout à fait naturelle. Etant donnée une division de l'octave en n parties égales, un mode à TL est un sous-ensemble de $\mathbb{Z}_n$ pour lequel il existe un élément $m \in \mathbb{Z}_n$, avec $m \neq n$ tel que $m + A = A$.

Pattern rythmique : dans ce contexte le terme est synonyme de rythme ou structure rythmique. Le terme pattern sous-entend un certain caractère périodique. En effet, tout pattern rythmique est formellement décrit, dans cet article, comme un sous-ensemble R d'un groupe cyclique $m \in \mathbb{Z}_n$, oò n indique la période du rythme R.

Pulsation (d'un pattern rythmique) : c'est l'unité minimale $d \in \mathbb{Z}_n$ dont tout attaque d'un rythme R est un multiple entier.

Rétrogradation : opération musicale qui consiste, à l'origine, à inverser l'ordre des éléments d'une série dodécaphonique. Par extension, faire la rétrogradation d'un pattern rythmique et/ou mélodique correspond à inverser les éléments du pattern en respectant leur valeurs rythmiques. Un cas particulier concerne les structures rythmiques invariantes par rétrogradation (*cf.* rythmes non rétrogradables).

Rythme non rétrogradable : terme introduit par Olivier Messiaen afin d'exprimer l'équivalent des modes à TL, mais au niveau rythmique. Un rythme non rétrogradable est un pattern rythmique qui coïncide avec sa propre rétrogradation. Formellement, un rythme non rétrogradable est un sous-ensemble R de $\mathbb{Z}_n$ dont la structure intervallique $(a_1, a_2, ..., a_m)$ coïncide avec la lecture à l'inverse d'une de ses permutations circulaires. Par exemple, tous les rythmes S du catalogue des solutions des canons rythmiques RCCM de période 72 (*cf.* figure 4) sont des rythmes non rétrogradables. Le terme est synonyme de *palindrome*. Comme la notion de mode à TL, la structure des rythmes non rétrogradables relève de ceux que Messiaen appelait « charme de l'impossibilité ».

Structure intervallique : étant donné un mode (ou une gamme, ou une échelle, ou un accord), c'est-à-dire, un sous-ensemble $A = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ du groupe cyclique $\mathbb{Z}_{12}$, sa structure intervallique $\tilde{A}$ est donnée par l'expression :

$$\tilde{A} = (x_2 - x_1, x_3 - x_2, ..., x_1 - x_m\ mod 12)$$

Références

[1] E. Amiot (2004), *Why rhythmic Canons are interesting*, Perspectives in Mathematical Music Theory, (G. Mazzola, E. Puebla et T. Noll éd.), EpOs, Université d'Osnabrück.

[2] E. Amiot (2005), *Rhythmic canons and Galois theory*, Grazer Math. Ber., **347**, 1-25.

[3] E. Amiot (2005), *À propos des canons rythmiques*, Gazette des Mathématiciens, **106**, 43-67.

[4] N. G. de Brujin (1953) *On the factorization of finite abelian groups*, Indag. Math. Kon. Ned. Akad. Wetensch. Amsterdam, **15**, 258-264.

[5] M. Andreatta (2004), *On group-theoretical methods applied to music : some compositional and implementational aspects*, in Perspectives in Mathematical Music Theory, (G. Mazzola, E. Puebla et T. Noll éd.), EpOs, Université d'Osnabrück, 122-162.

[6] M. Andreatta (2004), Méthodes algébriques en musique et musicologie du XX$^{\mathrm{e}}$ siècle : aspects théoriques, analytiques et compositionnels , *Thèse, EHESS.*

[7] M. Andreatta (2005), *Quelques aspects théoriques d'une approche algébrique en musique*, L'Ouvert, **112**, 1-18.

[8] M. Andreatta, C. Agon, T. Noll, E ; Amiot (2006), *Towards Pedagogability of Mathematical Music Theory : Algebraic Models and Tiling Problems in computer-aided composition*, Proceedings of Bridges (Mathematical Connections in Art, Music and Science), London.

[9] G. Assayag, C. Agon, M. Laurson, C. Rueda (1999), *Computer Assisted Composition at Ircam : Patchwork and OpenMusic*, Computer Music Journal, **23(3)**.

[10] K. Corrádi, S. Szabó (1997) *An Axiomatic Approach for the Hajós Theorem*, Contributions to Algebra and Geometry, **38(2)**, 241-248.

[11] E. Coven et A. Meyerowitz (1999) *Tiling the integers with translates of one finite set*, J. Algebra, **212**, 161-174.

[12] J.-P. Delahaye (2004), *La musique mathématique de Tom Johnson*, Pour la Science, **325**, 88-93.

[13] H. Fripertinger (2001), *Enumeration of non-isomorphic canons*, Tatra Mt. Math. Publ., **23**, 47-57.

[14] L. Fuchs (1960), Abelian groups, *Pergamon Press*, Oxford.

[15] B. Fuglede (1974), *Commuting Self-Adjoint Partial Differential Operators and a Group Theoretic Problem*, J. Func. Anal., **16**, 101-121.

[16] G. Hajós (1942), *Über einfache und mehrfache Bedeckung des n-dimensionalen Raumes mit einem Würfelgitter*, Math. Zeit., **47**, 427-467.

[17] G. Hajós (1950), *Sur le problème de factorisation des groupes cycliques*, Acta. Math. Acad. Sci. Hung., **1**, 189-195.

[18] F. Jedrzejewski(2006), Mathematical Theory of Music, Collection « Musique/Sciences » , Ircam/Delatour France.

[19] J.C. Lagarias and P.W. Shor (1992), *Keller's cube-tiling conjecture is false in high dimensions*, Bull. Amer. Math. Soc. New Ser., **27**, 279-283.

[20] F. Le Lionnais (1983), Les nombres remarquables, *Hermann*, Paris.

[21] O. Messiaen (1992), Traité de Rythme, de Couleur et d'Ornithologie, tome 2, Alphonse Leduc, Editions Musicales, Paris.

[22] H. Minkowski (1896), Geometrie der Zahlen, Leipzig, 1896.

[23] H. Minkowski (1907), Diophantische Approximationen. Eine Einführung in die Zahlentheorie, *Chelsea Publishing Company*, New York.

[24] O. Perron (1940), *Über lückenlose Ausfüllung des n-dimensionalen Raumes durch kongruente Würfel*, I, II, Math. Z. **46**, 1-26, 161-180.

[25] L. Rédei (1947), *Zwei Lückensätze über Polynome in endlichen Primkörpern mit Anwendung auf die endlischen Abelschen Gruppen und die Gaussischen Summen*, Acta Math., **79**, 273-290.

[26] L. Rédei (1967), Algebra I, Pergamon Press.

[27] A. Sands (1957), *On the factorization of finite abelian groupes*, Acta Math. Acad. Sci. Hung., **8**, 65-86.

[28] A. Sands (1959), *The Factorisation of Abelian Groups*, Quart. J. Math. Oxford, **2(10)**, 81-91.

[29] A. Sands (1962), *On a problem of L. Fuchs*, Journal of the London Math. Society, **137**, 277-284.

[30] A. Sands (1964), *Factorization of cyclic groups*, dans L. Fuchs, E. T. Schmidt (éd.) Proceedings of the Colloquium on Abelian Groups, Tihany (Hungary), Sept. 1963, Hungarian Academy of Sciences, Budapest, 139-146.

[31] S. K. Stein (1974), *Algebraic Tiling*, Amer. Math. Month., **81**, 445-462.

[32] S. Stein et S. Szabó, (1994), Algebra and Tiling, The Carus Mathematical Monographs, **25**.

[33] A. Vieru (1980), Cartea modurilor, 1 (Le livre des modes, 1), *Ed. muzicala*, Bucarest.

[34] D.T. Vuza (1991), *Supplementary Sets and Regular Complementary Unending Canons (in four parts)*, Perspectives of New Music, **29(2)**, 22-49.

Moreno Andreatta
Ircam/CNRS UMR STMS
Moreno.Andreatta@ircam.fr