

MODELES MATHÉMATIQUES POUR L'INFORMATIQUE MUSICALE (MMIM) : OUTILS THÉORIQUES ET STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

Moreno Andreatta
Équipe Représentations Musicales
Ircam/CNRS
Moreno.Andreatta@ircam.fr

Marc Chemillier
GREYC
Université de Caen
marc@info.unicaen.fr

RÉSUMÉ

Nous présentons ici quelques aspects théoriques du cours que nous assurons depuis trois ans dans le cadre du Master ATIAM (Acoustique, Traitement du signal et Informatique Appliqués à la Musique) de l'Ircam. Visant à offrir une introduction aux modèles mathématiques en informatique musicale, cette unité d'enseignements optionnelle se divise en deux parties indépendantes, l'une consacrée aux structures algébriques « fortes » (théorie des groupes) en musicologie computationnelle et l'autre centrée sur le concept de langage formel en ethnomusicologie et dans le domaine de l'improvisation assistée par ordinateur (structures algébriques « faibles », en particulier les monoïdes).

Bien qu'approchant l'informatique musicale avec des outils théoriques distincts, les deux parties ont progressivement révélé plusieurs points d'intersections. Après une courte description de quelques outils théoriques propres à chaque partie, nous allons nous concentrer sur quelques « intersections » entre les deux approches dont le caractère inattendu souligne une fois de plus, à notre avis, la portée universelle de certaines constructions mathématiques [7,14].

1. INTRODUCTION

L'informatique théorique développe dans le champ des mathématiques discrètes certains concepts à l'origine de nombreuses applications en informatique musicale. L'unité d'enseignement « Modèles mathématiques pour l'informatique musicale » (MMIM) - que nous proposons dans le cadre d'un Parcours multi-mentions du Master « Sciences et Technologies » de l'Université Pierre et Marie Curie (Paris 6) - expose les outils mathématiques et les stratégies algorithmiques nécessaires à la formalisation et représentation des structures musicales. Cette unité est divisée en deux parties autonomes.

Une première partie est consacrée au problème de la formalisation algébrique des structures musicales à l'aide de la théorie des *groupes*. En retraçant l'histoire de l'émergence du concept de groupe en musique et

musicologie, cette partie offre une perspective algébrique sur des nombreux phénomènes musicaux, aussi bien théoriques (propriété combinatoire du tempérament), qu'analytiques (la *Set Theory* d'Allen Forte, la *Transformational Theory* de David Lewin, les théories néoriemanniennes,...) et compositionnels (le sérialisme, les théories modales, les techniques canoniques, ...).

La deuxième partie vise à étudier quelques problèmes théoriques posés par la musique à travers la théorie des langages formels (automates, règles de réécritures, grammaires, combinatoire sur les mots,...). Une analyse historique de l'évolution de la théorie des langages formels appliqués à la musique [11] montre que ces outils sont bien adaptés à tout type de phénomènes musicaux (du contrepoint au sérialisme). Ils sont également tout à fait adaptés, comme nous allons montrer dans les pages qui suivent, à l'ethnomusicologie et à la musique improvisée.

Cet article est divisé en trois sections. Dans les deux premières sections, nous allons exposer quelques outils théoriques de base que nous utilisons dans chaque partie du cours. Nous essaierons d'introduire les outils théoriques sans en donner une définition rigoureuse mais en montrant comment ils arrivent à capturer de façon tout à fait naturelle des phénomènes musicaux singuliers. Dans la troisième et dernière partie, nous analyserons quelques éléments d'intersection entre la formalisation algébrique à l'aide de la théorie des groupes et l'approche basée sur les langages formels.

2. METHODES ALGÈBRIQUES EN MUSICOLOGIE COMPUTATIONNELLE

L'approche computationnelle en musicologie s'inscrit dans une évolution récente de la « musicologie systématique » qui a donné à l'informatique musicale une place de plus en plus centrale, en rendant possible des croisements nouveaux entre les mathématiques et des notions plus récentes autour de la calculabilité et de la complexité de certains problèmes posés par la musique.

Une analyse de la place des méthodes algébriques en musique et musicologie du XX^e siècle [3] montre que l'émergence de la notion de groupe en musique est un

processus qui commence, autour des années cinquante, à partir d'orientations théoriques et compositionnelles tout à fait hétérogènes (comme le sérialisme intégral de Milton Babbitt aux Etats-Unis, la musique symbolique d'Iannis Xenakis, la composition algorithmique de Pierre Barbaud et la musique modale d'Anatol Vieru en Europe de l'Est). La composante théorique était, cependant, accompagnée dans les trois cas, d'une forte orientation computationnelle qui permettait la mise en place de techniques compositionnelles ayant un caractère tout à fait générique et pouvant s'appliquer également au domaine de l'analyse musicale (par exemple les techniques sérielles de combinatorialité et de partitionnement, les opérations intervalliques sur les modes, la théorie des cribles de Xenakis,...).

Le caractère computationnel des méthodes algébriques permet d'établir des liens tout à fait naturels entre recherche théorique et informatique musicale [3,11]. De plus, comme le témoignent, entre autres, les travaux d'André Riotte et Marcel Mesnage sur la modélisation informatique des partitions, l'implémentation d'outils algébriques dans des langages de programmation d'aide à la composition assistée par ordinateur ont sans doute contribué à la constitution d'une « musicologie computationnelle » en tant que discipline susceptible d'engendrer des articulations permanentes entre la théorie, l'analyse et la composition assistées par ordinateur. Notre approche s'inscrit finalement dans la filiation des recherches ouvertes autour des années quarante-vingt par les deux théoriciens et compositeurs français qui ont eu également une influence considérable dans le renouvellement de l'enseignement en musicologie et informatique musicale¹.

2.1. Quelques outils algébriques de base

Le Master ATIAM étant principalement adressé à des scientifiques, les étudiants sont, en général, familiers avec les notions de base du calcul algébrique. Il est cependant parfois curieux de constater la surprise de la plus part d'entre eux lorsqu'on présente des constructions algébriques à partir des concepts musicaux en suivant l'émergence historique de ces formalisations dans la musique. C'est cette évolution que nous allons décrire brièvement dans les sous-sections suivantes.

2.1.1. La structure de groupe en musique

Bien que concept de *groupe* était bien connu en mathématique depuis le début du XIX^e siècle, cette structure n'émerge en musique que très tardivement. On doit à Milton Babbitt l'observation fondamentale selon laquelle le système dodécaphonique est « un ensemble d'éléments, relations entre les éléments et opérations sur

les éléments, [...] un groupe de permutations qui est façonné [*shaped*] par la structure de ce modèle mathématique » [8]. Notons que, pour ce faire, Milton Babbitt a besoin tout d'abord de s'appuyer sur la relation de congruence modulo 12 qui permet de représenter le tempérament égal à l'aide des classes de résidus modulo 12 (ou *pitch-classes*).

Cet ensemble offre un exemple de structure de groupe cyclique qui peut être interprété musicalement de plusieurs façons, i.e. comme le groupe $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$ des intervalles musicaux (avec l'addition modulo 12) ou bien comme un groupe de transformations, à savoir le groupe engendré par les transpositions et qu'on écrit formellement, en termes de générateurs et des relations, de la façon suivante² :

$$\langle T_k \mid (T_k)^{12} = T_0 = 0 \rangle \quad (1)$$

Dans le deux cas, la représentation géométrique canonique de ce groupe est la représentation circulaire (figure 1)³.

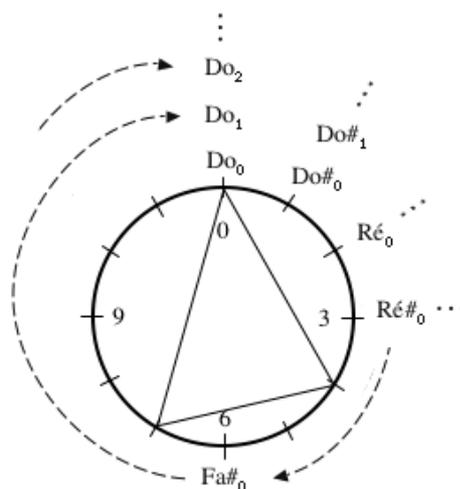


Figure 1. Représentation circulaire du tempérament égal et visualisation géométrique d'un accord en tant que polygone inscrit dans le cercle.

À travers une représentation d'une série dodécaphonique S comme une suite de couples $x=(a,b)$, le premier élément a indexant la position de la note dans la série et le deuxième b indiquant la hauteur de x (relative à une note référentielle 0), Babbitt arrive à exprimer les

¹ Les écrits d'André Riotte et Marcel Mesnage ont été récemment rassemblés dans l'ouvrage, en deux volumes, *Formalismes et modèles musicaux* [22]. Notre cours MMIM a plusieurs points d'intersection avec le cours "Formalisation des structures musicales" qu'André Riotte a assuré de 1978 à 1990 à l'Université de Paris 8. Voir : <http://www.andreriotte.org/base.htm>

² En théorie des groupes, la notation $G = \langle g_1, g_2, \dots, g_n \mid R_1, R_2, \dots, R_m \rangle$ indique que le groupe G est engendré par les éléments g_1, g_2, \dots, g_n (générateurs) avec les relations R_1, R_2, \dots, R_m .

³ Pierre Barbaud a souvent souligné les vertus pédagogiques de la représentation circulaire. Dans son esquisse d'une pédagogie efficace de la musique, il affirme que l'on pourra obtenir « des résultats pédagogiques remarquables en dessinant la gamme chromatique au tableau sous la forme d'un cercle divisé en 12 arcs égaux dont on numérottera les points adjacents de 0 à 11. On pourra alors faire pratiquer aux enfants l'addition des entiers modulo 12 en remplaçant les noms des notes par ceux des heures » [10, p. 8]. Voir la section 2.1.5 pour une représentation équivalente d'un point de vue mathématique (mais sans doute moins pédagogique d'un point de vue musical !).

opérations sérielles (**I**=inversion, **R**=rétrogradation et **IR=RI**=rétrogradation inverse) comme des transformations de la structure du groupe cyclique $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$ et arriver ainsi au groupe de Klein de quatre éléments (figure 2).

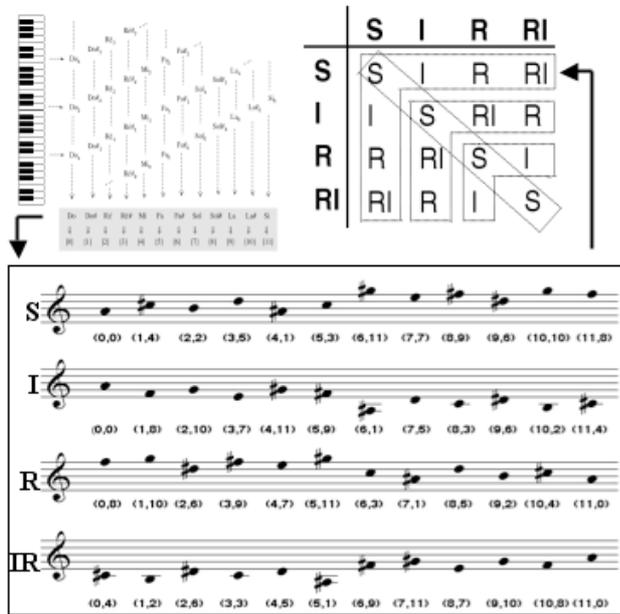


Figure 2. Les opérations sérielles et la structure de groupe de Klein selon Milton Babbitt

Notons que la même structure de groupe peut être représentée de façon géométrique (figure 3), comme le groupe de symétrie du rectangle dans le plan \mathbf{R}^2 (isomorphe à l'espace \mathbf{C} des nombres complexes). C'est Iannis Xenakis qui propose cette deuxième interprétation, à partir de laquelle il pourra ensuite développer une technique des transformations géométriques sur les profils mélodiques qui conduit, entre autres, à la « théorie » des arborescences.

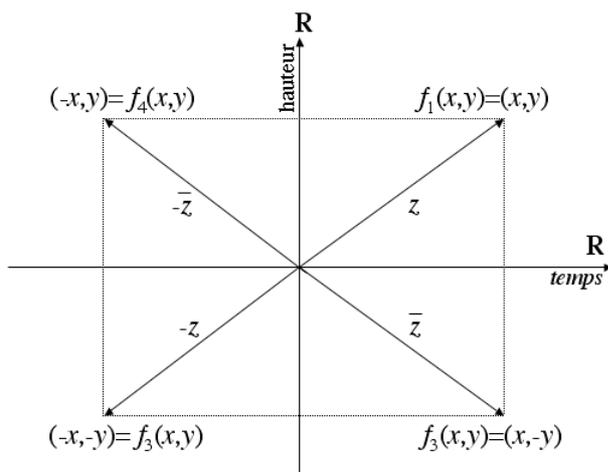


Figure 3. Les opérations sérielles et la structure de groupe de Klein comme groupe des symétries d'un rectangle dans le plan complexe selon Xenakis [25].

2.1.2. L'action d'un groupe sur un ensemble

Il y a plusieurs façons d'introduire ce concept à partir des propriétés musicales. La façon la plus naturelle est sans doute d'utiliser l'opération de *transposition* associée à la notion de relation d'équivalence. En effet, un résultat assez surprenant en mathématique assure non seulement qu'une action d'un groupe G sur un ensemble X définit une relation d'équivalence \sim (simplement en posant que deux éléments x, y de X sont équivalents s'il existe un élément $g \in G$ tel que $y = gx$) mais aussi que pour toute relation d'équivalence \sim sur un ensemble X il existe un groupe G qui opère sur X de telle façon que \sim peut être considéré comme induite par l'action de G sur X .

Le groupe des transpositions $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$ opère sur lui-même (en tant qu'ensemble) et aussi sur ses parties. Dans le premier cas, on retrouve les classes d'équivalences de la relation de congruence modulo 12. Dans le deuxième cas, on peut définir le concept d'accord musical comme une orbite et donner un fondement mathématique au problème d'établir un catalogue exhaustif d'accords à une transposition près.

Le même concept d'action s'applique pour établir le catalogue d'accords à une transposition/inversion ou à une multiplication affine près en prenant respectivement l'action du groupe diédral \mathbf{D}_{12} et du groupe affine \mathbf{Aff} . On retrouve ainsi, comme cas particulier, la *Set Theory* « classique » d'Allen Forte (ou action du groupe diédral $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$) et la *Set Theory* « transformationnelle » de David Lewin (avec la structure de *Système d'intervalles généralisés* qui est équivalente à la donnée d'un groupe G et d'une action simplement transitive de G sur un espace musical X). Pour une description détaillée de ces outils théoriques, ainsi que de leur implémentation informatique, voir [2].

2.1.3. Lemme de Burnside

Si c'est vrai, comme l'affirme Milton Babbitt dans le cas du système dodécaphonique, qu'un « large nombre de conséquences compositionnelles sont dérivables directement de théorèmes de la théorie des groupes finis » [9], dans le cas du problème de l'énumération d'accords dans un tempérament égal, tout est implicitement caché dans ce lemme qui était en réalité connu bien avant Burnside [20]. Ce résultat affirme que lorsqu'on a une action d'un groupe G sur un ensemble X , le nombre total d'orbites $\#\text{Orb}$ est la « moyenne » des fixateurs des éléments du groupe ou le fixateur X_g d'un élément g de G est l'ensemble des éléments x de X tels que $gx = x$.

2.1.4. Le calcul des différences finies à valeur dans un groupe cyclique

Nous résumons ici les résultats les plus intéressants d'une théorie algébrique dont nous avons déjà présenté quelques aspects théoriques et informatiques lors de

l'édition 2002 des *Journées d'Informatique Musicale* [1]. Rappelons que cette théorie avait été proposée par le compositeur Anatol Vieru à partir du concept de dualité son/intervalle qui représente, comme il l'a souvent souligné, « l'une des questions les plus spécifiques, délicates et mystérieuses de la musique » [23].

Bien que le mathématicien Dan Tudor Vuza ait généralisé ces constructions à tout groupe fini, nous allons nous concentrer sur le cas du groupe cyclique afin de pouvoir ensuite appliquer ces outils dans l'un des problèmes musicaux liés aux langages formels (voir section 3). Par définition une suite périodique à valeurs dans le groupe cyclique $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est une application f de l'ensemble des entiers \mathbf{Z} dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ telle qu'il existe un entier m tel que¹ :

$$f(x) = f(x+m) \text{ pour tout } x \text{ dans } \mathbf{Z} \quad (2)$$

L'opérateur de base pour le calcul des différences finies est l'opérateur de différence D qui associe à toute suite f la nouvelle suite à valeurs $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ donnée par :

$$Df(x) = f(x) - f(x-1). \quad (3)$$

Les propriétés structurelles des suites périodiques sont données par la relation entre la période de la suite et l'espace algébrique dans lequel la suite prend ses valeurs. Il existe deux grandes familles de suites, selon le fait qu'une itération $D^k f$ de l'opérateur « différence » appliqué à une suite périodique soit égal à 0 ou bien à f . Dans le cas où il existe un entier k tel que $D^k f = 0$ (respectivement f) la suite sera appelée *réductible* (respectivement *reproductible*).

Un résultat général démontré par Vuza [24] assure que toute suite périodique peut se décomposer d'une façon unique en somme directe d'une suite réductible et d'une suite reproductible. L'implémentation de ce théorème général dans un langage de programmation pour la composition assistée par ordinateur, telle que nous l'avons décrite dans [4] offre un bon exemple d'algorithme algébrique de type constructif, c'est-à-dire capable d'offrir une technique pour calculer explicitement la factorisation (unique) de toute suite périodique à valeurs dans un groupe fini quelconque.

2.1.5. Factorisation de groupes

Nous avons donné, dans la section précédente, un exemple de problème de factorisation à partir du calcul des différences finies. Cette notion est tout à fait générale et nous en décrivons ici quelques aspects en vue de la discussion sur l'application musicale que nous décrivons dans la section 4.2.

Factoriser un groupe cyclique $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ dans la somme directe de sous-ensembles A_i ($i=1, \dots, k$) signifie pouvoir

¹ Le plus petit entier m satisfaisant cette propriété est appelée la période de f .

exprimer chaque élément x du groupe de façon unique comme la somme $x = a_1 + a_2 + \dots + a_k$ avec $a_i \in A_i$. Les exemples les plus intéressants musicalement concernent presque toujours la factorisation d'un groupe cyclique en somme directe de deux sous-ensembles.

Un premier exemple de factorisation est donné par le Théorème de Sylow qui assure la possibilité de décomposer $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$ en produit direct de ses sous-groupes maximaux $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$. On arrive ainsi à la représentation toroïdale, dont le processus géométrique est détaillé en figure 4.

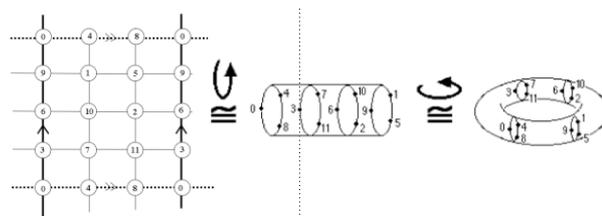


Figure 4. Formalisation algébrique et représentation toroïdale du tempérament égale.

En gardant l'un de deux sous-groupes, par exemple $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$, il est tout à fait possible d'obtenir d'autres factorisations de $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$ en somme directe de $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ et d'un autre sous-ensemble différent de $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$. La représentation circulaire permet de visualiser cette deuxième factorisation (figure 5) dont une double interprétation musicale sera discuté dans la section 4.

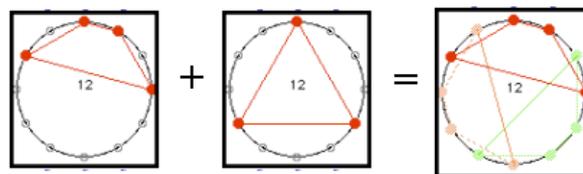


Figure 5. Un deuxième exemple de factorisation du groupe cyclique d'ordre 12 en somme directe de deux sous-ensembles dont l'un est un sous-groupe.

Remarquons que, dans le deux cas, l'un des deux sous-ensembles est tel que son stabilisateur (par rapport à l'action du groupe cyclique) ne se réduit pas à l'identité². Cette propriété est valable pour tous les groupes d'ordre n , avec $n < 72$ (groupes de Hajós) et permet d'avoir des stratégies computationnelle pour obtenir toute factorisation d'un groupe cyclique donné.

2.2. Exemples musicaux

Nous allons reprendre quelques outils théoriques présentés dans la section précédente afin de montrer comment ils permettent de décrire, de façon naturelle, certaines propriétés musicales.

² Par définition, étant donné un groupe G qui opère sur l'ensemble X , le stabilisateur d'un sous-ensemble A de X est le sous-groupe $\text{Stab}_A = \{g \in G : gA = A\}$.

2.2.1. Catalogues d'accords

Le problème d'établir un catalogue exhaustif d'accords a intéressé plusieurs théoriciens. L'approche algébrique, lorsqu'il est implémenté dans un langage de programmation tel *OpenMusic* [6], permet notamment d'avoir une approche « paradigmatique » pour l'analyse musicale assistée par ordinateur.

Le terme « paradigmatique » renvoie à la fois au concept d'analyse musicale « paradigmatique » au sens de Nicolas Ruwet mais aussi au concept de « paradigme » chez Thomas Kuhn. Un catalogue d'accords, ainsi qu'une théorie scientifique, est valable à l'intérieur d'un univers conceptuel (ou paradigme) et ce sont précisément les structures de groupes qui permettent de formaliser la notion d'équivalence entre les éléments du catalogue.

On en déduit qu'un catalogue (et donc un paradigme) est plus ou moins pertinent selon de type de contexte qu'il essaie de décrire (ce qui explique, par exemple, que le « paradigme » du groupe diédral s'applique de façon plus naturelle au répertoire 'atonal' plutôt qu'à la musique tonale, tandis que, par exemple, le paradigme affine rend compte des techniques qu'on retrouve dans le jazz, comme la substitution d'accords et sera donc mieux adapter à l'analyse de ce type de musique plutôt que les deux paradigmes précédents).

La figure 6 schématise l'architecture paradigmatique que nous proposons en *OpenMusic* [5] pour l'analyse musicale assistée par ordinateur.

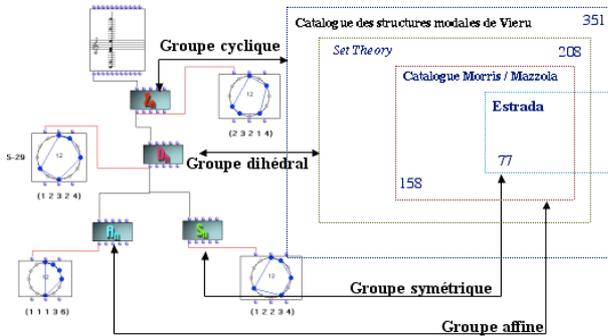


Figure 6. Architecture « paradigmatique » en *OpenMusic* pour l'analyse musicale assistée par ordinateur via l'action des groupes sur l'espace $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$. Les quatre groupes (cyclique, diédrale, affine et symétriques) engendrent quatre catalogues d'accords de taille de plus en plus petite.

Notons que cette même architecture s'applique également pour l'analyse des structures rythmiques périodiques, en particulier pour établir le catalogue des patterns rythmiques ayant la possibilité d'engendrer des canons rythmiques mosaïques (voir section 2.2.2). L'application du lemme de Burnside à la musique donne des formules explicite d'énumération d'orbites [21,15].

D'autres formules existent qui permettent de calculer le nombre d'accords par rapport à l'action du groupe

dihédral ou affine, ainsi que le nombre d'accords ayant une propriété musicale particulière à l'intérieur d'un catalogue donné (par exemples les modes à transpositions limitées ou bien les hexacordes ayant la propriété de « combinatorialité » au sens de Babbitt, c'est-à-dire la propriété d'engendrer le total chromatique à travers une des leurs transpositions et/ou inversions. Une analyse du répertoire contemporaine montre que la technique de combinatorialité ne s'applique pas exclusivement à la musique sérielle.

La figure 7 montre l'utilisation faite par Olivier Messiaen dans la pièce « Mode de valeurs et d'intensités » (1950) dans laquelle la deuxième partie du mode ou gamme qui engendre la pièce est l'image de la première à travers l'application $T_7I(x)=7-x$.

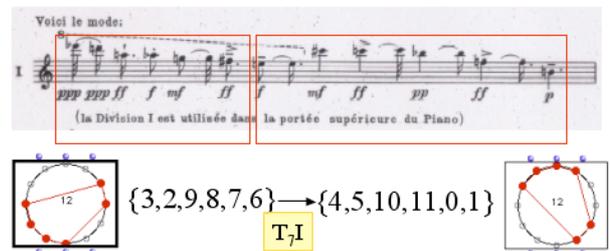


Figure 7. Utilisation des techniques compositionnelles basées sur le principe de « combinatorialité » chez Messiaen.

Notons également que les mêmes outils algébriques permettent d'établir des formules d'énumération de structures plus complexes, telles les séries dodécaphoniques (en particulier les séries tous-intervalles), les patterns mélodiques (toujours à une symétrie près), les pattern rythmiques (en particulier la famille des pattern rythmiques ayant la propriété de l'imparité rythmique), les structures mosaïques (tels les canons rythmiques). Dans la section 4 on se concentrera sur les rapports remarquables entre ces deux derniers types de structures musicales.

2.2.2. Canons mélodico-rythmiques mosaïques

Bien qu'historiquement on puisse trouver des antécédentes de cette forme musicale dans l'utilisation des rythmes non-retrogradables chez Messiaen [19], la structure des canons rythmiques mosaïques est profondément liée à la théorie modale d'Anatol Vieru, dont elle constitue, grâce aux intuitions de Dan Tudor Vuza, un exemple remarquable de « transfert de structure » au sens de Bourbaki.

Il suffit, en effet, d'opérer un « transfert » de la structure de groupe cyclique dans le domaine des rythmes et interpréter ainsi la notion de factorisation d'un groupe cyclique en somme directe de deux sous-ensembles (section 2.1.5). En changeant le rôle des deux facteurs dans la représentation circulaire donnée en figure 4, nous pouvons tout d'abord construire deux « partitions » de

l'espace tempéré, l'un constitué de trois transpositions d'un même tétracorde et l'autre de quatre transpositions d'un accord augmenté. Ce double pavage harmonique est donné en figure 8 dans un patch *OpenMusic*.

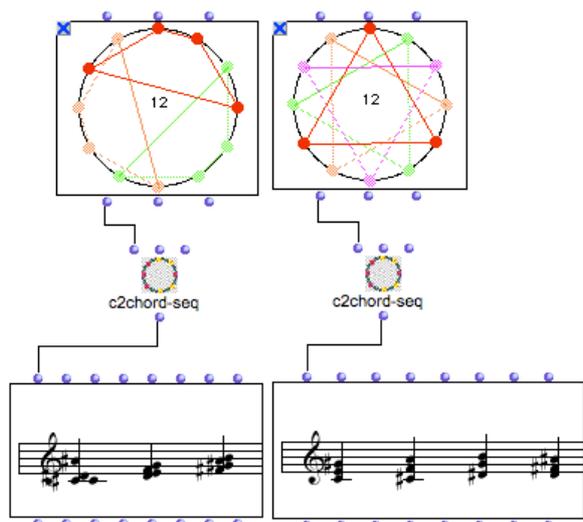


Figure 8. Deux pavages harmoniques « duals » de l'espace chromatique.

En interprétant un sous-ensemble de $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$ comme un pattern rythmique périodique, il est ainsi possible de construire des canons rythmiques ayant la propriété de « paver » l'axe du temps tout en respectant les propriétés harmoniques des pavages précédents. On obtient ainsi des structures que l'on appellera « canons mélodico-rythmiques mosaïques » (figure 9).

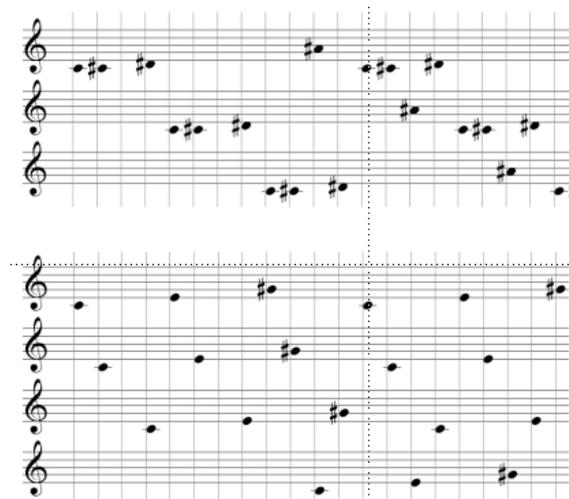


Figure 9. Deux canons mélodico-rythmiques mosaïques représentant les deux pavages duals de la Figure 8.

3. LANGAGES FORMELS

3.1. Quelques notions fondamentales

Nous allons introduire dans cette section les outils fondamentaux liés à la théorie des langages formels [17,

18]. Les exemples musicaux seront donnés dans la section 3.2.

3.1.1. Mots et structure de monoïde libre

Par définition un *mot* est une suite de symboles dont le nombre définit sa *longueur*. Étant donné deux mots $u=u_1 \dots u_n$ et $v=v_1 \dots v_m$, on définit une loi de composition interne (concaténation) à travers le produit formel $uv=u_1 \dots u_n v_1 \dots v_m$.

L'ensemble A^* des mots finis sur un alphabet A définit une structure de *monoïde libre* sur A , i.e. une structure algébrique dans laquelle la loi de composition interne est associative et dans laquelle il existe un élément neutre (le mot vide). Un mot fini est *périodique* s'il peut s'exprimer sous la forme $u=x^n$ avec un entier $n \geq 2$. Un mot non-périodique est appelé aussi *primitif*.

3.1.2. Orbites ou classes de conjugaison d'un mot

Toute permutation δ de A^* définie par $\delta(ax)=xa$ pour $a \in A$ et $x \in A^*$ induit une *action* dont les orbites sont les ensembles de permutations circulaires d'un mot.

3.1.3. Mots de Lyndon

Parmi les mots primitifs sur un alphabet A , on appelle *mot de Lyndon* un mot qui est « minimal » pour l'ordre alphabétique dans sa classe.

3.1.4. Mots infinis et biinfinis

Un mot infini (respectivement biinfini) sur un alphabet A est par définition une application de l'ensemble \mathbf{N} des nombres naturels (respectivement \mathbf{Z} des nombres entiers relatifs) dans A . Un mot infini (respectivement biinfini) u est *périodique* s'il existe un entier m tel que $u(i+m)=u(i)$ pour tout $i \in \mathbf{N}$ (respectivement à \mathbf{Z}).

La période est le plus petit entier m qui satisfait la relation précédente. Deux mots infinis périodique de période m seront alors *conjugués* si les deux mots finis allant de 0 à m sont conjugués selon la définition donnée en 3.1.2.

3.2. Quelques exemples musicaux

Nous nous concentrons sur trois problèmes musicaux dont la formalisation à l'aide des langages formels offre un cadre tout à fait naturel.

3.2.1. Les formules de harpe nzakara

Il s'agit d'étudier les propriétés structurelles d'un répertoire pour harpe que l'on retrouve chez des populations de l'Afrique centrale (en particulier les tribus nzakara et zande).

La harpe est joué par le musicien qui pince les cordes deux à deux en produisant un pattern que l'on peut représenter dans un repère cartésien dans lequel l'abscisse

indique le temps et l'ordonnée indexe les 5 cordes avec des nombres entre 0 et 4 (figure 10).

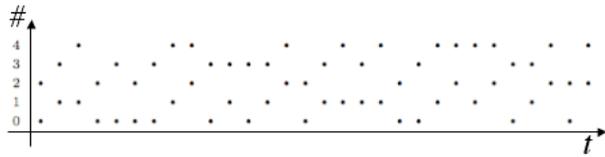


Figure 10. Grille de base du répertoire nzakara.

La figure suivante montre la structure canonique sous-jacente dans laquelle les couples de cordes sont représentés à l'aide des premières cinq lettres de l'alphabet, i.e. $A=(0,2)$, $B=(0,3)$, $C=(1,3)$, $D=(1,4)$, $E=(2,4)$.

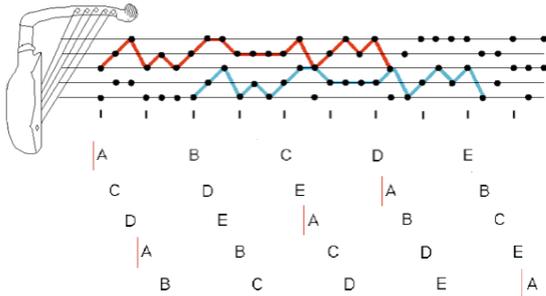


Figure 11. Formule de harpe Nzakara en canon avec indication des cycles entrelacés.

Si l'on trace la structure canonique complète, on s'aperçoit tout d'abord que le nombre d'« anomalies », c'est-à-dire des notes qui n'appartiennent pas au canon, est égal à six (figure 12). On peut démontrer que ce nombre est toujours le PGCD(m,p) où m est la période du canon (c'est-à-dire 30) et p est la distance qui sépare la première voix de la deuxième voix (c'est-à-dire 6).

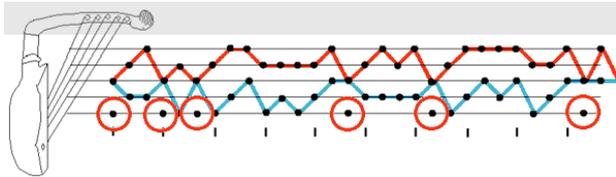


Figure 12. Nombre d'« anomalies » de la formule.

Il est possible de décrire la construction des formules de harpe nzakara d'une manière radicalement différente de la description en canon adoptée précédemment. Cette analyse fait apparaître une structure *en escalier*.

Si l'on note les couples A, B, C, D, E par des numéros 0, 1, 2, 3, 4, on constate que le bloc formé des six premiers couples 023010 est translaté en 134121 (on ajoute un à chaque élément), puis en 240232, et ainsi de suite, jusqu'à revenir à la succession initiale. Ces translations successives reconstituent la formule. La structure en escalier consiste à traduire un motif initial autant de fois qu'il le faut pour revenir au point de départ (figure 13).

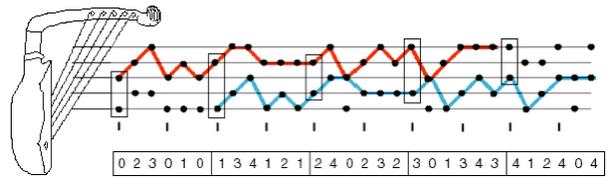


Figure 13. La formule *limanza* obtenue par translation de 023010.

Cette analyse montre du même coup que la structure canonique n'est qu'une simple conséquence de la construction. On peut établir, en réalité, que sous certaines conditions, la structure en escalier est *logiquement équivalente* à la structure de canon. Or cette manière d'analyser la formule de harpe met en œuvre implicitement la notion de suite des différences finies. En effet, on constate que dans le cas présent, cette suite est égale à 212141, c'est-à-dire que la période de Du (égale à 6) est strictement plus petite que celle de u (égale à 30).

On retrouve la décomposition en parties réductibles et reproductibles introduite plus haut. Si une séquence u est reproductible, la période de Du est nécessairement égale à celle de u . Or ce n'est pas le cas pour la formule de harpe en escalier. On peut donc affirmer que les formules de harpe nzakara ont nécessairement *une composante réductible non nulle* [13].

3.2.2. L'imparité rythmique

Prenons comme point de départ le sous-ensemble $R=\{0,3,5,7,9,11,14,16,18,20,22\}$ du groupe cyclique $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$ d'ordre 24. Via la représentation circulaire, on peut lui associer de façon canonique un pattern rythmique de période 24 (figure 14).

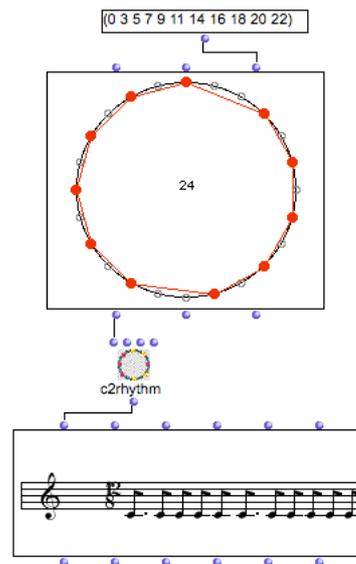


Figure 14. Un pattern rythmique représenté comme un sous-ensemble du groupe cyclique \mathbb{Z}_{24} d'ordre 24.

Ce pattern possède la propriété d'imparité rythmique, c'est-à-dire que l'on aura jamais un diamètre liant une attaque donnée (ou *onset*) avec une autre attaque du même pattern (figure 15).

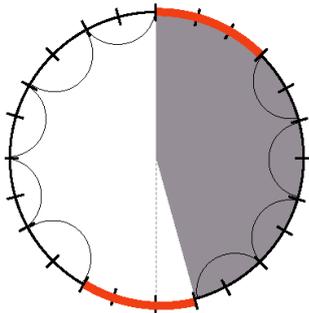


Figure 15. Propriété de l'imparité rythmique.

Cette structure est unique, au sens qu'on ne peut pas placer les deux groupes de trois et les neuf groupes de deux d'une autre façon tout en gardant la propriété d'imparité rythmique. De même, on peut démontrer que l'on peut pas placer quatre groupes de trois et six groupes de deux dans un cercle divisé en 24 parties en gardant la propriété d'imparité rythmique (figure 16).

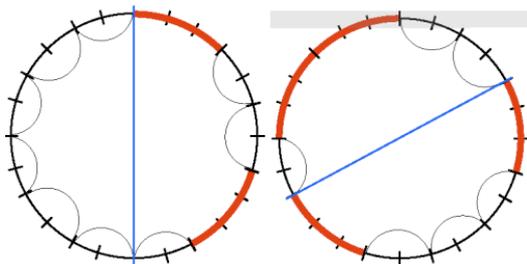


Figure 16. Patterns rythmiques (n'ayant pas la propriété d'imparité rythmique) construits par concaténation de groupes de trois et de groupes de deux.

Une façon élégante de définir la propriété d'imparité rythmique est celle d'utiliser la notion de « poids » d'un mot. Le pattern rythmique en figure 15 peut, tout d'abord, être exprimé comme la concaténation de deux mots : $u=(3,2,2,2,2)$ et $v=(3,2,2,2,2)$. Le premier mot correspond à la partie noire du cercle, tandis que le deuxième correspond à la partie blanche. Si on définit le poids h d'un mot comme la somme de ses lettres, on obtient : $h(u)=11$ et $h(v)=13$. La propriété d'imparité rythmique s'exprime en disant qu'aucune permutation circulaire ne se factorise en uv avec $h(u)=h(v)$.

Il est possible de construire mathématiquement tous les rythmes satisfaisant la propriété d'imparité rythmique. Cette construction présente l'intérêt de faire apparaître, comme on va le voir, le caractère « impair » de ces rythmes, tel qu'il est mis en avant dans la terminologie « imparité rythmique » adoptée par l'ethnomusicologue qui les a découverts, Simha Arom.

Pour calculer de façon systématique tous les mots sur

l'alphabet $\{2, 3\}$ vérifiant l'imparité rythmique, l'idée est d'introduire deux transformations notées a et b qui opèrent sur des couples de mots [12].

La première transformation a consiste à ajouter trois devant chacun des deux mots. Par exemple, pour les mots 332 et 222, le résultat obtenu par application de a est 3332 et 3222.

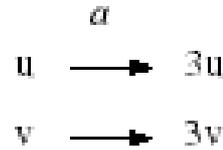


Figure 17. La transformation a

La deuxième transformation b permute les deux mots du couple et ajoute un deux devant le second. Pour le couple 332 et 222 ci-dessus, le résultat de l'application de b est 222 et 2332.



Figure 18. La transformation b .

Les séquences vérifiant l'imparité rythmique sont exactement celles que l'on fabrique en mettant bout à bout deux mots u et v obtenus en appliquant un nombre quelconque de fois les transformations a et b à partir du mot vide, à condition que b soit appliquée un nombre impair de fois.

Par exemple, la suite de transformations $abbb$ (avec trois b) conduit au mot 32322, comme on peut le vérifier étape par étape. Les deux mots obtenus 32 et 322 mis bout à bout donnent 32322, c'est-à-dire une séquence vérifiant la propriété d'imparité rythmique.

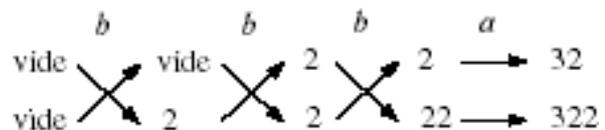


Figure 19. Construction du rythme asymétrique 32322 avec les transformations a et b .

En ramenant la construction à des combinaisons de a et de b , on met en évidence un critère particulièrement simple pour distinguer les séquences vérifiant l'imparité rythmique des autres. En effet, il suffit de vérifier que le nombre de b est impair. Les raisons qui expliquent le fonctionnement de cette construction, bien qu'elles puissent être explicitées par une démonstration rigoureuse, gardent une partie de leur mystère (cette technique est inspirée de la règle de Rauzy, qui intervient dans la construction des mots sturmiens).

Le rythme *mokongo* des Pygmées Aka, par exemple, qui s'écrit 333233232, apparaît comme le résultat de la

suite de transformations notée *aababb*. On peut décomposer ce calcul (on applique d'abord la dernière transformation, puis l'avant-dernière, etc.). Les deux mots obtenus au terme de ces transformations successives sont 3332 et 33232. En les mettant bout à bout, on obtient 333233232 ce qui permet de retrouver la séquence *mokongo*. Notons que la transformation *b* est appliquée trois fois, c'est-à-dire un nombre impair, conformément à la condition nécessaire mise en évidence plus haut.

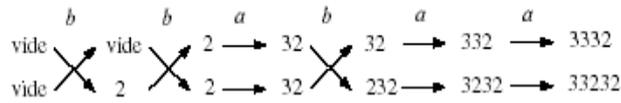


Figure 20. Reconstruction de la séquence *mokongo* 333233232.

4. INTERSECTIONS

Cette section explore quelques « intersections involontaires » entre les deux parties de cette unité d'enseignement. En particulier nous allons nous concentrer sur les rapports entre le processus de construction des canons rythmiques mosaïques, le calcul des différences finies sur des suites périodiques à valeurs dans un groupe cyclique et le problème de l'imparité rythmique.

4.1. Catalogues d'accords et monoïde libre

On peut tout d'abord réinterpréter le concept de « structure intervallique » au sens de Vieru en termes de monoïde libre sur l'alphabet $A = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$. En effet, une structure intervallique d'un accord est toujours définie à une permutation circulaire près. Par exemple, la structure intervallique de l'accord majeur est donnée par le mot (4 3 5) et ses permutations circulaires (figure 21)

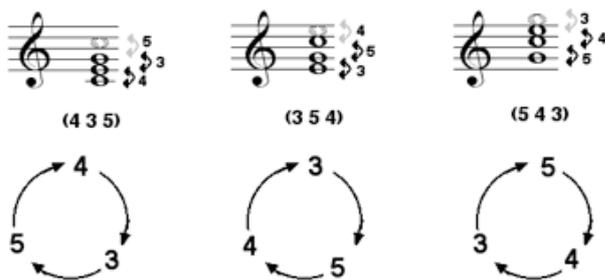


Figure 21. Structure intervallique d'un accord et classes de conjugaison d'un mot.

Parmi les permutations circulaires de la structure intervallique, celle qui est minimale pour l'ordre alphabétique de sa classe est la structure (3 5 4) qui sera donc le mot de Lyndon de l'accord majeur.

4.2. Séquences modales chez Vieru

Le calcul de différences finies sur des groupes cycliques, que nous avons décrit dans la section 2.1.4 constitue un exemple d'utilisation compositionnelle des mots biinfinis sur l'alphabet du groupe cyclique $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

On peut vérifier aisément que la notion de *réductibilité* et *reproductibilité* d'une séquence périodique est invariante par permutation circulaire (donc par conjugaison). La figure 22 montre deux exemples musicaux en *OpenMusic* du processus de différences finies sur une séquence réductible (à gauche) et reproductible (à droite) obtenues par décomposition unique de l'accord majeur {0 4 7} interprété comme un mot biinfini 3-périodique.

Les différents niveaux sont interprétés en associant aux classes de résidus les hauteurs respectives (modulo l'octave).

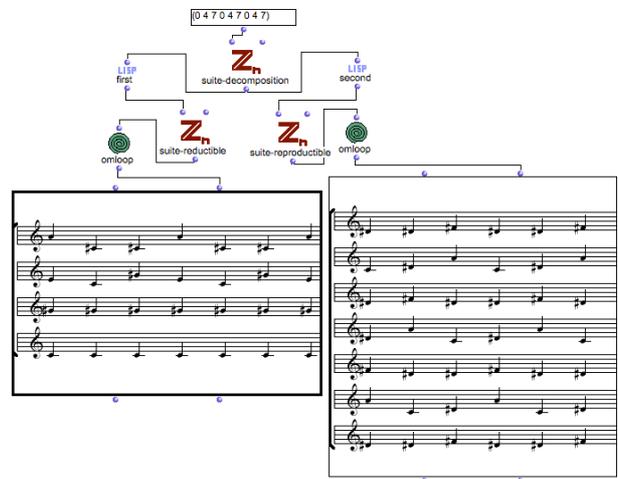


Figure 22. Séquences réductibles (gauche) et reproductibles (droite) dans le calcul des différences finies.

4.3. Généralisation de l'imparité rythmique

Dans un article récent [16] Rachel W. Hall et P. Klingsberg ont généralisé la notion d'imparité rythmique que nous avons présentée dans la section 3.2.2 à travers le concept de *k*-asymétrie. Un rythme périodique R de période kh est *k*-asymétrique si la propriété suivante est satisfaite :

Propriété de l'imparité rythmique généralisée : Si une attaque de R occupe la position x alors toutes les autres positions y telles que $y \equiv x \pmod{h}$ ne correspondent pas à des attaques du rythme R .

Par exemple, le rythme $R = \{0, 1, 2, 7\}$ de période 12 et ayant 4 attaques est 3-asymétrique, comme le montre la figure 23.

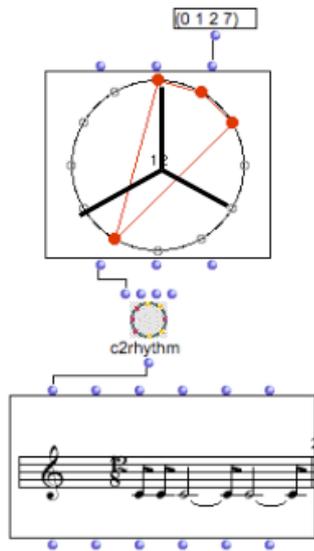


Figure 23. Exemple de rythme 3-asymétrique.

La figure suivante (figure 24) montre le catalogue complet des 6 rythmes 3-asymétriques de période 12 ayant 4 attaques (par rapport à l'action du groupe cyclique). Ce catalogue se réduit à 5 orbites sous l'action du groupe diédrale, car les deux dernières solutions sont équivalentes à une inversion près.

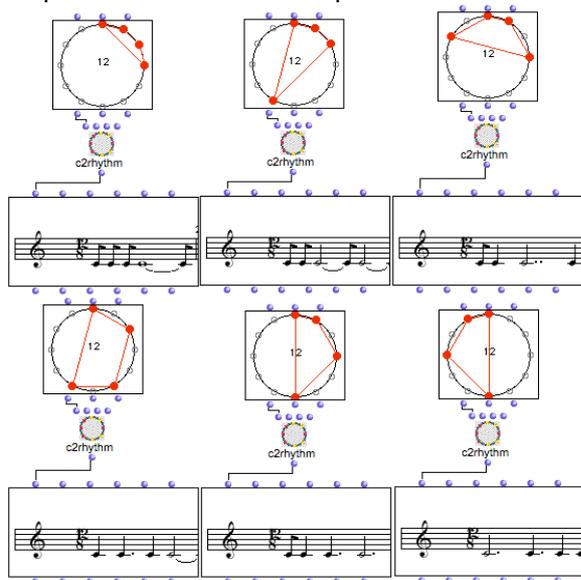


Figure 24. Catalogue des rythmes 3-asymétriques de période 12 ayant 4 attaques

Notons que, comme dans le cas du catalogue d'accords décrit en section 2.2.1, le Lemme de Burnside offre une formule générale pour calculer le nombre de rythmes k -asymétriques de période kh ayant r attaques [16]. En appliquant la formule, on obtient comme résultat qu'ils existent 8 rythmes 3-asymétriques de période 12 ayant 4 attaques. En effet, la formule prend également en compte les rythmes 3-asymétriques dont la

période est un diviseur de 12. Ces deux rythmes « redondants » sont représentés en figure 25.

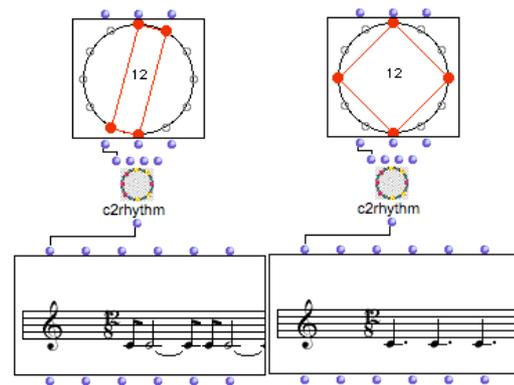


Figure 25. Deux rythmes 3-asymétriques « redondants ».

La théorie des rythmes k -asymétrique est étroitement liée à la théorie des canons rythmiques mosaïques. Pour cela il suffit de considérer le pattern rythmique 3-asymétrique précédent $R=\{0,1,2,7\}$ dans $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$. Si l'on cherche le facteur S de la décomposition de $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$ en somme directe de R et S , on obtient $S=\{0,4,8\}$.

En interprétant R comme le pattern de base d'un canon rythmique et S comme le pattern des entrées, on obtient ainsi un canon mosaïque à trois voix (figure 26).

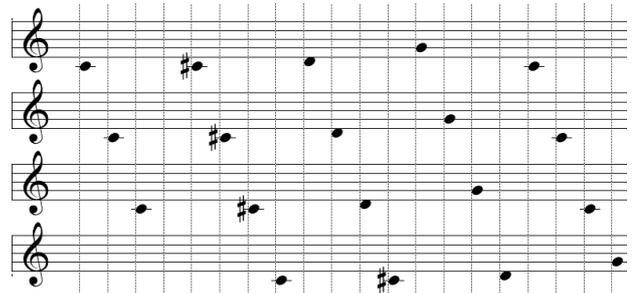


Figure 26. Canon rythmique mosaïque sur un rythme 3-asymétrique.

5. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Nous avons essayé de présenter quelques enjeux de l'unité d'enseignement MMIM que nous assurons depuis trois ans dans le cadre de la formation ATIAM de l'Ircam. Cette unité propose aux étudiants une panoplie d'outils formels qui peuvent paraître initialement abscons et anti-musicaux. Cependant, l'originalité de cette unité est de présenter plusieurs modèles mathématiques appliqués à l'informatique musicale à partir des problèmes posés par la musique. Les auteurs partagent la conviction profonde qu'une approche mathématique rigoureuse capture quelque chose de la musique qui a du sens musicalement et qui peut être apprécié à l'aide d'une présentation rigoureuse des concepts et des méthodes relevant aussi bien des

structures algébriques « fortes » (groupes) que des structures plus « faibles » (monoïdes).

Ces deux approches, qui, dans notre conception initiale, étaient assez séparées, ont montré tout au long de l'évolution de cette unité plusieurs points en commun. Ces nombreuses intersections, dont nous avons essayé de décrire quelques aspects, suggèrent des perspectives théoriques et des stratégies pédagogiques tout à fait nouvelles dans le domaine de l'informatique musicale.

6. REFERENCES

- [1] Andreatta, M., Agon C. et Vuza D. « Analyse et implémentation de certaines techniques compositionnelles chez Anatol Vieru », JIM, Marseille, 2002.
- [2] Andreatta, M. et Agon, C. « Formalisation algébrique des structures musicales à l'aide de la *Set-Theory* : aspects théoriques et analytiques », JIM, Montbéliard, 2003.
- [3] Andreatta, M. *Méthodes algébriques en musique et musicologie du XX^e siècle : aspects théoriques, analytiques et compositionnels*, thèse, EHESS, Paris, 2003.
- [4] Andreatta, M., Vuza, D. et Agon, C. « On some theoretical and computational aspects of Anatol Vieru's periodic sequences », *Soft Computing*, vol. 8, n° 9, Septembre, 2004.
- [5] Andreatta, M., Agon, C., Noll, T. et Amiot, E. « Towards Pedagogability of Mathematical Music Theory : Algebraic Models and Tiling Problems in computer-aided composition », *Bridges. Mathematical Connections in Art, Music and Science*, London, 2006.
- [6] Assayag, G., Rueda, C., Laurson, M., Agon, A. et Delerue, O. « Computer Assisted Composition at Ircam : PatchWork & OpenMusic », *Computer Music Journal*, 23(3), 1999.
- [7] Assayag, G., Feichtinger, H. G., Rodrigues, J. F., *Mathematics and Music. A Diderot Mathematical Forum*, Springer, 2002.
- [8] Babbitt, M. *The function of Set Structure in the Twelve-Tone System*, PhD, Princeton University, 1946 (thèse approuvée en 1992).
- [9] Babbitt, M. « Set Structure as a Compositional Determinant », *Journal of Music Theory*, 5(2), pp. 72-94, 1961.
- [10] Barbaud, P. *La musique, discipline scientifique. Introduction élémentaire à l'étude des structures musicales*. Dunod, Paris, 1971 (éd. or. 1968).
- [11] Chemillier, M. *Structure et Méthode algébriques en informatique musicale*, thèse, L.I.T.P., Institut Blaise Pascal, 1990.
- [12] Chemillier, M. et Truchet C. « Computation of words satisfying the "rhythmic oddity property" », *Information Processing Letters*, n° 86, 2003
- [13] Chemillier, M. « Periodic musical sequences and Lyndon words », *Soft Computing*, vol. 9, n° 8, Octobre, 2004
- [14] Chemillier, M. *Les Mathématiques naturelles*, Paris, Odile Jacob, 2007.
- [15] Friepertinger, H. « Enumeration in Musical Theory », *Beiträge zur elektronischen Musik 1*, Hochschule für Musik und darstellende Kunst, Graz, 1991.
- [16] Hall, R. H. et Klingsberg, P. « Asymmetric Rhythms, Tiling Canons, and Burnside's Lemma », *Bridges Proceedings*, pp. 189-194, Winfield, Kansas, 2004.
- [17] Lothaire, M. *Combinatorics on Words*, Encyclopedia of Mathematics, Vol. 17, Addison-Wesley, 1983.
- [18] Lothaire, M. *Algebraic Combinatorics on Words*, Cambridge University Press, 2002.
- [19] Messiaen, O. *Traité de Rythme, de Couleur et d'Ornithologie*, tome 2, Alphonse Leduc, Editions Musicales, Paris, 1992.
- [20] Neumann, P. M. « A Lemma that is not Burnside's », *Math. Scientist*, 4, pp. 133-141, 1979.
- [21] Reiner, D. « Enumeration in Music Theory », *Amer. Math. Month.*, pp. 92:51-54, 1985.
- [22] Riotte, A. et Mesnage, M. *Formalismes et modèles musicaux* (en deux volumes), Ircam/Delatour France, 2006.
- [23] Vieru, A. « Une théorie musicale pour la période postmoderne », *Muzica*, 2, pp. 20-26, 1994.
- [24] Vuza D. T. « Propriétés des suites périodiques utilisées dans la pratique modale », *Muzica*, 2, pp. 44-48, 1984.
- [25] Xenakis, I. *Formalized Music*. (Rev. Edition), Pendragon Press, Stuyvesant NY, 1992.