

UNIVERSITE DE STRASBOURG
Institut de Recherche Mathématique Avancée



Notice de titre et travaux en vue de l'obtention de
l'Habilitation à Diriger des Recherches

Moreno ANDREATTA

Mathematica est exercitium musicae :
la recherche mathémusicale et ses interactions
avec les autres disciplines

Garant de l'HDR : Athanase PAPADOPOULOS – Directeur de Recherche

22 octobre 2010

Jury :

Rapporteurs :

- Fabrizio BROGLIA (Professeur, Université de Pisa)
- Xavier HASCHER (Professeur, Université de Strasbourg)
- Frédéric PATRAS (Directeur de Recherche, Université de Nice, Sophia Antipolis)

Examineurs :

- Gérard ASSAYAG (Directeur de Recherche, Ircam/CNRS)
- Athanase PAPADOPOULOS (Directeur de Recherche, IRMA/CNRS)
- José Francisco RODRIGUES (Professeur, Universidade de Lisboa)

Affiliation du candidat :

IRCAM – CNRS UMR 9912

Sciences et technologies de la musique et du son (STMS)

Equipe Représentations Musicales

1, place Igor Stravinsky 75004 Paris

<http://www.ircam.fr/umr.html>



Résumé

Dans la tradition occidentale, mathématiques et musique ont été étroitement liées depuis plus de 2000 ans. Nonobstant cette longue histoire concernant les relations entre mathématiques et musique, l'intérêt professionnel des mathématiciens dans ce domaine est un phénomène assez récent. Alors que la puissance d'application des mathématiques dans la description de la musique a été reconnue depuis longtemps, c'est seulement grâce à des développements plus récents que la musique commence à occuper également une place stratégique au sein des mathématiques. Ce fait est confirmé par l'émergence d'un nombre croissant de problèmes « mathémusicaux ». Ces problèmes sont caractérisés par le fait qu'en positionnant un problème à l'origine musical dans un contexte mathématique approprié non seulement on obtient des résultats mathématiques nouveaux mais cela ouvre la voie également à des constructions musicales nouvelles. C'est ce double mouvement, de la musique aux mathématiques et vice-versa, qui suscite l'intérêt de plus en plus de chercheurs dans les deux domaines et qui est au cœur d'une croissante activité de recherche internationale accompagnée de la création de revues internationales à comité de lecture et collections d'ouvrages consacrés à la matière ainsi que d'une prolifération de conférences, séminaires d'études et projets collaboratifs dans le domaine.

Dans la première partie de ce mémoire, nous présentons tout d'abord une sélection de problèmes « mathémusicaux » sur lesquels nous avons travaillé en montrant les résultats obtenus et les questions qui restent ouvertes. Dans la deuxième partie, nous détaillons trois types d'interactions entre recherche mathémusicale et trois autres disciplines, à savoir les sciences cognitives, l'informatique et la philosophie. D'un côté plus institutionnel, l'activité de recherche dans le domaine des rapports entre mathématiques et musique a été également menée à travers la mise en place d'une série d'actions nouvelles visant à transformer ce domaine de recherche en une véritable discipline. Cet aspect est présenté brièvement dans l'Annexe qui contient également la liste et les descriptifs de travaux d'étudiants que nous avons encadrés ou co-dirigés. La description de ces travaux, dont la plus part sont au niveau de Master, montre la richesse des problématiques théoriques soulevées par la musique, un domaine d'étude que nous espérons pourra attirer, également, de plus en plus de doctorants dans les années à venir.

Abstract

In western tradition, mathematics and music have been deeply connected for more than 2000 years. Despite this long history of the relationship between mathematics and music, the professional interest of mathematicians in this domain is a relatively new phenomenon. Whilst the power of applying mathematics in the description of music has been acknowledged for a long time, it is only thanks to more recent developments that also music begins to occupy a strategic place in the development of mathematics. This fact is supported by the emergence and partially successful solution of an increasing number of “mathemusical” problems, i.e problems which are characterized by the fact that settling an originally musical problem in an appropriate mathematical framework not only gives rise to new mathematical results, but also paves the way to new musical constructions. It is this fruitful double movement, from music to mathematics and backwards, which excites an increasing number of researchers in both domains and which is at the heart of a growing international research activity accompanied by an increasing appearance of international journals, conferences, book series and collaborative projects in this field of study.

In this memoir we first present a selection of “mathemusical” problems on which we have been working by showing the results obtained and the questions which still remain open. In the second part we will study in detail three types of interactions between mathemusical research and three main disciplines, namely cognitive sciences, informatics and philosophy. From a more institutional perspective the activity of research has been accompanied by the set up of a series of new specific pedagogical activities aiming at transforming this research domain into a recognized field of study. This aspect is briefly presented in the Appendix which also contains the complete list and the abstracts of students dissertations which I have directed or co-directed. The short description of these students’ works, mostly at the Master level, shows the rich potential of this domain which we hope will also attract more and more PhD students in the next years.

Remerciements

J'aimerais tout d'abord exprimer ma profonde gratitude à Athanase Papadopoulos, mon garant d'habilitation, pour avoir pris à cœur ce projet. Ses encouragements ainsi que ses remarques et commentaires toujours constructifs ont été précieux pour trouver le bon équilibre dans la présentation du sujet. Je le remercie également pour avoir soutenu l'initiative d'organiser un Symposium sur mathématiques et musique qui marque, je l'espère, le début d'une nouvelle collaboration entre l'Institut de Recherche Mathématique Avancée et l'Institut de Recherche et Coordination Acoustique/Musique.

Je remercie les membres du jury pour avoir accepté de participer à la soutenance et tout particulièrement les rapporteurs pour leur disponibilité et intérêt à exprimer leur commentaires critiques sur mon travail de recherche. La présente version du mémoire apporte quelques corrections à la première mouture du document en tenant compte, dans la mesure (temporelle) du possible, des suggestions qui m'ont été adressées.

Ecrire ce mémoire de synthèse m'a permis à la fois de mesurer l'évolution de certains problèmes théoriques qui ont accompagné depuis toujours mon intérêt pour les rapports entre mathématiques et musique, mais surtout d'apprécier l'importance des différentes collaborations sans lesquelles ce travail n'aurait pas pu être mené à bien. Ma gratitude va tout d'abord à Gérard Assayag, responsable de l'équipe Représentations Musicales de l'Ircam, pour son soutien à la fois professionnel et amical tout au long des dix dernières années passées au sein de l'équipe. Je ne saurais jamais suffisamment remercier Carlos Agon, infatigable compagnon de route et dont l'amitié, la générosité sans limites, la disponibilité constante ainsi que la profonde compétence dans les aspects computationnels des problèmes abordés ont marqué profondément toutes ces années. Un remerciement va également aux autres membres de l'équipe RepMus, en particulier Jean Bresson et Karim Haddad, ainsi qu'aux amis de l'équipe Espaces acoustiques et cognitifs, Olivier Warusfel et Isabelle Viaud-Delmon, pour leur amitié et leur sympathie.

De nombreuses collaborations ont vu le jour grâce, en particulier, au pouvoir fédérateur des deux séminaires d'étude qui se déroulent depuis une dizaine d'années à l'Ircam et à l'ENS. J'exprime ma profonde gratitude aux co-organisateurs des séminaires MaMuX et *mamuphi*, à tous les intervenants ainsi qu'aux membres de la *Society for Mathematics and Computation in Music* pour les nombreuses discussions que nous avons eues ensemble. Un remerciement particulier va à Dan Tudor Vuza, Emmanuel Amiot, Guerino Mazzola, Thomas Noll, Franck Jedrzejewski, Georges Bloch, Tom Johnson, Daniele Ghisi et John

Mandereau pour tous les projets de collaboration qui ont marqué profondément la direction de nos recherches. L'organisation de ces séminaires, et en particulier du Séminaire MaMuX, n'aurait pas été possible sans le soutien de Hugues Vinet, directeur scientifique de l'Ircam, ainsi que du CNRS et des autres institutions (en particulier l'AFIM et l'ESCOM) que je remercie pour l'intérêt envers nos initiatives.

J'ai personnellement énormément apprécié la possibilité de présenter l'état d'avancement de mes recherches dans le cadre des différentes formations doctorales qui ont progressivement accueilli des unités d'enseignement sur les rapports mathématiques/musique. Je remercie en particulier tous les étudiants dont les questions ont permis de clarifier de nombreux aspects des sujets présentés. En particulier, l'expérience d'enseignement à l'Université de Pisa a été fondamentale en ce qui concerne la prise de conscience du travail qui reste à accomplir afin de maîtriser pleinement un domaine de recherche qui est désormais très vaste, ce pour quoi je remercie vivement les organisateurs, Fabrizio Broglia et Francesca Acquistapace, pour la tâche délicate qui ont bien voulu me confier.

Zu guter Letzt, la rédaction de ce mémoire de synthèse n'aurait pas été possible sans un assouplissement prolongé des tâches ménagères et une planification élastique du *baby-sitting*, ce dont je remercie ma femme, Wiebke, à laquelle j'espère pouvoir bientôt renvoyer l'ascenseur...

Table des matières

Préambule sur le contexte de mes recherches « mathémusicales »	1
Première partie : Mathematica est exercitium musicae	3
1.1 De la musique aux mathématiques	5
1.2 La théorie des ensembles de classes de hauteurs et la théorie transformationnelle	8
1.2.1 Etude combinatoire des structures microtonales et leur classification paradigmatique	11
1.2.2 Calcul du catalogue des modes à transpositions limitées par multi- plication d'accords	13
1.2.3 Calcul du catalogue des modes à transpositions limitées via la struc- ture intervallique	16
1.3 De la <i>Set Theory</i> à la <i>Transformational Theory</i>	17
1.3.1 Direction de travaux d'étudiants sur ce sujet :	21
1.4 La construction des canons rythmiques mosaïques (Tiling Rhythmic Canons)	21
1.4.1 Direction de travaux d'étudiants sur ce sujet :	25
1.5 Théorie des suites mélodiques périodiques et calcul de différences finies . .	25
1.6 La relation Z en musique, la DFT et la théorie des ensembles homométriques	28
1.6.1 Direction de travaux d'étudiants sur ce sujet :	32
1.7 Les théories diatoniques et les ensembles maximale-ment repartis (<i>ME sets</i>)	32
1.7.1 Direction de travaux d'étudiants sur ce sujet :	34
1.8 Block-designs et composition algorithmique	35
Deuxième partie : Interaction de la recherche mathémusicale avec les autres disciplines	41
2.1 Mathématiques/Musique et Cognition	43
2.1.1 Perspectives futures : vers un nouveau dialogue entre les neuro- sciences et la recherche « mathémusicale » ?	48
2.1.2 Direction de travaux d'étudiants sur ce sujet :	51
2.2 Mathématiques/Musique et Informatique	51

2.2.1 Travaux d'étudiants sur ce sujet :	54
2.3 Mathématiques/Musique et Philosophie	54
Bibliographie	63
Annexe : Valorisation, transmission des connaissances et direction de tra-	
vaux d'étudiants	73
3.1 Création d'un contexte éditorial favorable	75
3.2 Nouvelles actions pédagogiques pour renforcer l'axe	
mathématiques/musique	76
3.2.1 Séminaire MaMuX	77
3.2.2 Séminaire <i>mamuphi</i>	77
3.2.3 Ecole mathématique pour musiciens et d'autres	
non-mathématiciens	78
3.3 Direction de travaux d'étudiants	79

Préambule sur le contexte de mes recherches mathémusicales

L'activité de recherche que je mène dans le domaine des rapports entre mathématiques et musique depuis mon affectation au CNRS représente, d'un côté, le prolongement d'un intérêt dans les applications des méthodes algébriques en musique dont les origines remontent à ma *tesi di laurea* en mathématique à l'université de Pavie (Andreatta, 1996), recherche intégrant par la suite les aspects informatiques, analytiques et compositionnels dans le cadre d'une thèse de doctorat en musicologie computationnelle (Andreatta, 2003). La recherche a été ensuite réorientée à partir d'octobre 2004 selon les grandes lignes contenues dans le projet **MISA** (**Modélisation Informatique des Structures Algébriques** : aspects cognitifs, philosophiques et épistémologiques) retenu par le CNRS. Ce projet s'inscrit formellement dans l'axe thématique « Musicologie computationnelle » qui constitue, avec les paradigmes de programmation pour la musique, les systèmes d'interaction symbolique et l'articulation signe-signal, l'un des quatre domaines de recherche principaux de l'équipe Représentations Musicales de l'Ircam (Fig. 1).

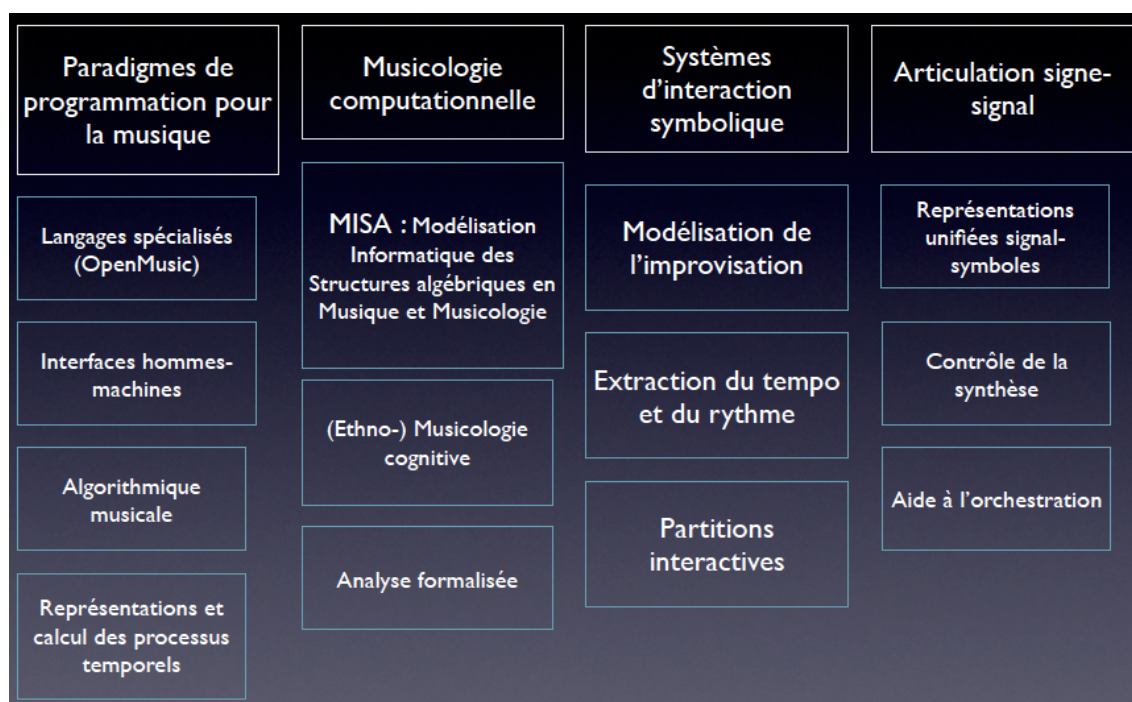


FIGURE 1 – Positionnement du projet MISA dans l'organigramme des activités de recherche de l'équipe Représentations Musicales de l'Ircam (responsable : Gérard Assayag).

Le projet MISA a permis à la fois de cristalliser la recherche autour de quelques problèmes théoriques majeurs, dont nous avons étudié les aspects mathématiques et computationnels, et également d'ouvrir la recherche « mathémusicale » à d'autres disciplines, en particulier la logique, les sciences cognitives et la philosophie. La réflexion sur les multiples interactions de la recherche « mathémusicale » avec les autres disciplines a connu une nouvelle accélération plus récemment grâce à deux projets dont j'assure la coordination :

« Mathématique/Musique et Cognition » et « Géométrie de l'interaction et informatique musicale »¹. D'un autre coté, plus institutionnel, l'activité de recherche dans le domaine des rapports entre mathématiques et musique a été également menée à travers la mise en place d'une série d'actions spécifiques nouvelles visant à transformer ce champs d'études en une véritable discipline. Parmi ces actions, on citera, en particulier, l'organisation de séminaires d'études (MaMuX et *mamuphi*), le lancement de deux collections dédiées aux rapports entre sciences et musique (Collection « Musique/Sciences », Ircam/Delatour France et « Computational Music Science », Springer), la participation à la création d'une revue de mathématiques à comité de lecture sur les liens mathématiques/musique (*Journal of Mathematics and Music*) et d'une société savante (*Society of Mathematics and Computation in Music*). Dans ce mémoire j'aborderai principalement l'activité de recherche, mentionnant brièvement ce deuxième aspect dans l'Annexe.

Dans la présentation de nos travaux, nous avons fait le choix de réduire au maximum le formalisme mathématique en privilégiant l'aspect discursif dans les problématiques traitées. Nous renvoyons le lecteur intéressé aux détails techniques des problèmes présentés à la liste des publications². S'agissant d'une recherche décrivant l'intérêt à la fois mathématique et musical de certains problèmes théoriques posés par la musique, nous avons en effet essayé de rendre ce mémoire compréhensible non seulement par des mathématiciens mais aussi par des théoriciens de la musique, analystes et compositeurs, avec la conviction profonde qu'un véritable dialogue entre les deux communautés ne peut avoir lieu qu'à partir d'un partage des concepts, indépendamment du formalisme sous-jacent.

1. Les résultats obtenus dans ces deux projets exploratoires, ainsi que les problèmes ouverts qui s'y rattachent, sont présentés dans la deuxième partie, dans laquelle nous allons également discuter de quelques aspects philosophiques du rapport mathématiques/musique

2. La liste des publications, avec un choix d'articles représentatifs, est disponible en ligne à l'adresse : <http://www.ircam.fr/equipes/repmus/moreno>.

Première partie

Mathematica est exercitium
musicae

1.1 De la musique aux mathématiques

Le rapport entre mathématiques et musique est conçu traditionnellement sous l'angle de l'*application* de méthodes mathématiques à la musique (« Musica est exercitium arithmeticae », selon la célèbre définition de Leibniz)¹. L'une des préoccupations qui animent mon activité de recherche est celle de renverser cette perspective et partir de certains problèmes théoriques posés par la musique qui sont susceptibles d'intéresser les mathématiciens et, éventuellement, de donner lieu à de nouveaux résultats en mathématiques notamment via un processus de généralisation. Ces résultats auront à leur tour des applications tout à fait nouvelles dans le domaine de la musique et c'est précisément ce double mouvement, de la musique à la formalisation mathématique et des généralisations mathématiques aux applications musicales, qui constitue l'essence d'une dynamique « mathémusicale » (Fig. 1.1).

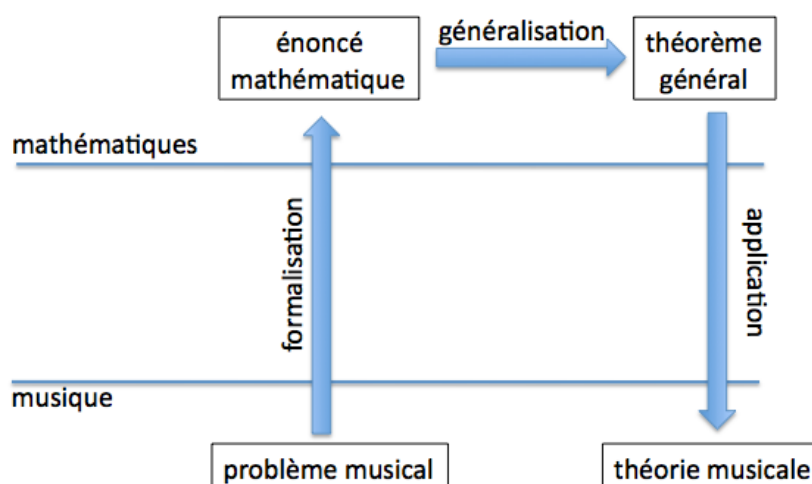


FIGURE 1.1 – Schéma détaillant le double mouvement d'une dynamique mathémusicale dans le cas d'un problème musical formalisé et ensuite généralisé en vue d'une application au domaine de la théorie musicale. Un tel diagramme s'applique également au cas d'un problème théorique posé par la musique et susceptible d'une formalisation/généralisation en vue d'une application en composition et analyse musicales.

Avant de donner quelques exemples d'incarnation de cette dynamique mathémusicale dans des problèmes théoriques qui ont constitué l'objet de mes recherches, j'aimerais souligner quelques aspects qui montrent le lien étroit entre réflexion théorique, démarche analytique et applications compositionnelles en discutant l'intérêt de l'approche que nous avons utilisé dans le processus de formalisation et de généralisation, à savoir l'approche algébrique.

L'utilisation des méthodes algébriques en musique met en effet en œuvre trois aspects qui sont souvent étroitement liés : aspects théoriques, analytiques et compositionnels. Bien

1. Lettre de Leibniz à Christian Goldbach, 17 avril 1712. Voir Leibniz (1734), p. 240.

qu'il soit souvent tentant de les séparer, afin de mettre en évidence leurs propres modes de fonctionnement, nous avons montré² le caractère très limitatif d'une telle catégorisation qui prétendrait définir les champs possibles d'application d'une méthode algébrique donnée à la musique ou à la musicologie. Il est bien connu qu'au XX^e siècle, théorie musicale, analyse et composition sont des disciplines qui s'influencent mutuellement. De plus, l'impossibilité d'une telle séparation paraît d'autant plus évidente lorsque l'on se place dans le contexte des rapports entre calcul algébrique, implémentation informatique et applications musicales.

Une analyse historique de l'émergence de l'approche algébrique en musique met par exemple en évidence le rôle clé joué par certains compositeurs/théoriciens qui ont contribué à la constitution de l'analyse musicale computationnelle en tant que discipline. Trois compositeurs/théoriciens sont, à nos yeux, emblématiques d'une réflexion théorique sur la musique, non seulement dans ses ramifications analytiques et compositionnelles, mais aussi dans son caractère éminemment algébrique : Milton Babbitt aux Etats-Unis, Iannis Xenakis en Europe et Anatol Vieru en Europe de l'Est. Tous les trois sont arrivés, presque au même moment et d'une façon indépendante, à la découverte du caractère algébrique de plusieurs problèmes théoriques posés par la musique (du tempérament égal aux propriétés combinatoires du sérialisme intégral et des techniques modales).

Notre regard rétrospectif sur l'émergence de l'approche algébrique en musique s'est accompagné d'une analyse de l'évolution du concept de « structure mathématique » au sein de l'algèbre moderne à partir du Programme d'Erlangen de Felix Klein³ jusqu'aux développements les plus récents sur la théorie mathématique des catégories, en passant par l'axiomatique hilbertienne et l'expérience Bourbakiste⁴. Le formalisme de Hilbert et l'approche structurale de Bourbaki sont deux moments de la pensée mathématique contemporaine qui ont influencé de façon décisive la naissance et l'évolution de la théorie de la musique au sens moderne. Cela permet notamment de comprendre la nature algébrique de certaines orientations formelles en analyse musicale, en particulier en ce qui concerne la *Set Theory* d'Allen Forte et la *Transformational Theory* de David Lewin⁵.

2. Principalement dans notre thèse de doctorat (Andreatta, 2003).

3. Voir Klein (1872). Notre approche « paradigmatique » au problème de la classification de structures musicales peut être considéré comme une “transposition” en musique du programme de Klein. Cet aspect sera discuté plus en détail dans la deuxième partie.

4. Nous avons ainsi pu constater que le problème de la naissance du concept de « structure » en mathématique est au cœur de plusieurs travaux d'histoire des mathématiques qui ouvrent, également, des perspectives théoriques nouvelles en philosophie des mathématiques. Voir, par exemple, Corry (1996), Patras (2001), Krömer (2007) et Marquis (2009).

5. Voir le premier des cinq problèmes théoriques sur lesquels nous avons travaillé et dont une formalisation algébrique, couplée avec une implémentation dans un langage de programmation pour l'analyse et la composition assistées par ordinateur, constitue l'une de nos contributions originales en musicologie computationnelle.

En outre, l'implémentation de nombreux outils théoriques d'aide à l'analyse musicale en *OpenMusic*⁶ soulève le problème de la calculabilité d'une théorie musicale après une transformation progressive de la nature même de la musicologie en tant que discipline relevant, traditionnellement, des sciences humaines. L'approche algébrique, et sa mise en œuvre en informatique musicale, ajoute l'élément computationnel au caractère « systématique » de la musicologie, telle qu'elle s'est constituée, grâce à Guido Adler, vers la fin du XIX^e siècle⁷. En particulier, les méthodes algébriques permettent de résoudre, d'une façon très élégante, des problèmes classiques concernant l'énumération et la classification des structures musicales, en généralisant à toute division égale de l'octave les tables de classification d'accords utilisées dans le cas du tempérament égal usuel. Ces techniques, qui s'appliquent également à d'autres paramètres que les hauteurs (en particulier les structures rythmiques), reposent sur des cadres conceptuels relativement élémentaires d'un point de vue mathématique car la structure algébrique sous-jacente est fondamentalement une structure de groupe (cyclique, diédral, affine, symétrique). Cependant, des méthodes catégorielles développées à partir des années 1980 par le mathématicien et théoricien suisse Guerino Mazzola⁸ offrent à la musicologie computationnelle un énorme pouvoir d'abstraction et de formalisation. Et si la généralisation de la *Set Theory* américaine par David Lewin et le modèle théorique proposé par Guerino Mazzola se rejoignent en postulant la primauté de la notion de « transformation » sur celle d'« objet musical », ce changement de perspective, implicite dans toute démarche algébrique, est riche de conséquences philosophiques, car il ouvre une question fondamentale sur le rapport entre « objets mathématiques » et « structures musicales ». Nous reviendrons dans la deuxième partie sur ces considérations d'ordre philosophique qui nous ont permis de proposer une lecture épistémologique de l'évolution de la recherche mathémusicale, dans laquelle le cadre théorique originaire, marqué par l'in-

6. Ce langage de programmation visuelle, développé par l'Equipe Représentations Musicales de l'Ircam, était initialement conçu pour la composition assistée par ordinateur mais il est de plus en plus employé comme outil analytique, comme nous aurons l'occasion de le montrer en présentant notre approche paradigmatique en ce qui concerne la classification d'accords et des rythmes. L'environnement « MathsTools » que nous avons conçu en *OpenMusic* offre une palette d'outils théoriques utilisés dans la recherche mathémusicale contemporaine et susceptibles d'être appliqués à la fois en composition et en analyse musicales. Pour une présentation d'*OpenMusic* voir Agon (1998), Assayag *et al.* (1999) ainsi que la documentation disponible à l'adresse <http://recherche.ircam.fr/equipes/repmus/OpenMusic/>.

7. Adler (1885).

8. À partir de l'ouvrage *Gruppen und Kategorien in der Musik* (Mazzola 1985) jusqu'à *The Topos of Music* (Mazzola 2004), la réflexion théorique sur la formalisation algébrique et catégorielle des structures musicales a conduit progressivement à la mise en place d'une architecture informatique ayant la puissance du calcul mathématique. C'est précisément cette architecture, fondée sur le concept de « dénotateur » (Mazzola 2008), qui a motivé notre formalisation catégorielle de certaines constructions de la tradition américaine, en particulier des réseaux de Klumpenhouwer (Mazzola et Andreatta, 2006). Sans rentrer dans les détails techniques de cette construction, nous donnerons simplement le résultat final qui représente, à nos yeux, un exemple assez convaincant d'application de la théorie des catégories dans l'énumération des structures musicales.

fluence indéniable du positivisme logique de l'école de Vienne, a progressivement laissé la place à d'autres orientations philosophiques (Andreatta, 2010).

Nous allons maintenant présenter plus en détail quelques problèmes théoriques qui ont fait l'objet de nos recherches dans le domaine des relations entre mathématiques et musique en indiquant, pour chaque problème mathémusical, les résultats obtenus et les questions ouvertes. La liste de ces problèmes comprend :

1. La théorie des ensembles des classes de hauteurs et la théorie transformationnelle ;
2. La construction des canons rythmiques mosaïques (*Tiling Rhythmic Canons*) ;
3. La théorie des suites périodiques et le calcul des différences finies ;
4. La relation Z et la théorie des ensembles homométriques ;
5. Les théories diatoniques et les ensembles maximalelement repartis (*ME sets*) ;
6. La théorie des block-designs en composition algorithmique

Bien que ces problèmes soient indépendants dans leur origine théorique, chacun ayant été proposé par un ou plusieurs compositeurs, il s'agit en réalité de problèmes qui ont souvent de multiples intersections, comme nous nous efforcerons de montrer en discutant le travail de formalisation/généralisation que nous avons accompli ainsi que l'intégration informatique de ces résultats dans l'environnement « MathsTools » d'*OpenMusic*. Soulignons cependant que, bien que l'implémentation ait facilité, en générale, l'appropriation de ces outils théoriques de la part des compositeurs et analystes, la dynamique « mathémusicale » que nous avons esquissée précédemment (Fig. 2) reste, dans certains cas, un schéma idéal, l'étape finale d'application analytique ou compositionnelle des généralisations obtenues n'ayant pas été entièrement franchie.

1.2 La théorie des ensembles de classes de hauteurs et la théorie transformationnelle

Le travail de généralisation de la théorie des ensembles de classes de hauteurs (traditionnellement appelée *Musical Set Theory* ou, tout simplement *Set Theory*⁹) et de la théorie transformationnelle (*Transformational Theory*) au travers de l'approche algébrique a été menés en collaboration étroite avec plusieurs mathématiciens, tels Guerino Mazzola (MultiMedia Lab de Zürich / Université de Minnesota), Emmanuel Amiot (Professeur CPGE

9. Nous utiliseront pour simplicité cette deuxième appellation, en mettant en garde le lecteur mathématicien sur le fait que dans le contexte musicologie ce terme ne recouvre qu'une portion très limitée de la théorie des ensembles au sens mathématique. Dans la *Set Theory* il n'est, par exemple, jamais question de fondements, les ensembles musicaux étant presque toujours de cardinalité finie. Bien que la théorie transformationnelle de David Lewin ait également adressé le problème des constructions théoriques en musique dans lesquelles les ensembles peuvent être infinis, nous n'avons jamais explicitement abordé ce problème dans le cadre de notre activité de recherche.

à Perpignan), Franck Jedrzejewski (CEA-Saclay), Thomas Noll (professeur de théorie de la musique à l'ESMuC de Barcelone et éditeur du *Journal of Mathematics and Music*). Le travail d'intégration systématique de ces outils théoriques en *OpenMusic*, a été réalisé en collaboration avec Carlos Agon (équipe Représentations Musicales) et constitue, comme nous l'avons mentionné, l'un des aspects qui a dynamisé l'axe de recherche autour de la musicologie computationnelle. Le travail de l'équipe se fondant sur une activité de recherche et de développement dans le domaine des langages et paradigmes informatiques adaptés à la musique, je me suis tout d'abord intéressé aux aspects computationnels de la *Set Theory* d'Allen Forte et de la *Transformational Theory* de David Lewin. Pour la première, j'ai donné une formalisation « paradigmatique » (au sens de la théorie des actions des groupes, cf. *infra*) tandis que pour la deuxième j'ai proposé, avec Guerino Mazzola, une présentation catégorielle qui donne un résultat nouveau en ce qui concerne l'énumération de certaines structures globales (les « réseaux de Klumpenhouwer ») en relation d'« isographie forte » à travers le concept de limite d'un diagramme commutatif. Il s'agit d'un résultat qui ouvre des perspectives computationnelles tout à fait nouvelles pour l'analyse musicale assistée par ordinateur.

D'un point de vue musicologique, les outils de représentations et de modélisation informatique permettent une approche véritablement expérimentale qui dynamise de manière significative la discipline. Ainsi des hypothèses peuvent être testées et validées en s'appuyant sur la puissance de calcul symbolique et combinatoire. D'un point de vue plus informatique, les modèles computationnels, dotés d'une certaine généricité, visent l'élaboration de langages (langages visuels, langages multi-paradigmes incluant les aspects fonctionnels, objet et logiques) et d'architectures (architectures à composants, environnement mixtes de programmation et d'édition visuelle de données). Les modèles musicaux visent à définir des représentations et des algorithmes susceptibles de capturer des aspects importants du phénomène musical. Dans le cas de la *Set Theory* et des théories transformationnelles, ces aspects concernent surtout l'organisation des hauteurs dans l'espace tempéré, leur représentation et leur classification. A la différence des présentations traditionnelles de la *Set Theory*, comme celle d'Allen Forte (1977), de John Rahn (1980) ou de Robert Morris (1987), la théorie des ensembles de classes de hauteurs se prête très bien à être intégrée dans une approche algébrique qui utilise pleinement la puissance combinatoire de la structure de *groupe cyclique* sous-jacente à toute division de l'octave musicale en un nombre n de parties égales. L'implémentation, réalisée en *OpenMusic*, se déploie dans une architecture « paradigmatique » basée sur l'action de certains groupes sur l'espace tempéré (le groupe cyclique en tant qu'ensemble dépourvu de structure algébrique). L'implémentation permet à l'analyste de choisir son propre critère d'équivalence entre structures d'accords en utilisant comme « paradigmes » d'analyse les différents groupes que l'on peut choisir de faire opérer sur l'espace musical. En particulier, nous avons implémenté les relations d'équivalence (donc les catalogues d'accords) induites par l'action de quatre groupes sur un tempérament musical choisi : le groupe *cyclique* (ou

paradigme de l'équivalence à une transposition musicale près), le groupe *diédral* (paradigme de la *Set Theory*, i.e. équivalence à une transposition et/ou une inversion musicale près), le groupe *affine* (équivalence à une multiplication ou application affine près) et groupe *symétrique* (équivalence à une permutation près des valeurs correspondantes à une *structure intervallique*¹⁰ donnée). L'architecture paradigmatique de cet environnement est décrite dans la figure suivante (Fig. 1.2) qui montre les représentations circulaires et les structures intervalliques associées aux différentes classes d'équivalence d'un même accord. On obtient ainsi de catalogues d'accords de taille de plus en plus petite, en correspondance des diverses actions de groupe sur l'espace chromatique du tempérament égal. Dans le cas de l'action du groupe symétrique sur l'ensemble des structures intervalliques, on réduit le catalogue d'accords à 77 orbites qui correspondent aux « textures » utilisées par le compositeur mexicain Julio Estrada (Estrada et Gil 1984; Estrada 1994). Dans l'exemple de l'accord représenté dans l'architecture paradigmatique en Fig. 1.2, la structure intervallique (1 2 2 3 4) sera donc équivalente à toutes ses permutations. Et puisque la somme des éléments d'une structure intervallique est égale à 12 par définition, le catalogue d'accords obtenu par l'action du groupe symétrique S_n sur l'espace des structures intervalliques coïncide donc avec l'ensemble des 77 partitions de 12, chaque partition étant en correspondance bijective avec l'une des textures utilisées par Estrada.

Le terme « paradigmatique » a été choisi pour souligner la portée philosophique de l'approche algébrique en analyse musicale¹¹. Les groupes algébriques jouent, en effet, le rôle des « paradigmes » dans un sens très proche à celui utilisé par Thomas Kuhn dans son analyse de la structure des révolutions scientifiques. L'idée sous-jacente est celle de l'intérêt, pour un analyste ou un musicologue, de choisir le « paradigme » le mieux approprié pour décrire de façon pertinente un phénomène musical observé. Par exemple, dans l'analyse de la musique tonale, le « paradigme » du groupe cyclique (équivalence à une transposition près) sera sans doute plus pertinent que le paradigme du groupe diédral (utilisé avec succès dans l'analyse de la musique atonale) ou que celui du groupe affine (qui est le mieux adapté pour rendre compte de la dualité diatonique/chromatique qui caractérise, par exemple, des répertoires musicaux incluant la musique d'Alexander Scriabin ou Bela Bartok ainsi que des techniques musicales typiques de l'improvisation jazz).

Dans notre activité de recherche nous avons proposé une double généralisation de la *Set Theory*, tout d'abord dans la direction d'une étude structurale de la microtonalité et ensuite dans la direction d'une généralisation catégorielle de certains aspects de l'analyse transformationnelle de David Lewin.

10. Par définition, la structure intervallique d'un sous-ensemble $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ de $\mathbb{Z}_{12}$ est l'ensemble ordonné $(s_1 s_2 \dots s_k)$ des différences successives $s_1 = a_2 - a_1$, $s_2 = a_3 - a_2$, $\dots$, $s_k = a_1 - a_k$ toujours calculées mod 12 (ou modulo n dans le cas général de la division de l'octave en n parties égales).

11. Cette réflexion sera reprise dans la deuxième partie, à l'intérieur de notre proposition théorique sur les ramifications philosophiques de la recherche mathémusicale contemporaine.

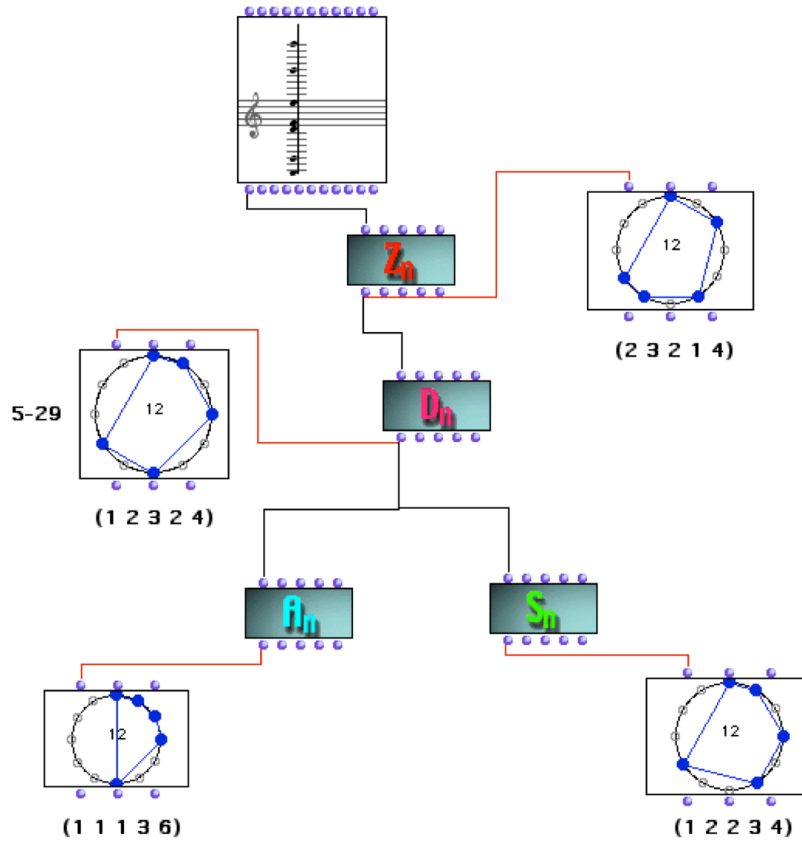


FIGURE 1.2 – Architecture « paradigmatique » pour la théorie, l’analyse et la composition assistées par ordinateur basée sur le concept d’action d’un groupe (cyclique, diédral, affine et symétrique) sur un tempérament égal donné. L’accord de départ, visualisé géométriquement comme un polygone inscrit dans le cercle divisé en 12 parties égales, est représenté à l’aide de la « structure intervallique ».

1.2.1 Etude combinatoire des structures microtonales et leur classification paradigmatique

Si c’est vrai, comme l’affirme Milton Babbitt dans le cas du système dodécaphonique, qu’un « grand nombre de conséquences compositionnelles sont dérivables directement de théorèmes de la théorie des groupes finis »¹², dans le cas du problème de la classification d’accords dans un tempérament égal, c’est un lemme (Lemme de Burnside¹³) qui est à la base de toute formule d’énumération. Ce lemme affirme que lorsqu’on a une action d’un groupe G sur un ensemble X , le nombre total d’orbites $\#Orb$ est la « moyenne » des fixateurs des éléments du groupe, où le fixateur X_g d’un élément g de G

12. Babbitt (1961).

13. Ou « Lemme qui n’est pas de Burnside », comme l’affirme Neumann (1979) en soulignant le fait que ce résultat était, en réalité, connu bien avant Burnside.

est l'ensemble des éléments x de X tels que $gx=x$. Une fois implémentés dans un langage de programmation pour la composition assistée par ordinateur, les outils mathématiques issus de la théorie de l'énumération de Burnside et Polya offrent aux compositeurs la possibilité de mieux comprendre la richesse combinatoire d'un espace tempéré à n degrés. À titre d'exemple, nous donnons en Fig. 1.3 l'énumération des classes d'équivalence d'accords selon le paradigme de l'action du groupe diédral dans le système tempéré à 12 et 24 degrés.

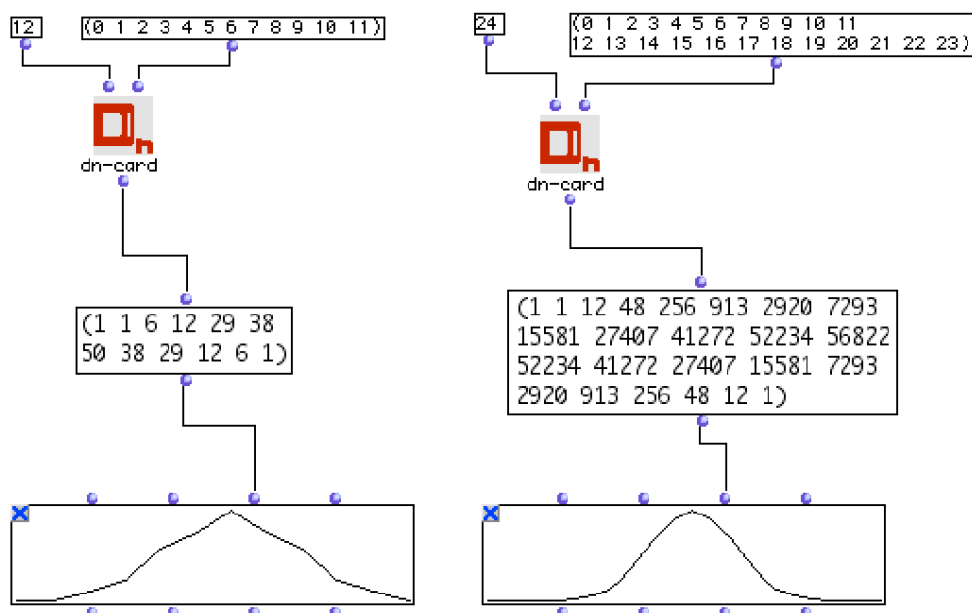


FIGURE 1.3 – Distribution du nombre d'orbites sous l'action du groupe diédral $\mathbb{D}_n$ dans le cas de la division de l'octave en 12 et en 24 parties égales. Dans les deux cas le maximum est atteint pour les orbites ayant une cardinalité égale à $n/2$ où n est l'ordre du groupe cyclique sur lequel opère le groupe diédral. On passe ainsi des 50 hexacordes du tempérament égal traditionnel (modulo la transposition et l'inversion) aux 56822 orbites de cardinalité égale à 12 dans la division de l'octave en quart de tons, un espace qui demeure de nos jours presque totalement inexploré.

Le travail sur les structures microtonales a été sollicité, en particulier, par des questions théoriques posés par le compositeur Alain Bancquart qui était intéressé à étudier la puissance combinatoire de son système basé sur la division de l'octave en 96 parties égales. Dans ce cas, comme dans d'autres tempéraments microtonaux, la formule d'énumération obtenue en appliquant le Lemme de Burnside ou la théorie de l'énumération de Polya, ne permet pas une construction explicite de toutes les orbites. Un exemple intéressant, sur lequel nous avons travaillé, concerne une famille d'orbites obtenue à travers l'action du groupe cyclique $\mathbb{Z}_n$ sur lui-même en tant qu'ensemble en ajoutant une contrainte d'invariance transpositionnelle. Ces ensembles sont appelés traditionnellement « modes

de Messiaen à transpositions limitées »¹⁴). Afin de calculer le catalogue des modes à transpositions limitées en se basant sur la définition d'invariance transpositionnelle il est nécessaire d'avoir accès à l'espace des sous-ensembles de $\mathbb{Z}_n$ dont la cardinalité augmente considérablement, comme nous l'avons vu, avec le nombre n de divisions de l'octave en parties égales. Cela mène rapidement à l'explosion combinatoire dans des divisions très fines de l'octave, comme par exemple celle utilisée par Alain Bancquart. Nous avons proposé deux stratégies pour le calcul explicite des modes à transpositions limitées pour toute division de l'octave en un nombre n de parties égales : par multiplication d'accords (à la Boulez) et via la structure intervallique.

1.2.2 Calcul du catalogue des modes à transpositions limitées par multiplication d'accords

L'opération de multiplication d'accords a été historiquement introduite par Boulez comme un processus sériel à travers lequel le compositeur pouvait faire proliférer le matériau tout en gardant une cohérence « intervallique » dans les séries dérivées¹⁵. Cette opération, formellement équivalente au concept de « combinaison transpositionnelle » [*transpositional combination*] dans la tradition américaine¹⁶, est définie *more algebrico* par Anatol Vieru¹⁷ avec le terme de « composition » et à plusieurs niveaux d'abstractions. Une première définition de l'opération de « composition » concerne le rapport entre une structure intervallique et une note. « Composer » une structure intervallique et une note signifie tout simplement restituer la gamme musicale qui est représentée par une telle structure, gamme qui aura comme première note la note choisie. En modifiant légèrement la notation introduite par Vieru, nous noterons l'opération de « composition » par le symbole « $\bullet$ ». La figure suivante (Fig. 1.4) montre la composition entre la structure (1 2 3 1 2 3) et la note *do*, représentée, par simple convention, par l'entier 0 (entre accolades).

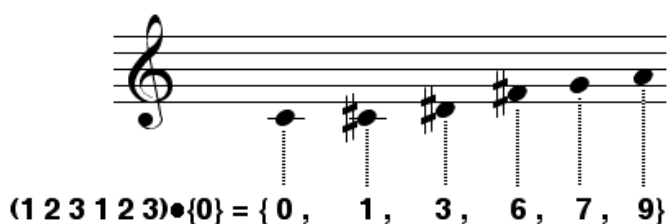


FIGURE 1.4 – Une composition entre une structure intervallique et une classe de hauteur

14. Rappelons que, par définition, un mode à transpositions limitées est un sous-ensemble A de $\mathbb{Z}_{12}$ pour lequel il existe une transposition T_d avec $d \neq 0$ vérifiant l'équation : $T_d(A) = A$ où la transposition T_d est l'application de $\mathbb{Z}_{12}$ sur lui-même définie par $T_d(x) = d + x$ modulo 12.

15. Boulez (1963).

16. Voir, par exemple Cohn (1986).

17. Vieru (1980).

Un degré d'abstraction supérieur consiste à « composer » une structure intervallique avec un mode, c'est-à-dire un ensemble de classes de résidus ayant plus d'un élément. Il suffit de composer la structure intervallique avec les éléments qui constituent le mode et de prendre enfin l'union des résultats obtenus. La figure suivante (Fig. 1.5) montre le même mode à transpositions limitées obtenu, cette fois, par composition de la structure intervallique (6 6) correspondant à deux notes distantes d'un triton avec le mode $\{0, 1, 3\}$. Formellement, on obtient :

$$(6\ 6) \bullet \{0, 1, 3\} = ((6\ 6) \bullet \{0\}) \cup ((6\ 6) \bullet \{1\}) \cup ((6\ 6) \bullet \{3\}) = \{0, 6\} \cup \{1, 7\} \cup \{3, 9\} = \{0, 1, 3, 6, 7, 9\}.$$

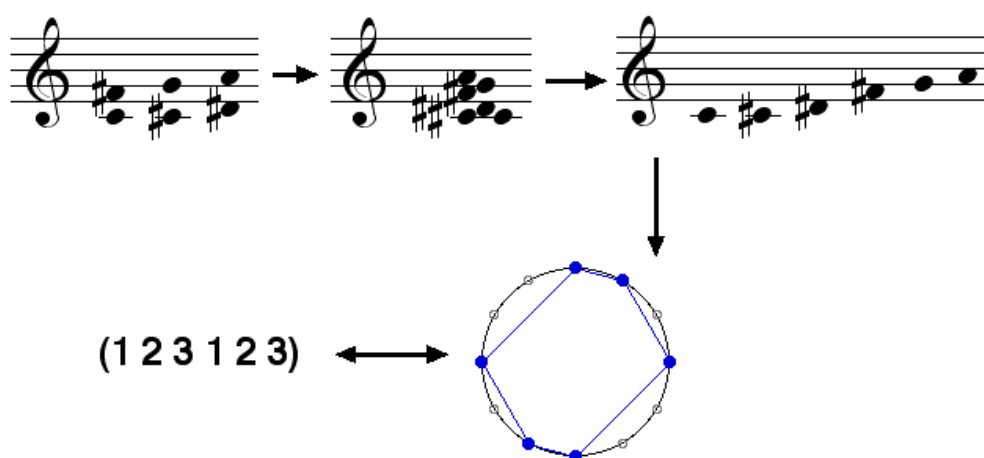


FIGURE 1.5 – Un accord ayant la propriété d'invariance transpositionnelle obtenu à partir d'une « composition » entre la structure intervallique (6 6) et le mode $\{0, 1, 3\}$.

La troisième étape dans la définition de l'opération de « composition » consiste à la définir directement sur les structures intervalliques. À la différence des cas précédents, le résultat sera cette fois une structure intervallique, ce qui exprime très bien le caractère fondamentalement intervallique de la pensée compositionnelle d'Anatol Vieru, qui vise ainsi à expliciter une des dualités fondamentales en musique : la dualité sons/intervalles.

Par définition, composer deux structures intervalliques signifie faire la « composition » entre une des deux structures et n'importe quel mode représenté par l'autre structure. Par exemple, composer la structure (6 6) avec la structure (1 2 9) consiste à prendre d'abord un mode représenté par l'une des deux structures (par exemple le mode $\{0, 1, 3\}$ représenté par la deuxième structure intervallique) et composer la première structure avec ce mode. Le mode ainsi obtenu est ensuite transformé en sa structure intervallique correspondante. Dans l'exemple choisi, on est ramené simplement à calculer la structure intervallique du mode $\{0, 1, 3, 6, 7, 9\}$, c'est-à-dire (1 2 3 1 2 3). On peut donc écrire formellement :

$$(6\ 6) \bullet (1\ 2\ 9) = (1\ 2\ 3\ 1\ 2\ 3).$$

Cette opération est bien définie car elle ne dépend pas du représentant choisi. Autrement dit, si au lieu de prendre le mode $\{0, 1, 3\}$ on considère un autre mode, par exemple $\{1, 2, 4\}$, représenté par la même structure intervallique (1 2 9), le résultat de l'opération de composition est le même (à une transposition près!), comme le montre la figure suivante (Fig. 1.6).

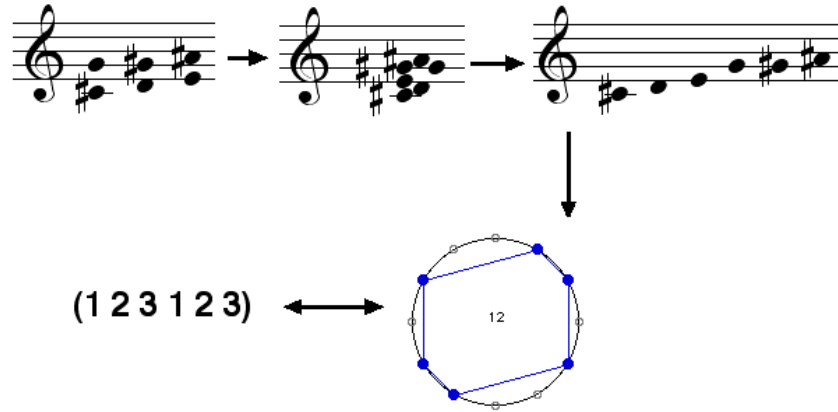


FIGURE 1.6 – Changement de représentant dans le calcul de la composition des deux structures intervalliques (6 6) et (1 2 9)

En termes algébriques, l'opération de « composition » est une loi de composition interne dans l'ensemble des structures intervalliques et elle permet de munir cet espace d'une structure de *monoïde commutatif* avec élément unitaire¹⁸. La multiplication d'accords que nous venons de définir est un outil opérationnel extrêmement puissant pour calculer le catalogue exhaustif des modes à transposition limitée. Pour cela il faut d'abord introduire une famille très particulière de structures intervalliques, qu'on retrouve dans la littérature sous des noms différents¹⁹. Il s'agit des structures que l'on peut exprimer à l'aide d'un seul intervalle ou bien, en utilisant une terminologie plus mathématique, qui sont associées à des modes « engendrés » par un élément du groupe cyclique $\mathbb{Z}_n$ i.e. à des sous-groupes de $\mathbb{Z}_n$. Elles sont donc de la forme $A = (a \ a \ a \ \dots \ a)$, où l'élément a est répété un nombre fini de fois (au plus n dans le cas de la division de l'octave en n parties égales).

Intuitivement, les structures idempotentes jouent dans la construction des modes à transposition limitée le rôle joué par les nombres premiers dans la construction des nombres

18. La « composition » est associative, commutative et l'élément unitaire est la structure intervallique correspondant à un mode ayant une seule classe de hauteurs. Il lui manque l'axiome de l'inverse pour être un groupe, autrement dit, étant donné une structure intervallique, on ne peut pas trouver la structure qui « composée » à celle de départ restitue l'élément identité, c'est-à-dire la structure correspondant à la note simple.

19. Maciej Zalewski (1972) les appelle « structures monomorphes », tandis que Vuza (1982) utilise le terme « idempotentes » qui mieux exprime le comportement vis-à-vis de l'opération de « composition ». Par définition, une structure intervallique A est idempotente par rapport à l'opération de composition « $\bullet$ » si $A \bullet A = A$.

entiers. Tout nombre entier est décomposable, d’une façon unique, en un produit de puissances de nombres premiers. Ainsi, tout mode à transpositions limitées s’obtient en faisant la « composition » d’un mode avec une structure idempotente. Cette approche algorithmique permet donc de calculer explicitement le catalogue des modes de Messiaen sans s’appuyer sur des outils de l’algèbre combinatoire tels le Lemme de Burnside ou la théorie de l’énumération de Polya.

1.2.3 Calcul du catalogue des modes à transpositions limitées via la structure intervallique

Nous avons amplement discuté de l’importance de la structure intervallique d’un accord en tant qu’invariant par rapport à la transposition (Andreatta 2003). Au-delà de cet aspect, qui a été utilisé pour établir des catalogues exhaustifs d’accords à une transposition près²⁰, nous aimerions souligner ici une propriété de la structure intervallique permettant de réduire au minimum la complexité du problème de calcul des modes à transpositions limitées pour toute division de l’octave en n parties égales. Cette propriété s’énonce en disant qu’un sous-ensemble A de $\mathbb{Z}_n$ est un mode de Messiaen ssi sa structure intervallique est redondante, i.e. si elle est égale à une concaténation d’un même pattern.

On montre aisément que la condition sur la redondance de la structure intervallique est nécessaire. En effet, si un ensemble M est un mode à transpositions limitées, alors sa structure intervallique sera du type $(a_1 a_2 \dots a_k \dots a_1 a_2 \dots a_k)$, le facteur m de la transposition T_m rendant invariant le sous-ensemble étant égal à $a_1 + a_2 + \dots + a_k$. De même on montre que la condition est suffisante.

Tout comme la multiplication d’accords, cette propriété offre un algorithme constructif pour un catalogue des modes à transpositions limitées pour toute division de l’octave en n parties égales. De plus, avec cet algorithme le problème d’une classification de ce type de structures est résoluble en temps polynomial. La figure suivante (Fig. 1.7) montre le résultat dans la division de l’octave en tiers de ton (i.e. $n=18$).

L’intégration de ces outils théoriques liés à la classification paradigmatique des structures microtonales en *OpenMusic* offre ainsi à l’analyste des stratégies nouvelles pour analyser des répertoires basés sur des divisions de l’octave musicale en un nombre très élevé de parties égales. La figure suivante (Fig. 1.8) montre un exemple d’utilisation d’une telle approche computationnelle dans l’analyse d’un extrait de la pièce *Amour grand terrible champ critique* d’Alain Bancquart basée sur la division de l’octave en 96 parties.

20. Voir, en particulier, Vieu (1980) pour l’une des premières utilisations de la structure intervallique dans le problème de la classification des modes.

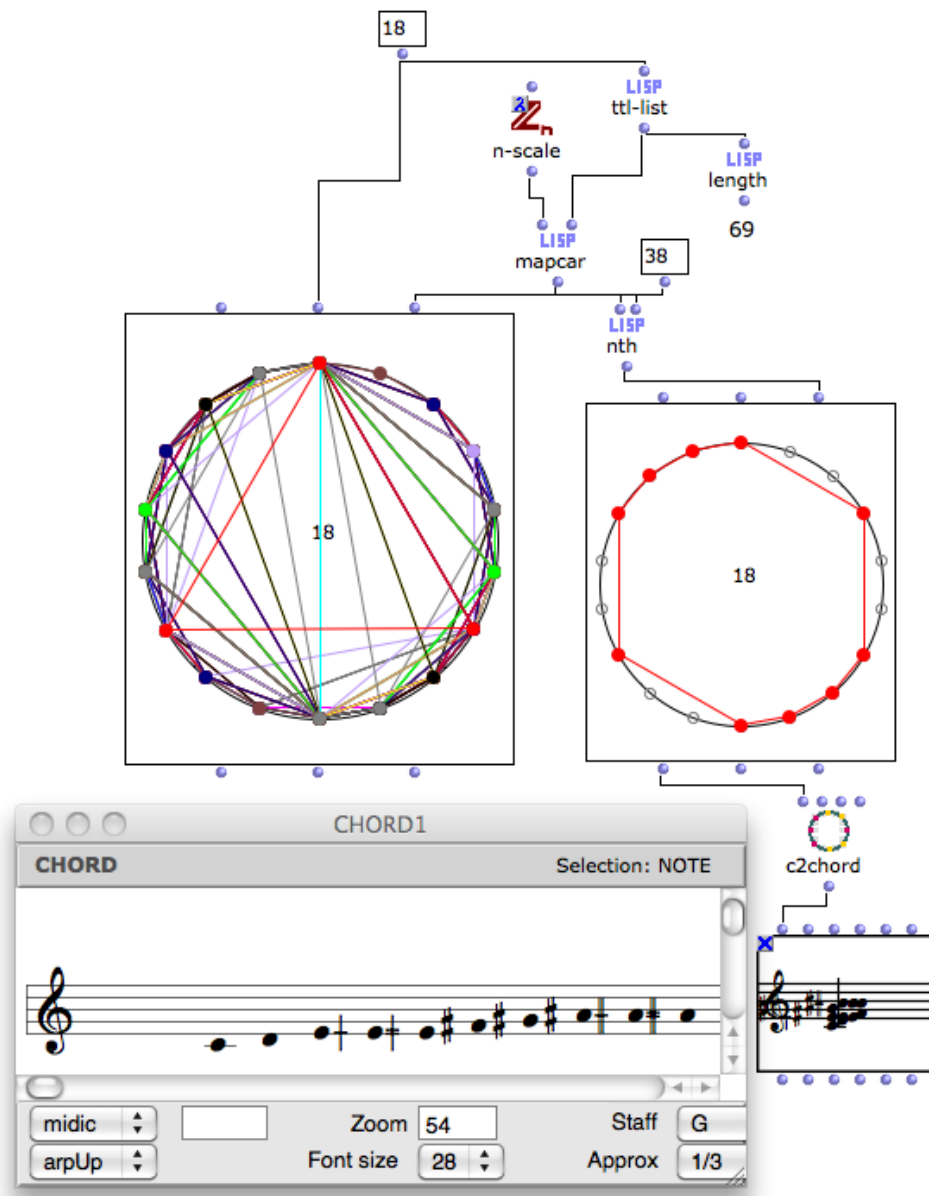


FIGURE 1.7 – Catalogue des 69 modes à transpositions limitées dans un système de division de l’octave en tiers de ton, calculés à partir de la structure intervallique. Une solution, plus précisément la 38^e du catalogue, est visualisée à la fois à l’aide de la représentation circulaire mais également en notation musicale traditionnelle.

1.3 De la *Set Theory* à la *Transformational Theory*

La démarche algébrique permet d’introduire également les concepts de base de l’analyse transformationnelle, telle que David Lewin l’a conçue à partir notamment d’une mathématisation des outils de base de la *Set Theory*. À la différence de l’approche « set-théorique » classique, l’analyse transformationnelle consiste à segmenter une partition de musique à travers un recouvrement de sous-ensembles qui sont liés par des opérations

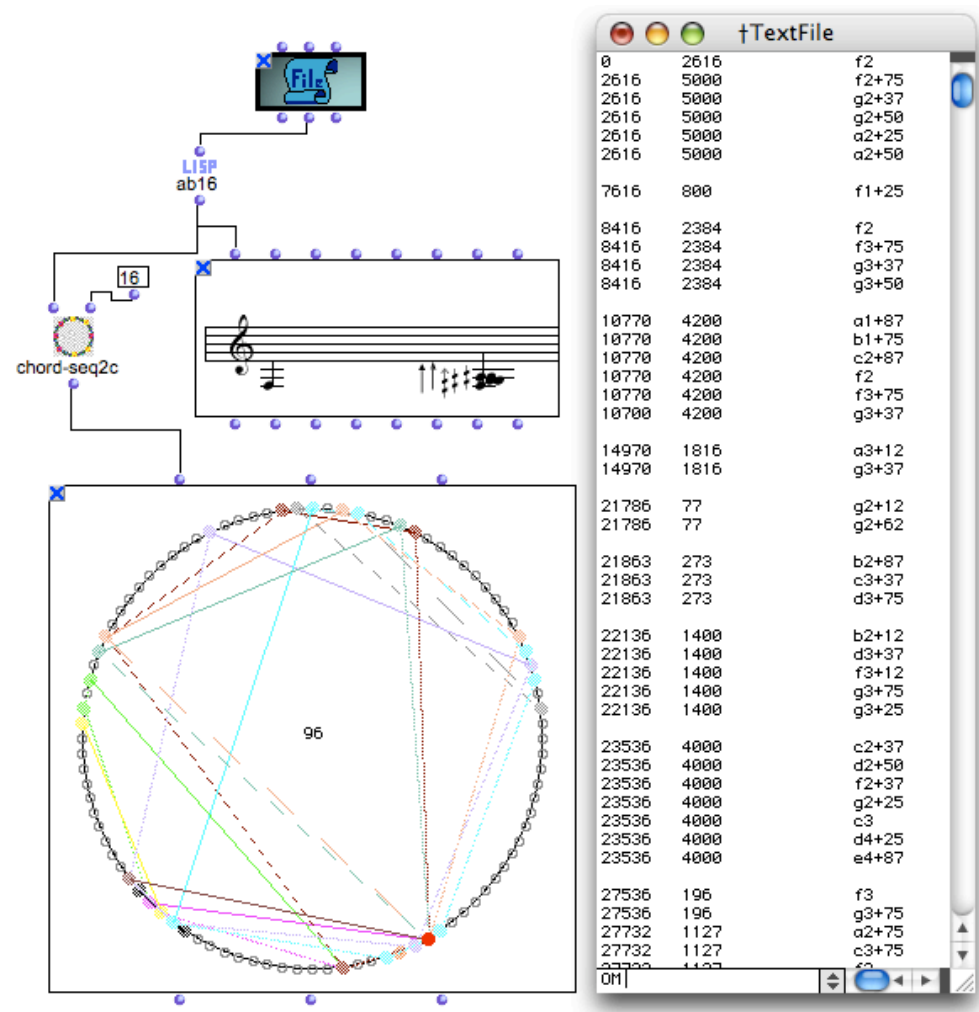


FIGURE 1.8 – Un extrait de la pièce *Amour grand terrible champ critique* d’Alain Bancquart dans la modélisation réalisée en *OpenMusic* (Bancquart et al. 2008).

musicales de transposition et d’inversion. Elle permet ainsi de créer un espace abstrait de relations de transposition et d’inversion entre les accords qui peut décrire le déroulement temporel de la pièce (*progression transformationnelle*) ou bien une organisation spatiale des transformations algébrique/musicales (*réseau transformationnel*). La figure suivante (Fig. 1.9) montre un exemple d’une démarche transformationnelle dans le cas de l’analyse du *Klavierstück III* de K. Stockhausen par David Lewin²¹, une analyse que nous avons reprise en utilisant la représentation circulaire pour mettre en évidence les transformations musicales qui permettent de décrire la partition à partir d’une même structure de pentacorde. Ces transformations ne changent pas la nature « ensembliste » du pentacorde, car les cinq formes sont « équivalentes » à une transposition ou une inversion près (ou une combinaison des deux opérations).

21. Lewin (1993).

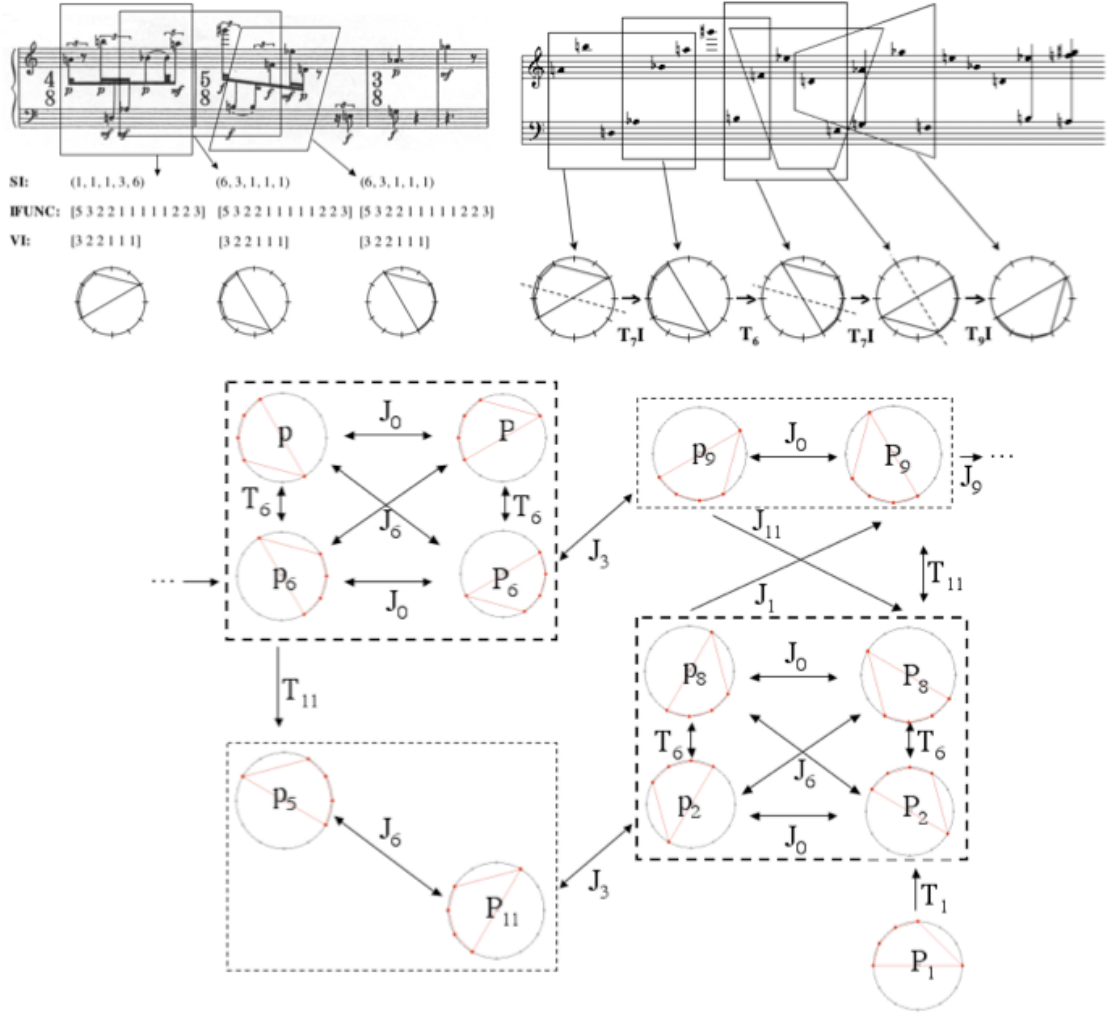


FIGURE 1.9 – Segmentation par imbrication et progression/réseau transformationnels associés à l'aide de la représentation circulaire.

J'ai également entrepris un travail de généralisation de la *Set Theory* et de l'analyse transformationnelle via la théorie des catégories, en collaboration avec le mathématicien Guerino Mazzola. Nous avons montré (Mazzola et Andreatta 2006) qu'en représentant les réseaux de Klumpenhouwer (ou *K*-réseaux) comme une catégorie (cette des *graphes dirigés*), on peut étudier d'un point de vue catégoriel les isomorphismes entre deux *K*-réseaux ainsi que les principes récurrents permettant de construire un réseau de réseaux de réseaux et ainsi de suite. La figure suivante (Fig. 1.10) montre un exemple d'utilisation des réseaux de Klumpenhouwer (*K-net* ou *K*-réseau) et leur caractère récursif.

La formalisation catégorielle des *K*-réseaux a deux grands avantages. D'un côté elle permet de donner un résultat d'énumération des *K*-réseaux en relation d'isographie forte (*strong isography*), c'est-à-dire ayant la même configuration de flèches. D'autre part elle intègre, de par sa nature même, le principe de récursivité. La famille des réseaux en

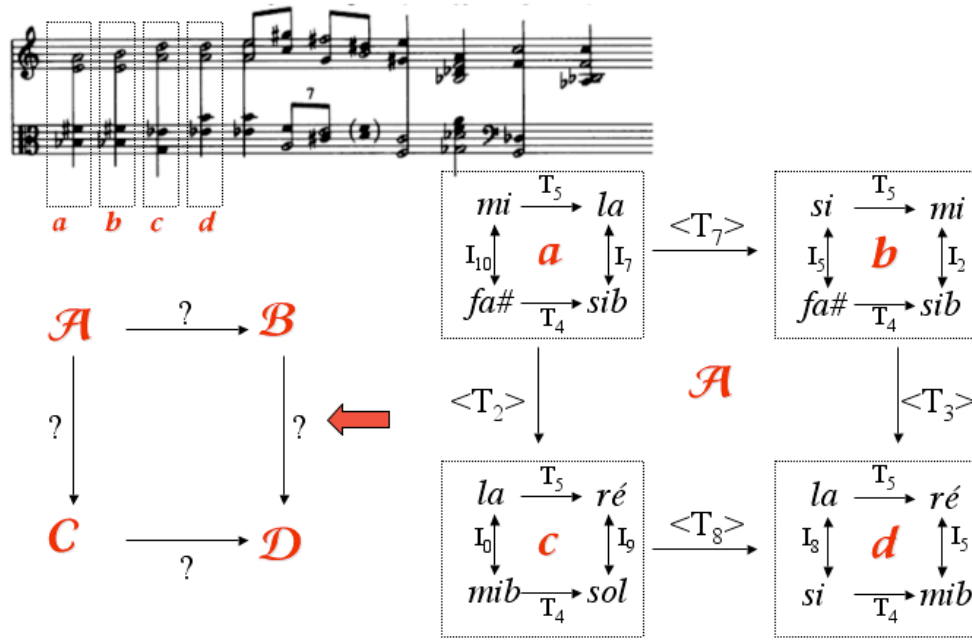


FIGURE 1.10 – Un exemple de réseaux de Klumpenhouwer, configurations spatiales diagrammatiques déployant des transformations de transpositions et d'inversions, et de leur récursivité.

relation d'isographie forte avec un K -réseau donné est isomorphe à un sous-groupe du groupe $(\mathbb{Z}_{12})^m$ où m est le nombre de composantes connexes du graphe. Et puisque dans un K -réseau il n'y a traditionnellement qu'une seule composante connexe, on peut affirmer que le nombre de réseaux ayant la même configuration de flèche est toujours un diviseur de 12 (dans le cas, évidemment, d'un K -réseau construit à partir de l'espace tempéré $\mathbb{Z}_{12}$). La figure suivante (Fig. 1.11) donne, par exemple, quatre K -réseaux en relation d'isographie forte.

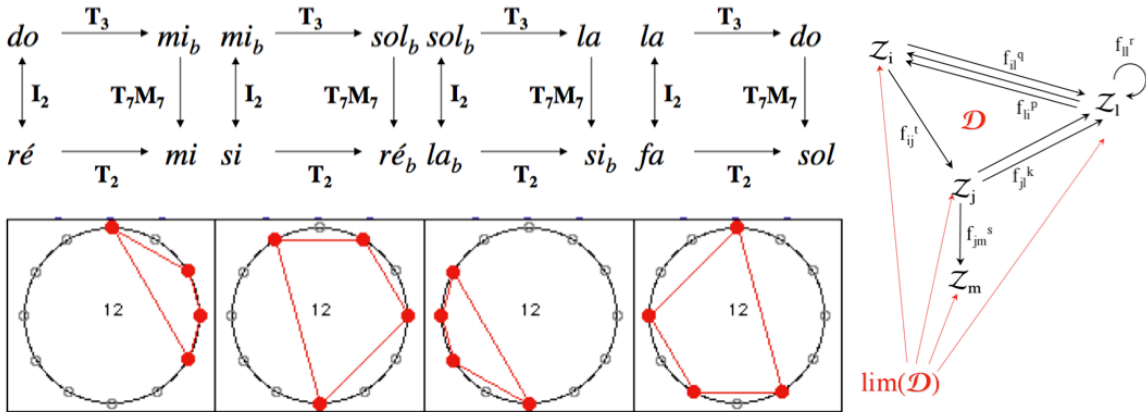


FIGURE 1.11 – Quatre réseaux en relation d'isographie forte et limite d'un diagramme catégoriel (où $T_k(x) = x + k$, $I_h(x) = h - x$ et $M_s(x) = s \cdot x$ indiquent respectivement les opérations de transposition, inversion, et application affine, toujours calculées modulo 12).

D'autre part, il est tout à fait naturel d'abstraire chacun des réseaux précédents et les transformer en des sommets d'un réseau de réseaux potentiel, ayant comme flèches des transformations isographiques (dans ce cas l'identité) entre des réseaux sous-jacents. La construction s'applique dans des cas beaucoup plus généraux de façon tout à fait naturelle, car l'un des avantages de la théorie des catégories est précisément de pouvoir construire des transformations entre catégories (*foncteurs*) ainsi que des transformations entre foncteurs (*transformations naturelles*). Cette démarche a été ensuite généralisée dans le cadre d'une théorie catégorielle des « gestes » en musique (Mazzola et Andreatta, 2007), une approche qui suggère la possibilité de considérer le rapport entre mathématiques et musique comme une sorte de mouvement adjoint entre les formules en mathématiques et les gestes en musique (Mazzola 2010).

1.3.1 Direction de travaux d'étudiants sur ce sujet :

1. Gracienne Benoit, *Terminologie. La Set Theory*²², mémoire de fin d'études en traduction, I.S.T.I. (Institut supérieur de traducteurs et interprètes de Bruxelles), 31 mai 2005.
2. Yun-Kang Ahn, *Aspects théoriques et informatiques de l'analyse transformationnelle*, mémoire d'ingénieur et de master ATIAM de l'Ircam/Université de Paris VI, spécialité SARS, Mai 2005.
3. V. FamourZadeh, *La musique persane, Formalisation algébrique*, mémoire de Master, Université du Maine, 2005 (codirection avec Mondher Ayari).
4. Yun-Kang Ahn, *L'analyse musicale computationnelle*, thèse en informatique, Ircam/Université de Paris 6, 2005-2009 (codirection avec Carlos Agon).
5. Leone Slavich, *Strutture algebriche e topologiche nella musica del XX° secolo*, tesi di laurea in matematica, Università di Pisa, 2010 (codirection avec Francesca Acquistapace).

1.4 La construction des canons rythmiques mosaïques (Tiling Rhythmic Canons)

Le problème de la construction de canons musicaux rythmiques réalisant un pavage de l'axe du temps a été à l'origine de mon intérêt pour le domaine des relations entre mathématiques et musique. Ce problème musical, dont j'avais commencé l'étude algébrique dans ma *tesi di laurea* (Andreatta, 1996), a donné lieu à de nombreux résultats et constitue l'un des axes de recherches autour duquel nous avons su fédérer une communauté de mathématiciens, informaticiens, théoriciens de la musique et compositeurs²³. Musicalement il s'agit de construire un canon rythmique, i.e. une forme musicale obtenue par

22. Les fiches en version bilingue (français et anglais) du glossaire sur la *Set Theory* sont disponibles en ligne à l'adresse : <http://www.termisti.refer.org/data/settheory/settheoryhome.html>

23. Voir en particulier l'adresse : <http://recherche.ircam.fr/equipes/repmus/mamux/IrcamTilingResearch.html>

translation temporelle d'un pattern rythmique, ayant la propriété de réaliser un pavage de l'axe du temps. Le pattern rythmique, translaté un nombre fini de fois, pave l'axe des entiers de telle façon que chaque instant du temps est rempli par une (et une seule) pulsation du rythme de base. Nous avons montré la pertinence musicale d'une telle technique compositionnelle, dont on peut faire remonter l'origine aux expériences d'Olivier Messiaen autour de ce qu'il appelle « désordre organisé » (Messiaen, 1949-1992). La figure suivante (Fig. 1.12, à gauche) montre un exemple d'un canon rythmique construit à partir de juxtapositions de rythmes palindromiques produisant une forme globale dans laquelle, selon Messiaen, « les différentes sonorités se mélangent, jamais au même moment ni au même endroit », ce qu'il appelle un « pavage » en mathématiques et qui nous a suggéré d'appeler de telles constructions musicales des « canons rythmiques mosaïques » (Fig. 1.12, à droite). En réalité la propriété du pavage de l'axe du temps n'est pas respectée car la juxtaposition des rythmes palindromiques utilisés pour construire la voix rythmique de base du canon ne permet pas d'éviter les superpositions entre les voix.

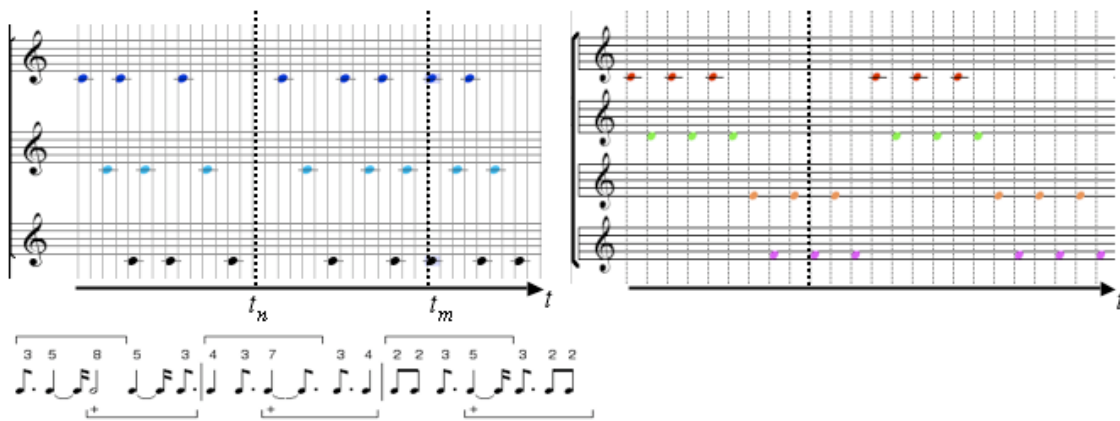


FIGURE 1.12 – Canon rythmique employé par Messiaen dans la pièce *Harawi* pour piano et voix (gauche) et véritable canon rythmique mosaïque réalisant un pavage de l'axe du temps (à droite).

Formellement la construction d'un canon rythmique mosaïque est équivalente à la donnée d'une factorisation d'un groupe cyclique $\mathbb{Z}_n$ en deux sous-ensembles A et B , le premier représentant le pattern rythmique de base et le deuxième les instant où les différentes voix du canon entrent, l'une après l'autre. Compte tenu des propriétés de ces deux facteurs, nous avons proposé la typologie suivante pour la famille des canons rythmiques mosaïques :

1. **Type I** : les deux sous-ensembles A et B sont de sous-groupes de $\mathbb{Z}_n$;
2. **Type II** : l'un des facteurs est un sous-groupe ;
3. **Type III** : aucun des deux facteurs n'est un sous-groupe mais au moins l'un des deux correspond à un mode de Messiaen à transpositions limités (i.e. il possède la propriété d'invariance transpositionnelle) ;
4. **Type IV** : aucun des deux facteurs n'a la propriété d'invariance transpositionnelle.

Par exemple, le canon rythmique mosaïque de la figure précédente (partie droite) est du troisième type, les deux facteurs (de $\mathbb{Z}_{12}$) étant respectivement $A=\{0,2,4\}$ et $B=\{0,1,6,7\}$, ce deuxième étant un mode à transpositions limités, comme on peut le voir clairement par la « redondance » de sa structure intervallique, qui est égale à $(1\ 5\ 1\ 5)$.

Le mathématicien Dan Vuza a proposé dans une série d'articles parus dans *Perspectives of New Music* (Vuza, 1991-1993) un modèle de canon rythmique réalisant un pavage de l'axe du temps obtenu par factorisation d'un groupe cyclique en somme directe de deux sous-ensembles non-périodiques (que l'on a appelé par la suite « Canon de Vuza »). Notre recherche a été d'abord de replacer ce problème dans le cadre de la théorie des groupes de Hajós ou *good groups*, i.e. les groupes pour lesquels pour toute factorisation en somme directe de k sous-ensembles, au moins l'un de ces sous ensembles est périodique²⁴. Cela nous a permis de montrer les liens entre ce problème musical et la conjecture de Minkowski sur le pavage de l'espace n -dimensionnel par des cubes unité (Fig. 1.13) ainsi qu'une série d'autres conjectures dont certaines sont toujours ouvertes (telles la conjecture quasi-périodique de Hajós et la conjecture spectrale de Fuglede)²⁵.

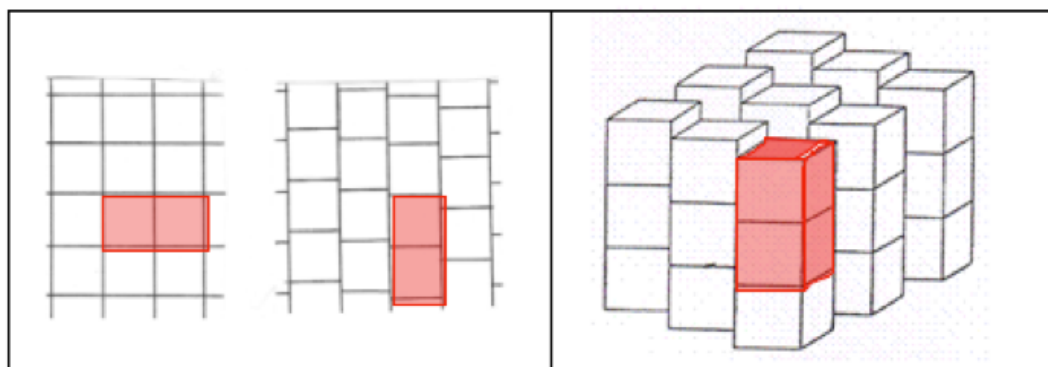


FIGURE 1.13 – Dans un pavage de l'espace n -dimensionnel par des cubes unités, il y a toujours au moins un couple de cube (en réalité une infinité) qui ont en commun une face entière de dimension $n-1$ (Conjecture de Minkowski).

Nous avons ensuite abordé les aspects computationnels en étudiant l'espace combinatoire des solutions pour une période donnée (i.e. par un ordre donné du groupe cyclique sous-jacent). Nous avons donné une classification exhaustive des solutions dans le cas de la factorisation du groupe cyclique $\mathbb{Z}_{72}$ en deux sous-ensembles non périodiques, cet ordre étant le plus petit pour un groupe n'ayant pas la propriété de Hajós. Cette classification

24. Un sous ensemble H d'un groupe G est périodique si $\exists$ un élément non nul $g \in G$, tel que $g + H = H$, ou bien, ce qui est équivalent, s'il existe un sous-groupe normal (non vide) K de G tel que $K + H = H$. Il est aisé de voir que dans le cas où G est un groupe cyclique, cette propriété correspond à l'invariance transpositionnelle.

25. A ce problème nous avons consacré un article dans l'*Ouvert* reprenant notre communication lors d'une journée « Musique et Mathématiques » organisée à Strasbourg par Athanase Papadopoulos et Xavier Hascher (Andreatta, 2007).

a été établie en suivant une approche « paradigmatique », i.e. basée sur l'utilisation de plusieurs groupes dont l'action sur les sous-ensembles R et S d'une factorisation permet de réduire de façon structurelle le catalogue des solutions. En particulier cette approche tient compte de l'action de trois groupes différents sur le groupe cyclique d'ordre 72, considéré en tant qu'ensemble : le groupe cyclique, le groupe diédral et le groupe affine. Le résultat surprenant que nous avons obtenu concerne la réduction du catalogue des solutions à deux seuls canons rythmiques mosaïques à une application affine près (Fig. 1.14).

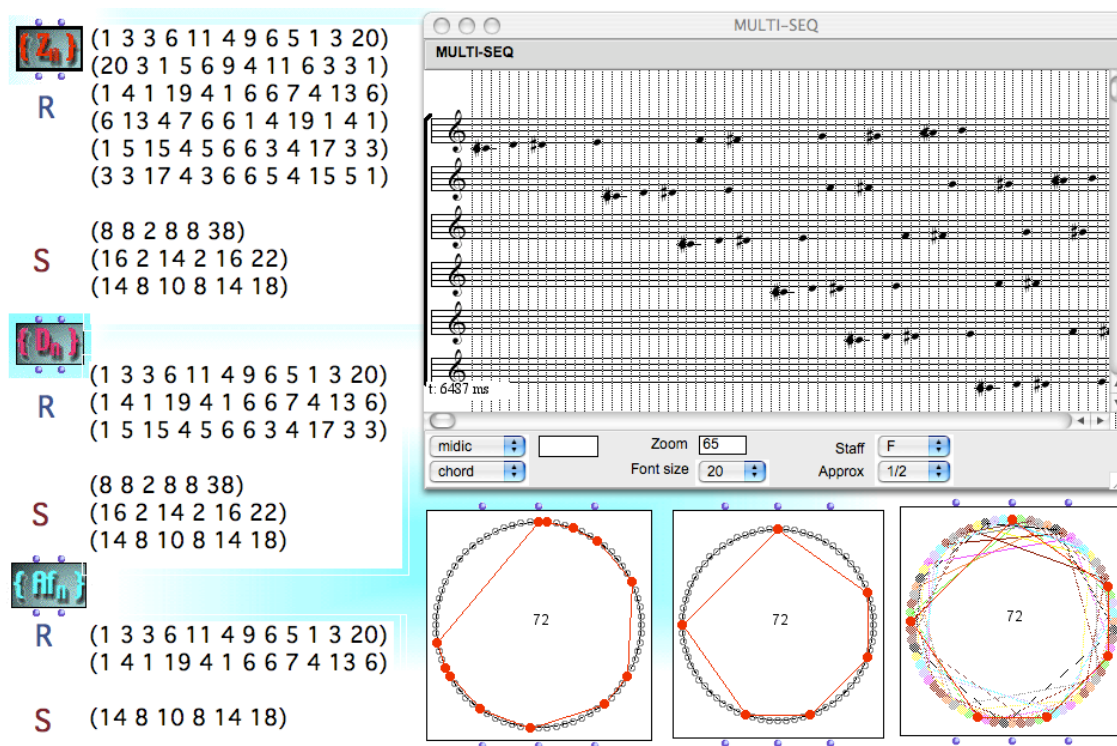


FIGURE 1.14 – Classification paradigmatique des canons de Vuza d'ordre 72 (à gauche) et exemple musical construit à partir de l'une des deux solutions possibles du problème de la factorisation du groupe cyclique $\mathbb{Z}_{72}$ en somme de deux sous-ensembles non-périodique (modulo une transformation affine).

Les canons de Vuza représentent des objets mathématiques remarquables car ils sont la clé pour la résolution d'une des plus importantes conjectures dans le domaine des pavages, la conjecture de Fuglede ou conjecture spectrale (Fuglede, 1974). Cette conjecture affirme qu'un domaine de l'espace euclidien n -dimensionnel admet un *spectre* ssi il pave $\mathbb{R}^n$ par translation. Sans perte de généralité, on peut tout d'abord ramener le cas du pavage de l'axe des réels au cas du pavage du groupe cyclique $\mathbb{Z}_n$. On peut ensuite montrer que s'il existe un sous-ensemble R de $\mathbb{Z}_n$ qui pave le groupe cyclique d'ordre n sans être spectral, alors R est essentiellement le rythme de base d'un canon de Vuza. D'où l'intérêt d'avoir une classification exhaustive des canons de toute factorisation d'un groupe cyclique non-Hajós en somme directe de deux sous-ensembles non-périodiques.

D'un point de vue musical, ce travail a fourni le modèle formel pour plusieurs compositions²⁶. Le travail mené avec le compositeur Georges Bloch, par exemple, est emblématique en ce qui concerne les directions parfois très inattendues qu'une recherche théorique peut prendre lorsqu'elle est soumise à la singularité de la pensée compositionnelle. Les enjeux de cette collaboration interdisciplinaire ont été présentés et discutés en détail lors d'un Workshop qui s'est déroulé à Dublin sous invitation de l'association *Seed* « Art & Science » et organisé sous l'égide de la Irish Royal Academy (Andreatta et Bloch, 2007). Le problème des pavages et mosaïques en musique est sans doute l'un des axes de recherche les plus actifs en théorie mathématique de la musique. L'un des objectifs des prochaines années sera d'impliquer un nombre croissant de mathématiciens travaillant sur le problème de la factorisation de groupes finis afin d'essayer d'apporter quelques résultats nouveaux en direction de la solution de la conjecture spectrale²⁷.

1.4.1 Direction de travaux d'étudiants sur ce sujet :

1. Hugues Zuber, *Vers une arithmétique des rythmes ?*, mémoire de magistère, ENS Cachan, 2005.
2. Giulia Fidanza, *Canoni ritmici a mosaico*, tesi di laurea, Università degli Studi di Pisa, Facoltà di SSMMFFNN, Corso di laurea in Matematica, 2008 (codirection avec F. Acquistapace, Univ. Pisa).
3. Edouard Gilbert, *Polynômes cyclotomiques, canons mosaïques et rythmes k -asymétriques*, mémoire de Master ATIAM, mai 2007.
4. Emmanuel Amiot, *Modèles algébriques et algorithmiques pour la formalisation mathématique de structures musicales*, thèse, université de Paris 6 / Ircam, 2010 (codirection avec Carlos Agon).

1.5 Théorie des suites mélodiques périodiques et calcul de différences finies

Cette technique musicale est à la base de la théorie modale²⁸ du compositeur roumain Anatol Vieru (1926-1998). Dans sa formulation originelle, une séquence modale est une succession ordonnée et finie d'éléments d'un groupe cyclique $\mathbb{Z}_n$. Dans le cas particulier du groupe

26. Pour les utilisations compositionnelles du modèle des canons de Vuza, voir à l'adresse : <http://recherche.ircam.fr/equipes/repmus/mamux/MusiqueVuza.html>

27. Pour une présentation des résultats les plus récents liés à la conjecture spectrale et aux canons de Vuza, voir Andreatta et Agon (2009).

28. Notons qu'il n'y a aucun lien avec les logiques modales. Il s'agit d'une technique compositionnelle basée sur la notion de mode que l'on peut prendre, dans ce contexte, comme un synonyme de gamme (ou échelle).

cyclique d'ordre 12, une telle séquence peut être interprétée comme un motif mélodique (les éléments étant les hauteurs) ou bien comme un motif rythmique (les éléments étant les points d'attaque du pattern rythmique, dans lequel on fait abstraction des durées)²⁹. A cette séquence, le compositeur applique un procédé de différences successives qui permet d'engendrer une première séquence « dérivée » dans laquelle chaque élément est obtenu en faisant la différence (modulo 12 ou modulo n en général) de deux éléments consécutifs de la séquence d'origine. Le compositeur réitère ensuite ce procédé de différence afin d'obtenir une série de séquences musicales qui seront toutes liées à la séquence de départ par itération de l'opérateur différence. Formellement une séquence modale est une application f de l'ensemble des entiers $\mathbb{Z}$ dans un groupe G abélien fini. Si l'on désigne par $G^{\mathbb{Z}}$ l'ensemble des suites à valeurs dans le groupe G et on considère le cas $G = \mathbb{Z}_n$, l'opérateur différence D transforme l'application f en l'application $Df(x) = f(x) - f(x - 1)$. La formalisation algébrique permet de donner une caractérisation générale de toute suite modale à travers deux grandes familles : les suites réductibles et les suites reproductibles. Une suite modale est dite *réductible* s'il existe un entier k tel que $D^k(f) = 0$. Elle est *reproductible* s'il existe un entier k tel que $D^k(f) = f$. Le résultat général que nous avons établi est un théorème de décomposition affirmant que toute séquence modale est décomposable de façon unique comme une somme d'une séquence réductible et d'une séquence reproductible (Andreatta et Vuza 2001). Un exemple d'application de ce théorème est montré en Fig. 1.15.

Il ne s'agit pas d'un résultat nouveau en mathématiques car on peut montrer que le théorème de décomposition est un cas particulier du Lemme de Fitting (qui vaut, plus en général, pour tout module M de longueur finie). On peut donc donner une version généralisée du théorème de décomposition (Andreatta *et al.*, 2004) mais dans ce cas il est difficile d'en donner une interprétation musicale. La formalisation algébrique que nous avons proposée de la théorie modale de Vieru a également l'avantage de permettre de donner de critères de réductibilité et reproductibilité pour les suites périodiques sans recourir au calcul explicite de ses dérivés. Par exemple on peut montrer que toute séquence de période p^n à valeur dans $\mathbb{Z}_p$ est réductible pour tout n positif ou bien que toute séquence de $p-1$ éléments à valeurs dans $\mathbb{Z}_p$ est reproductible, où dans les deux cas p est un nombre premier (Fig. 1.16).

Nous détaillons dans (Andreatta *et al.*, 2004) les algorithmes que nous avons intégrés dans *OpenMusic*, et qui ont permis également de mettre en lumière une série de problèmes ouverts pouvant constituer des points de départ intéressants pour des travaux futurs. Un premier problème consiste dans la caractérisation de la longueur du processus de dérivation pour les suites réductibles ainsi que pour celles reproductibles. Le deuxième problème est

29. Nous utilisons pour ce « transfert de structure » le modèle de rythme périodique proposé par Dan Tudor Vuza dans lequel un rythme périodique est défini comme un ensemble localement fini et périodique du groupe $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, ce qui permet d'établir un isomorphisme entre un sous-ensemble d'un groupe cyclique $\mathbb{Z}_n$ et un pattern rythmique (périodique).

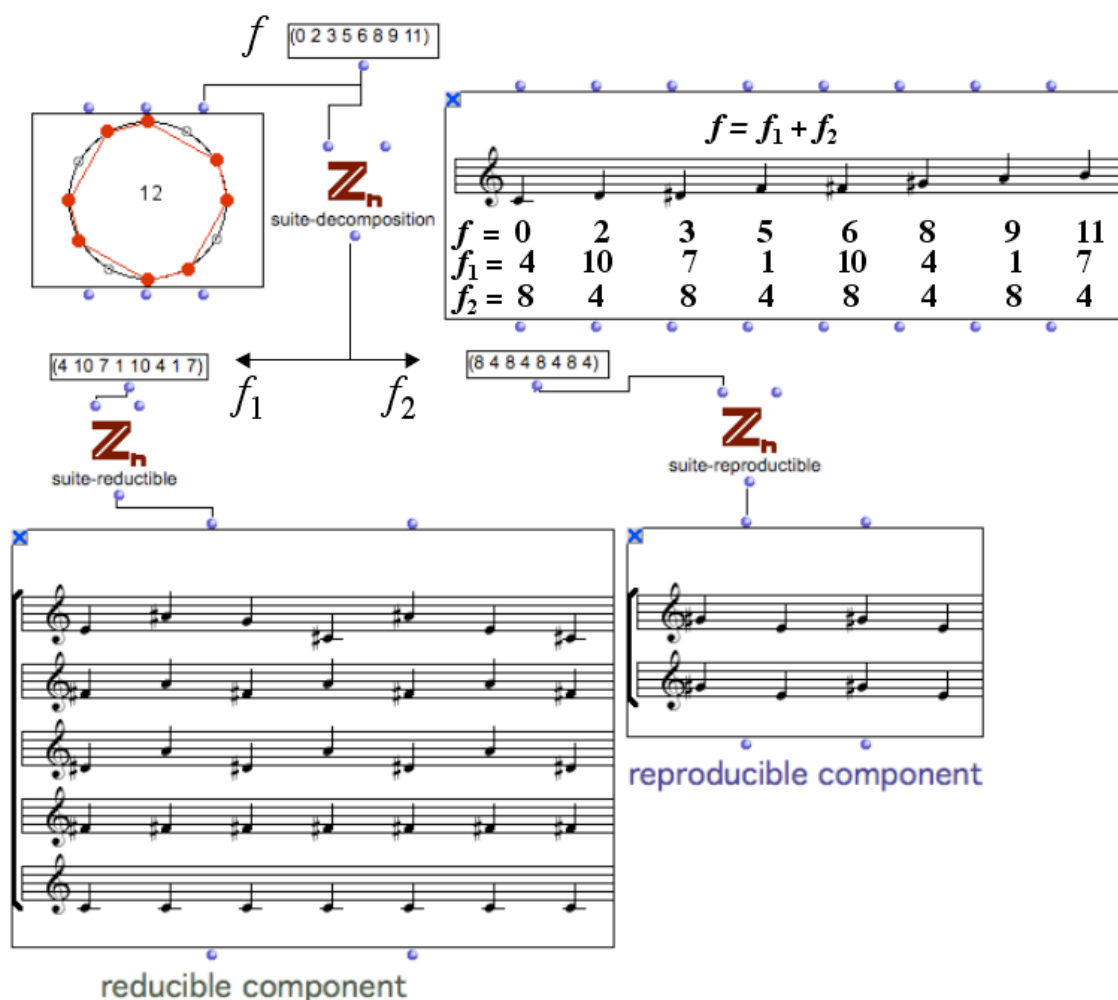


FIGURE 1.15 – Décomposition d’une séquence périodique f en somme d’une séquence réductible f_1 et reproductible f_2 .

plus profond et concerne le lien entre ce processus compositionnel et la théorie des canons rythmiques mosaïques (*tiling canons*). Il s’agirait ainsi de caractériser les deux facteurs de la décomposition d’un groupe cyclique (respectivement le pattern rythmique d’un canon et le pattern des entrées des voix du canon) comme des suites périodiques auxquelles on pourrait appliquer l’opérateur de différence finie. Le lien entre ces deux procédés musicaux reste conjectural, mais il pourrait constituer un point de départ pour un nouveau problème « mathémusical ».

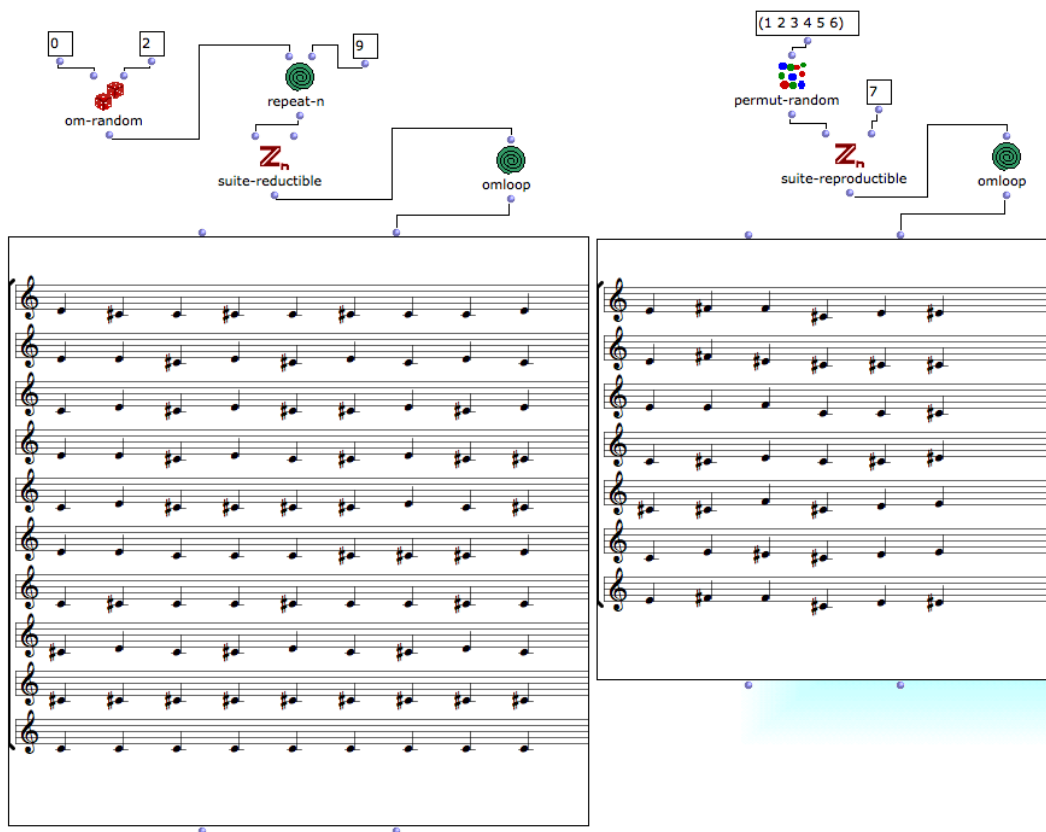


FIGURE 1.16 – Deux exemples d’application des critères de réductibilité et reproductibilité d’une séquence périodique respectivement de longueur 9 à valeurs dans $\mathbb{Z}_3$ (à gauche) et obtenue en prenant une permutation quelconque de la suite (1 2 3 4 5 6 7) et en calculant les différences successives dans $\mathbb{Z}_7$ (à droite)

1.6 La relation Z en musique, la DFT et la théorie des ensembles homométriques

En travaillant sur certains aspects combinatoires des structures musicales, plusieurs compositeurs et théoriciens de la musique ont essayé d’établir les bons *invariants* par rapport au problème de la classification « paradigmatique » (dans le sens de l’utilisation de l’action de différents groupes sur l’ensemble des parties d’un groupe cyclique $\mathbb{Z}_n$ et de la relation d’équivalence qui en découle).

Dans le problème de la classification d’accords modulo l’action du groupe diédral, l’outil de base est ce qu’on appelle le « contenu intervallique ». Etant donné un accord $A = \{0, a_1, a_2, \dots, a_k\} \subset \mathbb{Z}_{12}$, son contenu intervallique (indiqué par CI) est le multiset $CI(A) = [b_0, b_1, \dots, b_{11}]$ dans lequel l’élément b_i indique combien de fois l’intervalle de i demi-tons est contenu dans l’accord. Le contenu intervallique compte ainsi le nombre d’occurrences de chaque intervalle (de 0 jusqu’à 11) dans un accord. Comme l’a souligné David Lewin dans l’une de ses premières contributions théoriques à l’étude des propriétés

des ensembles de classes de hauteurs (Lewin, 1959), le contenu intervallique peut également s'exprimer comme un produit de convolution de fonctions caractéristiques d'ensemble, i.e. $CI(A) = 1_A \star 1_{-A}$.

Le contenu intervallique n'est pas un *invariant* dans le problème de la classification d'orbites par rapport à l'action du groupe diédral. En effet, deux accords qui sont dans la même orbite auront le même contenu intervallique mais il se peut que deux accords aient le même CI sans être dans la même orbite. C'est ce qu'on appelle la relation Z que l'on indiquera avec $\sim_Z$. Il s'agit d'une relation qui est musicalement pertinente, comme le prouve son utilisation consciente en composition de la part de nombreux compositeurs, de Milton Babbitt à Elliott Carter. La figure suivante montre un exemple parmi les plus célèbres de relation Z entre deux ensembles de classes de hauteurs (Fig. 1.17)³⁰.

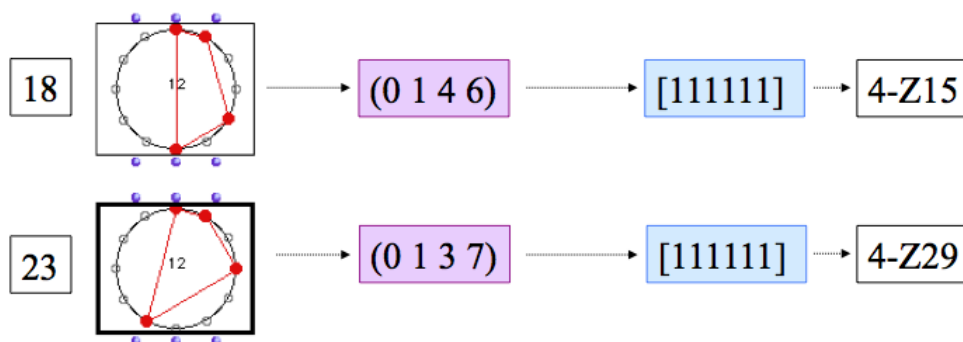


FIGURE 1.17 – Un exemple de relation Z entre deux ensembles de classes de hauteurs ayant la propriété de contenir tous les intervalles une et une seule fois. De tels ensembles de quatre notes sont appelés traditionnellement tétracordes tous-intervalles (*all-interval tetrachords*).

Comme nous l'avons mentionné, la musique d'Elliott Carter fait large usage de la relation Z . Par exemple dans plusieurs pièces des années 1990 Carter utilise en particulier un hexacorde ayant la propriété remarquable de contenir tous les 12 accords de trois notes (sous l'action du groupe diédral), d'où l'appellation *all-triads hexachord* (Fig. 1.18).

Il s'agit à nouveau d'une structure musicale en relation Z avec un deuxième hexacorde, les deux ayant été largement employé, par exemple, dans la pièce pour piano *90+*, comme nous l'avons pu montrer dans une ébauche d'analyse musicale computationnelle présenté lors d'un Colloque à l'Ircam à l'occasion du centenaire du compositeur³¹ (Fig. 1.19).

30. Nous utilisons la forme compacte du contenu intervallique appelée « vecteur d'intervalles » (*interval vector*), i.e. le multiset $VI(A) = [b_1, \dots, b_6]$ correspondant, effectivement, à une partie du contenu intervallique dans lequel les intervalles i varient entre 1 (intervalle de seconde mineure) et 6 (intervalle de triton).

31. Voir Andreatta *et al.* (2008). La première partie de cette conférence, contrée sur l'analyse computationnelle en *OpenMusic* de la pièce de Carter, est disponible à l'adresse : <http://recherche.ircam.fr/equipements/repemus/moreno/CarterMoreno.pdf>.

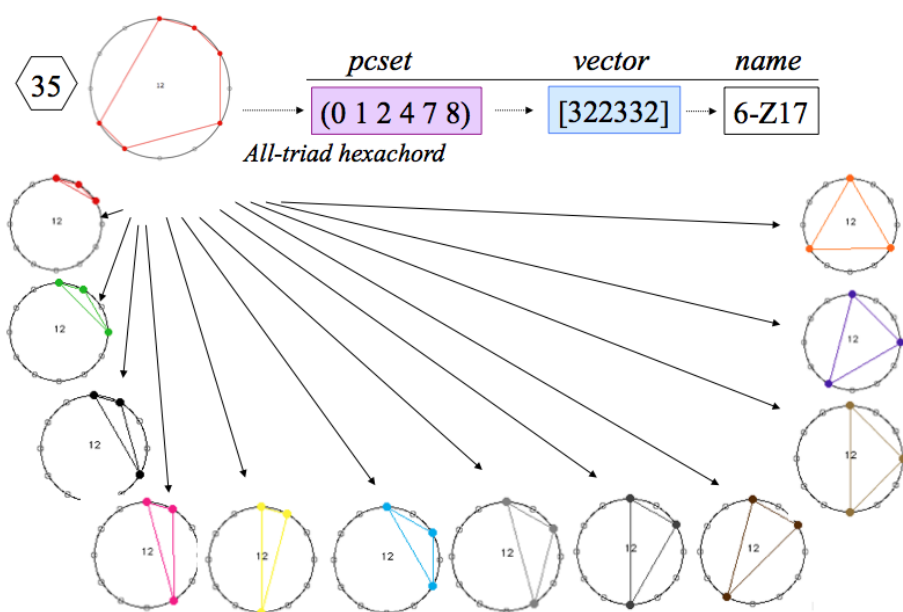


FIGURE 1.18 – Le seul hexacorde ayant la propriété de contenir toutes les orbites de cardinalité égale à trois (modulo l’action du groupe diédral). S’agissant d’une propriété concernant les orbites, l’inclusion doit être à son tour considérée à une transposition/inversion près.

D’un point de vue mathématique, la relation Z est un cas particulier de la théorie des ensembles homométriques, une théorie qui s’est progressivement éloigné des préoccupations initiales liées à la cristallographie pour constituer un domaine d’étude au croisement de la géométrie, l’algèbre et la théorie de l’intégration³². De plus, en introduisant la transformé de Fourier discrète (DFT) d’un sous-ensemble d’un groupe cyclique $\mathbb{Z}_n$, on arrive à une formalisation élégante de la relation Z (et donc des ensembles homométriques). Etant donné deux sous-ensembles A et B de $\mathbb{Z}_n$, $A \sim_Z B$ ssi les modules de la DFT de A et B coïncident. Ceci ouvre la question de la récupération de la phase (*phase retrieval*)³³ en théorie mathématique de la musique, autrement dit comment reconstruire une structure musicale (accord, pattern rythmique, ...) à partir de son contenu intervallique. Il s’agit d’un problème qui reste ouvert, comme d’ailleurs celui d’une énumération exhaustive de toutes les parties de $\mathbb{Z}_n$ en relation Z pour un tempérament égal donné³⁴.

Notre contribution dans ce domaine a été à la fois théorique et computationnelle. Dans un travail de recherche mené en collaboration avec John Mandereau (université de Pisa / Université Paris VI), Daniele Ghisi (compositeur), Emmanuel Amiot (mathématicien)

32. Nous remercions Mihail Kolountzakis pour nous avoir orientés vers la théorie de l’homométrie et le problème de la récupération de la phase. Pour une des premières caractérisations structurales des ensembles homométriques, voir Rosenblatt et Seymour (1982)

33. Voir Rosenblatt (1984).

34. Voir le mémoire de Master ATIAM de John Mandereau.

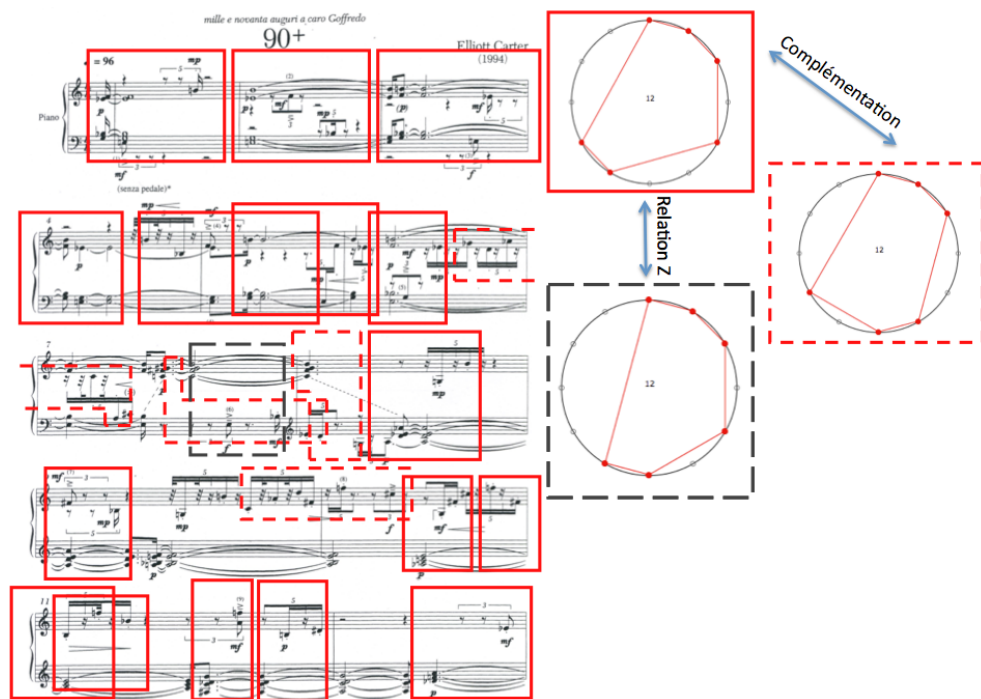


FIGURE 1.19 – Utilisation de l'« hexacorde toutes-triades » (en rouge) au début de la pièce pour piano *90+* d'Elliott Carter. Cet hexacorde, avec son homométrique (en noir pointillé) et son complémentaire (en rouge pointillé), recouvre presque totalement la première page de la partition.

et Carlos Agon (Ircam), nous avons placé la théorie de l'homométrie dans un cadre très général issu de la théorie de l'intégration de Lebesgue (Mandereau *et al.*, 2011). Ceci nous a permis de proposer une définition générale du problème de la récupération de la phase permettant également une étude computationnelle de la relation Z généralisée (ou relation Z^k). Par définition deux sous-ensembles A et B de $\mathbb{Z}_n$ sont en relation Z^k si toute orbite de cardinalité k (par rapport à l'action du groupe diédral) est contenue le même nombre de fois dans les deux sous-ensembles. La Fig. 1.20 montre le premier exemple de Z^4 -relation entre deux sous-ensembles du groupe cyclique d'ordre 36. Bien qu'indépendante du problème de la construction des canons rythmiques mosaïques, la relation Z a montré des intersections non triviales avec le problème du pavage de l'axe du temps qui feront sans doute l'objet d'études plus approfondies au cours des prochaines années. Pour donner un exemple d'une telle intersection, on peut citer un résultat dû à Emmanuel Amiot qui a montré que si $A+B$ est une factorisation du groupe cyclique $\mathbb{Z}_n$ et A est en relation Z avec un ensemble C , alors $C+B$ est à nouveau une factorisation du même groupe cyclique. Autrement dit, tout ensemble homométrique à un pattern rythmique réalisant un pavage de l'axe du temps par translation est à son tour un pavé³⁵.

35. Ce résultat découle directement de la formalisation des canons rythmiques mosaïques en terme de

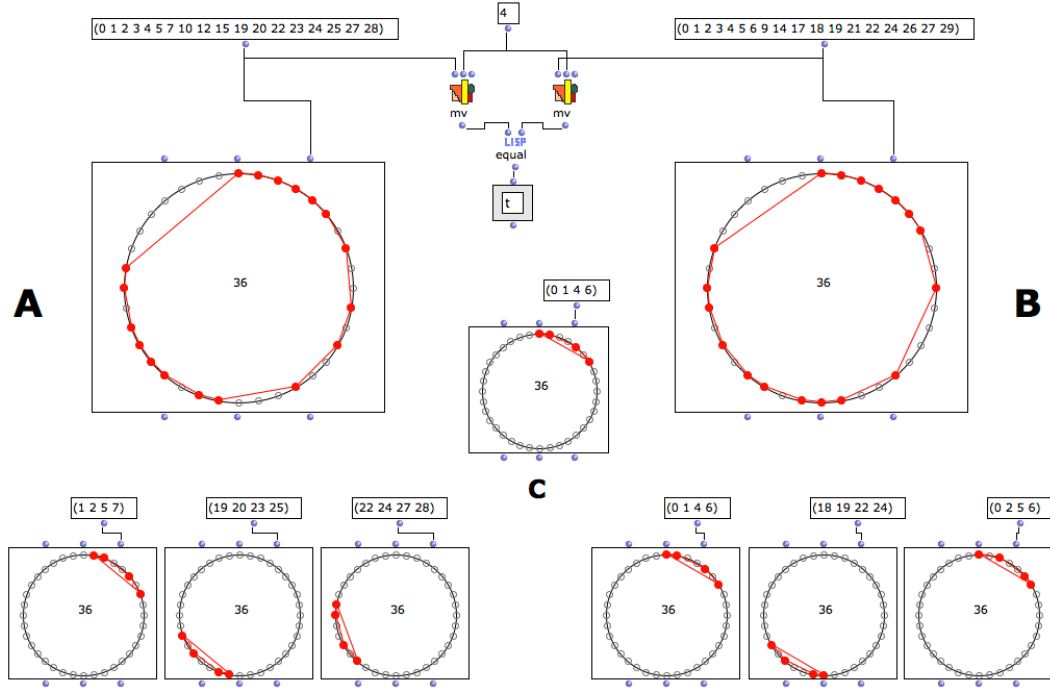


FIGURE 1.20 – Un exemple de relation Z^4 entre deux sous ensembles A et B de $\mathbb{Z}_{36}$ dans l'implémentation réalisée en *OpenMusic*. On peut montrer que les deux sous-ensembles A et B n'ont pas seulement le même vecteur d'intervalles mais ils sont en relation Z^k pour tout $k \leq 4$. Dans l'espace des 828 sous-ensembles de cardinalité égale à 4, on retrouve chaque orbite (e.g. celle correspondante au sous-ensemble C) le même nombre de fois (trois dans cet exemple) dans les deux sous-ensembles A et B (voir Mandereau *et al.* 2011).

1.6.1 Direction de travaux d'étudiants sur ce sujet :

1. John Mandereau, *Étude des ensembles homométriques et leur application en théorie mathématique de la musique et en composition assistée par ordinateur*. Mémoire de Master ATIAM, Ircam/Université Paris 6, juin 2009 (dir. M. Andreatta & C. Agon)
2. Guillaume Lachaussée, *Théorie des ensembles homométriques*, Stage de troisième année de l'Ecole Polytechnique, Master 1 de Mathématiques, juin 2010 (dir. M. Andreatta)

1.7 Les théories diatoniques et les ensembles maximalement repartis (*ME sets*)

Le problème de la généralisation des structures diatoniques traditionnelles (gammes majeures et mineures dans un système tempéré à douze degrés) a été envisagé à travers deux approches différentes : une approche de type géométrique et une deuxième basée

transformée de Fourier discrète, en utilisant la propriété que nous avons rappelé précédemment concernant l'équivalence entre contenu intervallique et produit de convolution de fonctions caractéristiques d'ensembles.

sur l'utilisation de la transformée de Fourier discrète. La première approche a été sollicitée par le musicien de jazz, Pierre Audétat, dans le cadre d'une collaboration entre l'équipe Représentations Musicales de l'Ircam et le Conservatoire de musique de Lausanne. Le point de départ est la « cloche diatonique », une nouvelle représentation géométrique des gammes de 7 notes proposée par Audétat en s'appuyant sur ses techniques d'improvisation. Dans ce modèle les 66 gammes heptatoniques et les 462 modes qui leur sont associés sont disposés autour de la note *ré* comme centre de symétrie en donnant lieu à un espace géométrique à forme de cloche (Fig. 1.21).

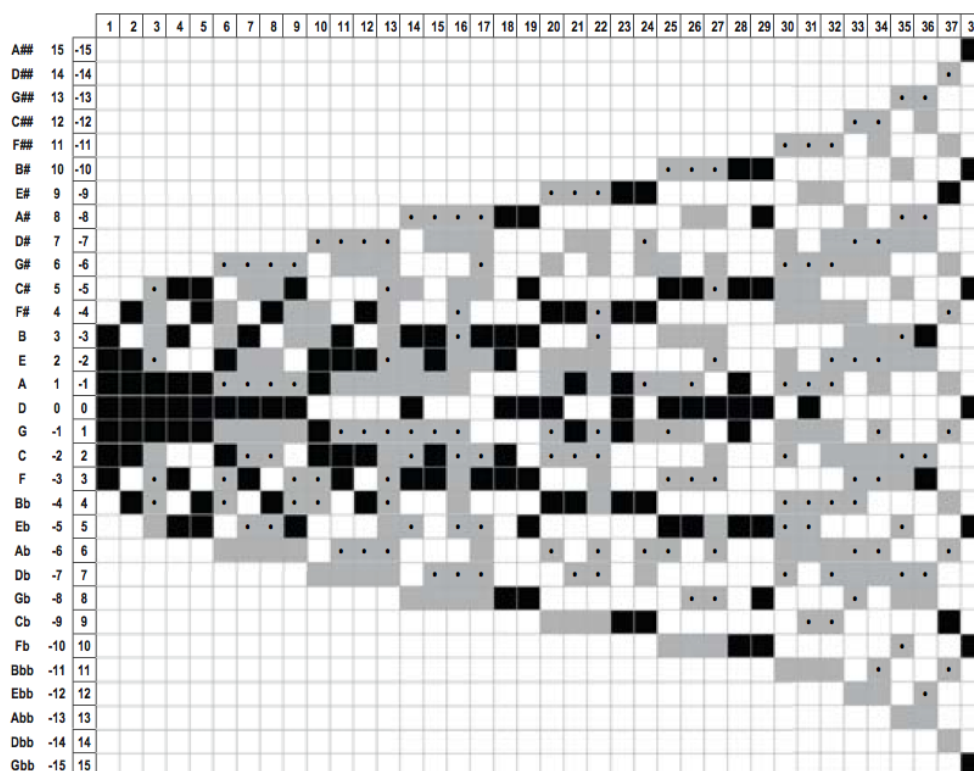


FIGURE 1.21 – ©Pierre Audétat. Dans son modèle originel de la cloche diatonique (Audétat 2006), chaque cellule représente une note et le mode de la gamme qui a cette note comme point de départ. Chaque colonne contient une orbite par rapport à l'action du groupe diédral correspondante soit à une gamme symétrique par inversion (cellule noire) ou bien à un couple de gammes en rapport d'inversion l'une par rapport à l'autre (respectivement cellules grises et cellules grises avec un point au milieu). Le nombre d'altérations (dièses et bémols) augmente en passant de la gamme diatonique (première colonne à gauche) à celle chromatique (dernière à droite). L'axe de symétrie horizontal de la cloche diatonique est constitué par la note *ré*. L'axe vertical dispose les notes à intervalles de quintes ascendantes et descendantes.

A la suite d'une étude systématique du caractère diatonique des 66 gammes heptatoniques réalisé par Julien Junod dans le cadre de son stage de Master ATIAM (Junod 2008), un modèle informatique de la cloche diatonique a été proposé et intégré en *OpenMusic* en

généralisant le cas des gammes heptatoniques dans le système tempéré traditionnel à celui des gammes de cardinalité k dans une division de l’octave en n parties égales³⁶.

L’un des premiers problèmes théoriques que l’on s’est posé dans la généralisation des théories diatoniques à d’autres divisions de l’octave a été celui de caractériser pour tout entier k la gamme jouant le rôle de la gamme diatonique dans le nouveau système micro-intervallique. Une telle gamme correspond à un ensemble « maximalement reparté » (ou *maximally-even set*, en abrégé *ME-sets*) dans la tradition « set-théorique » américaine³⁷. En nous appuyant sur la formalisation des *ME-sets* à l’aide de la transformée de Fourier discrète, proposée par Emmanuel Amiot (2007), nous avons étudié les aspects computationnels dans le problème de la classification des gammes diatoniques généralisées. À l’aide de cette approche nous avons pu, par exemple, donner une justification théorique à l’utilisation par l’un des plus célèbres compositeurs microtonaux, Ivan Wischnegradsky, d’une gamme jouant, selon lui, le rôle de la gamme diatonique traditionnelle mais dans le système de division de l’octave en quart de tons (i.e. en 24 parties égales). Cette gamme de 13 notes est, en effet, celle associée à la meilleure distribution de 13 points sur un cercle divisé en 24 parties. En terme de transformée de Fourier, cette gamme est celle dont le modulo de la DFT calculé en correspondance de la valeur 13 est maximal par rapport au modulo des DFT de tout sous-ensemble A de $\mathbb{Z}_{24}$ de 13 notes toujours calculé en correspondance de la valeur 13 (Fig. 1.22).

Le modèle informatique que nous avons intégré dans *OpenMusic* a également ouvert la voie à une nouvelle classification des structures musicales de type non-paradigmatique, i.e. une classification qui n’est pas basée sur une action préalable d’un groupe (tel le groupe cyclique, diédral, affine ou tout autre groupe musicalement pertinent) sur un espace tempéré égal quelconque $\mathbb{Z}_n$. Cette approche ouvre des questions liées à la pertinence de ce type d’outils théoriques par rapport à la perception musicale, comme nous le montrerons dans la deuxième partie de ce mémoire.

1.7.1 Direction de travaux d’étudiants sur ce sujet :

1. Julien Junod, *Etude combinatoire et informatique du caractère diatonique des échelles à sept notes*, Mémoire de Master ATIAM, Ircam/Université Paris 6, juin 2008.

36. Voir Junod *et al.* (2009). Un atlas interactif permettant la visualisation des différentes cloches diatoniques ainsi que l’écoute des 462 modes traditionnels dans la division de l’octave en 12 parties égales est disponible à l’adresse : <http://www.diatonique.ch/>

37. Voir Clough & Douthett (1991) pour une présentation « classique » de la théorie des *maximally even sets* et Douthett (2008) pour une discussion de cette approche depuis la perspective des systèmes dynamiques.

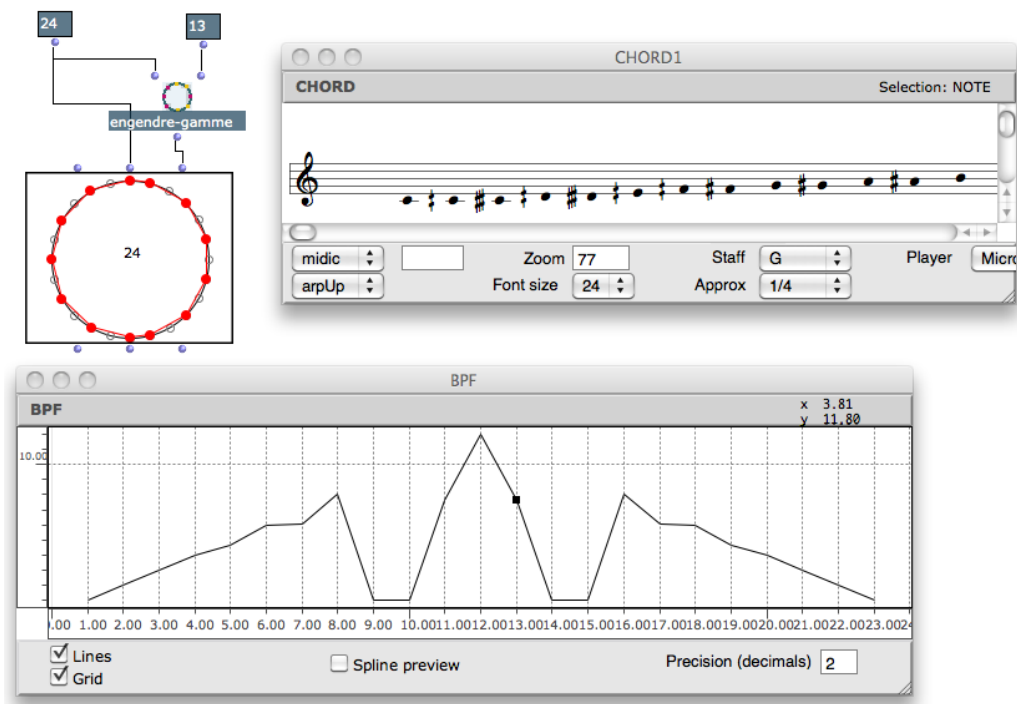


FIGURE 1.22 – Gamme diatonique généralisée d'ordre 13 dans le système de division de l'octave en quarts de tons. Cette gamme représente la meilleure distribution de 13 points sur un cercle divisé en 24 parties égales. Le graphique en bas montre que la cardinalité 13 constitue une valeur pour laquelle le modulo de la DFT est parmi les plus élevés, en deuxième position après celui correspondant à un ensemble de 12 éléments (le polygone régulier de 12 coté inscrit dans le cercle divisé en 24 parties).

1.8 Block-designs et composition algorithmique

Mon intérêt pour la théorie combinatoire des block-designs est très récent et il est principalement le fruit d'une collaboration avec un compositeur (Tom Johnson) et un théoricien/mathématicien de la musique (Franck Jedrzejewski). Le problème compositionnel posé par Tom Johnson et qui est à l'origine de l'application de la théorie des block-designs en musique est double car il concerne à la fois les propriétés combinatoires d'une collection d'accords mais aussi de nouvelles représentations graphiques issues d'une disposition spatiale de cette même collection. Du point de vue combinatoire, il s'agit d'étudier les possibilités de partitionner un ensemble de v éléments (représentant les notes musicales) en une collection de sous-ensembles d'une cardinalité donnée k (les accords de k notes) de telle façon que, par exemple, chaque couple de notes soit présent exactement en λ accords. Une telle partition représente un cas particulier de block-design traditionnellement noté par $2-(v,k,\lambda)$ ou, plus simplement, (v,k,λ) . Dans une définition plus générale et plus rigoureuse, un t -design $t-(v,k,\lambda)$ est une paire $D = (X,B)$ où X est un ensemble de v éléments et B est une famille de sous-ensembles de cardinalité k de X appelés *blocks* et pour laquelle tout sous-ensemble de cardinalité t de X est contenu en précisément λ blocks.

On retrouve souvent de problèmes combinatoires de ce type au sein de la tradition « set-théorique » américaine, en particulier dans la technique sérielle intégrale du compositeur Milton Babbitt³⁸. Ce qui est nouveau dans la démarche de Tom Johnson c'est l'attention du compositeur à l'espace combinatoire engendré par un block-design ainsi qu'aux multiples représentations d'un block design susceptibles d'être utilisées comme support pour le travail compositionnel. Prenons, par exemple, le cas du block-design $(6,3,2)$. On peut choisir de le représenter comme un graphe où les sommets sont les éléments de l'ensemble X (i.e. les nombres entre 0 et 5) ou bien un graphe dans lequel les sommets sont les 10 blocks qui constituent la collection de sous-ensembles de cardinalité égale à trois. Ces deux représentations duales sont données en Fig. 1.23.

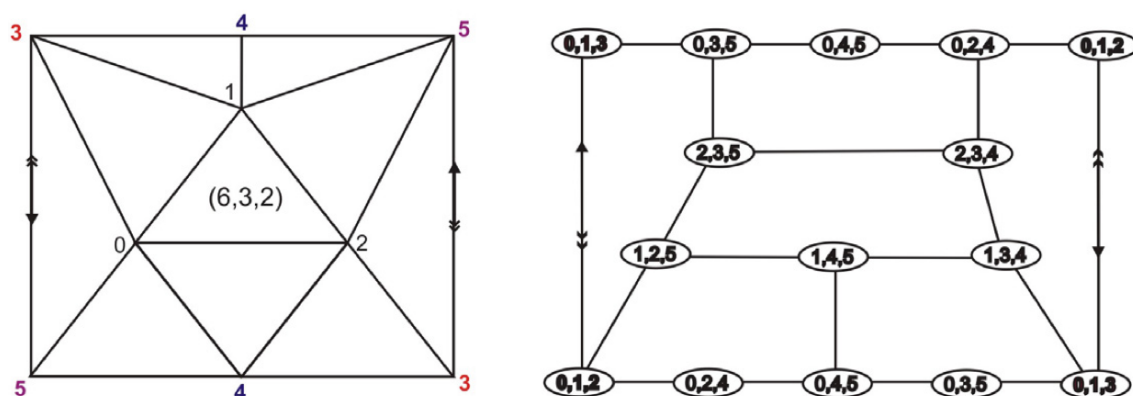


FIGURE 1.23 – Deux représentations duales du block-design $(6,3,2)$. Les côtés opposés de la représentation de gauche ainsi que de celle de droite doivent être identifiés dans le sens des flèches de telle façon que chaque triangle est voisin d'exactly trois triangles.

Un problème compositionnel qui découle tout naturellement de telles représentations graphiques concerne l'existence de circuits hamiltoniens, i.e. de chemins qui visitent tous les sommets du graphe en passant par chaque sommet une et une seule fois avant de revenir au point de départ, une propriété qui est triviale dans certains block-designs tels le plan de Fano (Fig. 1.24).

L'idée nouvelle proposée par le compositeur Tom Johnson est celle d'utiliser une représentation graphique d'un block-design dans laquelle deux blocks sont liés entre eux s'ils n'ont pas d'éléments en commun. Comme exemple considérons à nouveau le block-design $(12,4,3)$. Ses 33 blocks de cardinalité 4 peuvent être représentés à l'aide des trois structures hexagonales en Fig. 1.25.

C'est ensuite à partir de cette nouvelle représentation que le compositeur peut se poser des questions liées au caractère hamiltonien de certains parcours. Cette démarche théorique est à la base du processus compositionnel utilisé par Tom Johnson dans la troisième partie

38. Voir, en particulier, l'étude d'Alexander R. Bazelow et Frank Brickley sur un problème de partitions posé par Milton Babbitt (Bazelow et Brickley, 1976).

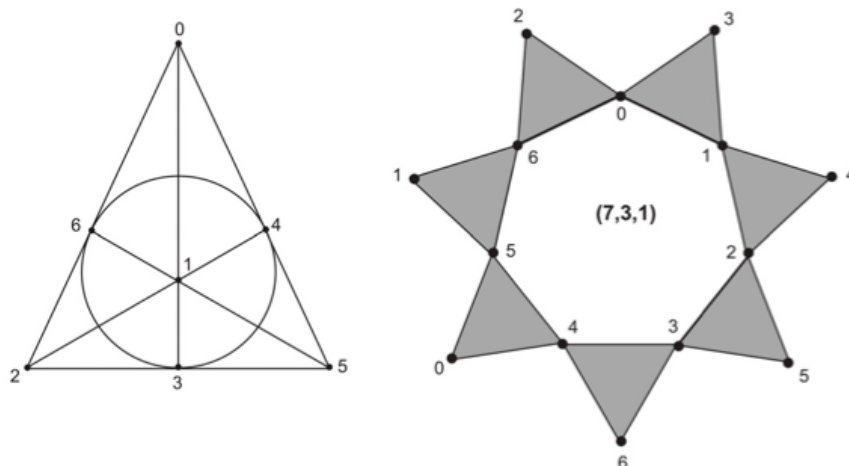


FIGURE 1.24 – Deux représentations du block-design $(7,3,1)$, appelé également Plan de Fano et dans lequel il y a exactement 14 circuits hamiltoniens, chaque circuit ayant comme point de départ l'un des 7 blocks de 3 éléments (figure à droite) et la direction pouvant être celle dans le sens des aiguilles d'une montre (ou bien celle dans le sens contraire).

de la pièce *Twelve for Piano* (2008). Dans cette pièce les douze éléments de l'espace de base X du block-design $(12,4,3)$ sont associés à la gamme non-octavante (i.e. dont la période n'est pas un multiple de l'octave) de la Fig. 1.26.

Le déroulement temporel de la pièce suit rigoureusement, selon les « dogmes » de la démarche algorithmique chère au compositeur, un chemin hamiltonien à l'intérieur de ce sous-block, comme le montre la Fig. 1.27.

L'application systématique de la théorie des block-designs en musique étant très récente, ils restent évidemment de nombreux problèmes ouverts, non seulement dans les aspects proprement compositionnels mais également en ce qui concerne l'étude théorique. Tout d'abord les block-designs étant de collections de sous-ensembles d'un espace de base, il semblerait naturel d'inscrire cette approche théorique à l'intérieur de la théorie des « compositions globales », une des constructions centrales de la théorie mathématique de la musique de Guerino Mazzola. Des outils traditionnels en théorie mathématique de la musique tels les nerfs d'un recouvrement de cartes locales, pourraient ainsi permettre une étude non seulement combinatoire mais également structurale de la théorie des block-designs dont certains problèmes, comme par exemple celui de la classification, à isomorphisme près, des block-designs qui sont « résolubles³⁹ » (*resolvable block-design*). En ce qui concerne les aspects computationnels, tels le calcul des parcours hamiltoniens dans un

39. Un block design est *résoluble* si ses blocks sont constitués d'union de blocks qui partitionnent l'ensemble de base X . Les nouvelles représentations graphiques que nous avons décrites précédemment offrent une piste pour approcher ce problème, comme le montre l'exemple de sous-block résoluble représenté en Fig. 1.25 (les trois triangles en couleur noir représentant la même partition – à une transposition près – du total chromatique).

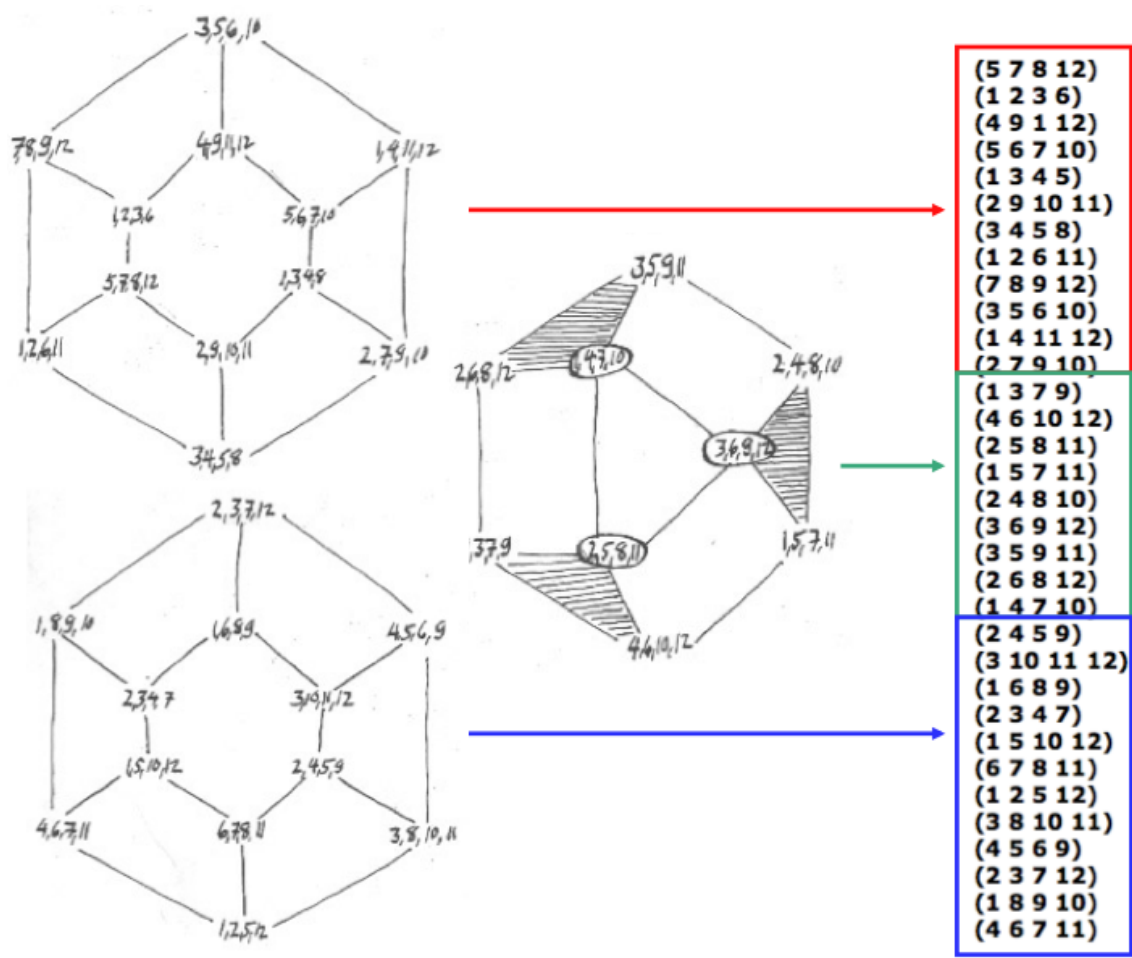


FIGURE 1.25 – Représentation du block-design $(12,4,3)$ sous la forme de trois graphes « hexagonaux » (dessins de Tom Johnson). Les trois triangles en noir dans l’hexagone au centre déterminent à leur tour une partition de l’espace de base du block-design, chaque triangle étant constitué de trois sous-ensembles de quatre éléments dont l’union est égale à l’espace X initial de 12 éléments.

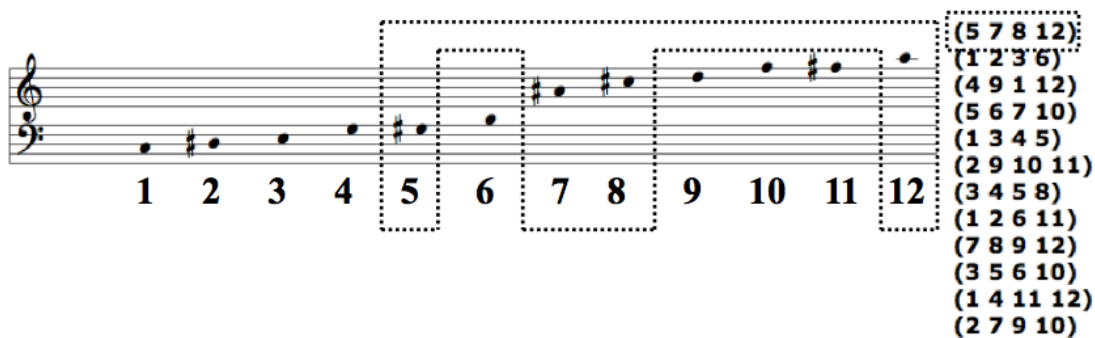


FIGURE 1.26 – Gamme non-octaviante utilisé dans la troisième partie de la pièce *Twelve for Piano* (2008) du compositeur Tom Johnson avec un exemple de correspondance entre les éléments de la gamme et les sous-ensemble du block-design $(12,4,3)$.



FIGURE 1.27 – Extrait de la partition *Twelve for Piano* avec mise en évidence du chemin hamiltonien qui détermine la succession temporelle des notes dans cette troisième partie de la pièce.

block-design, une piste intéressante à explorer consiste à placer la théorie des block-designs dans un espace géométrique et utiliser des approches informatiques issues, par exemple, de la programmation spatiale. (Bigo *et al.* 2010). Une telle démarche permettrait également d’inscrire l’utilisation des block-designs en musique dans une perspective plus large visant à caractériser la dimension proprement logique de l’activité de composition musicale. Nous reviendrons dans la deuxième partie sur cette problématique que nous essayons d’aborder à présent dans le cadre du projet exploratoire « Géométrie de l’interaction et musique ».

Deuxième partie

Interaction de la recherche mathémusicale avec les autres disciplines

La recherche en mathématiques/musique touche naturellement à plusieurs domaines, comme nous avons pu le constater tout au long des dix années d'existence du séminaire MaMuX (Mathématiques/Musique et relations avec d'autres disciplines) de l'Ircam. Ce séminaire a été le lieu principal dans lequel nous avons approfondi ces liens, en particulier en ce qui concerne les interactions de la recherche mathémusicale avec trois disciplines : les sciences cognitives, l'informatique et la philosophie. Dans cette deuxième partie nous allons présenter les résultats que nous avons obtenus dans chaque domaine en soulignant les rapports étroits avec l'activité de recherche que nous avons décrite dans la partie précédente.

2.1 Mathématiques/Musique et Cognition

Ces recherches cognitives s'inscrivent dans le cadre du groupe de travail « Mathématiques/Musique et Cognition ¹ » que nous avons coordonné sous l'égide de l'AFIM (Association française d'Informatique Musicale). Ce domaine fait désormais officiellement partie des axes de recherche de l'UMR STMS de l'Ircam/CNRS. Le groupe de travail sur les aspects cognitifs de la recherche en mathématiques/musique est né d'une volonté de rassembler deux communautés qui n'ont pas l'habitude de dialoguer : celle des théoriciens mathématiciens de la musique d'un côté et celle des chercheurs en psychologie expérimentale et en neurosciences de l'autre. En effet, dans un domaine de recherche ayant connu depuis une dizaine d'années des développements tout à fait remarquables, en particulier grâce aux modèles formels proposés en théorie mathématique de la musique, une scission s'est produite avec d'autres démarches systématiques, en particulier celles plus orientées vers la cognition et la perception musicales ². L'un des objectifs de ce projet était donc de renouer le dialogue entre « musicologie computationnelle » et « musicologie cognitive » à partir des enjeux théoriques posés par la recherche « mathémusicale » et du rôle central joué par l'informatique dans le processus de modélisation (Fig. 2.28).

Initialement, nous avons prévu de concentrer notre réflexion sur deux paradigmes analytiques majeurs en musicologie computationnelle : les approches « set-théoriques » d'un côté (à partir de la *Set Theory* d'Allen Forte jusqu'à la théorie transformationnelle de David Lewin et Henri Klumpenhouwer ³), et les théories génératives et grammaticales de la musique (en particulier la théorie générative de Fred Lerdahl et Ray Jackendoff ⁴). De même que pour les approches set-théoriques, la théorie générative de la musique tonale

1. Voir : <http://recherche.ircam.fr/equipes/repmus/mamux/Cognition.html>

2. Pour se rendre compte d'une telle difficulté de dialogue, il suffit de parcourir les ouvrages de référence de la musicologie cognitive dans lesquels on ne trouvera que très rarement une référence aux approches formelles en théorie mathématique de la musique. Voir, par exemple, Leman (1997).

3. Voir le premier des problèmes mathémusicaux que nous avons décrits dans la première partie.

4. Lerdahl et Jackendoff (1983).

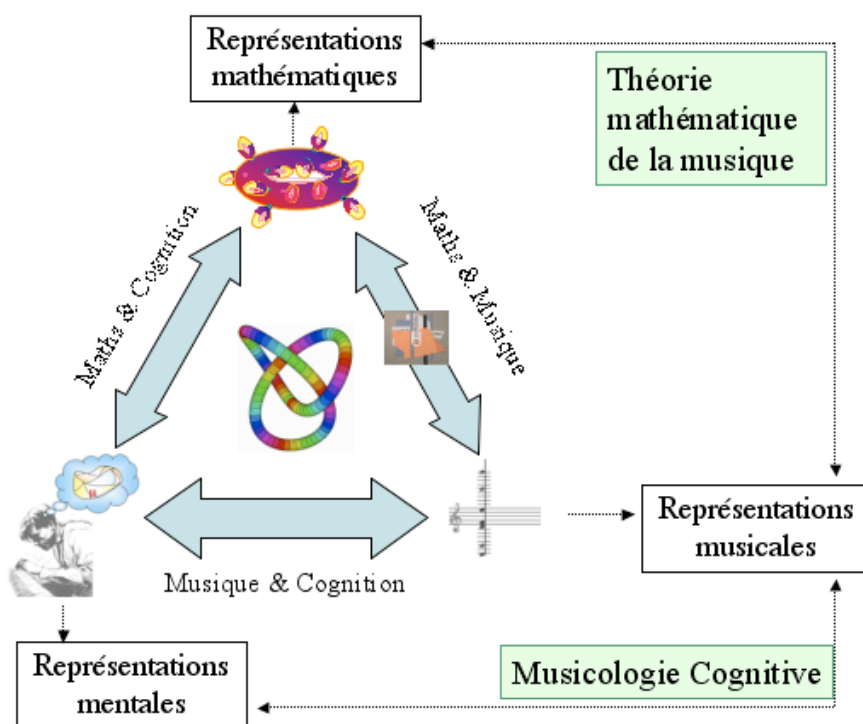


FIGURE 2.28 – Le domaine des rapports entre mathématique, musique et cognition comme un nœud exprimant la relation étroite entre sciences cognitives de la musique, théorie mathématique de la musique et mathématiques de la cognition. Musicologie cognitive et théorie mathématique de la musique se rejoignent autour de la notion de représentations musicales.

de Lerdahl et Jackendoff peut également être formalisée de façon extrêmement élégante à l'aide des méthodes algébriques, les grammaires formelles pouvant être décrites en termes de structures « faibles » (les monoïdes). Dans les deux cas, la formalisation algébrique soulève une série de questions qui nous semblaient tout à fait centrales dans un projet de recherche sur Mathématiques/Musique et Cognition. Compte tenu de leur portée générale, qui ne se limite pas aux deux approches analytiques initialement envisagées, nous allons reprendre ces questions en les replaçant dans le contexte des recherches que nous avons menées au sein de ce groupe de travail.

1. Quels sont les rapports entre des théories mathématiques sous-jacentes à des approches analytiques et quels sont les langages de programmation qui implémentent ces approches théoriques ? Autrement dit, quelles conséquences peut-on tirer dans le domaine de la cognition et perception musicales des rapports que l'on peut mettre en évidence entre le calcul algébrique et le calcul en informatique ?
2. Quelle place pourrait occuper une recherche « mathémusicale » dans l'espace des disciplines qui constituent les sciences cognitives ? Quels modèles cognitifs s'adaptent le mieux pour rendre compte de l'approche algébrique en musique ?

3. Quelles études comportementales relevant de la psychoacoustique et de la psychologie cognitive pourraient permettre de tester la « perceptibilité » des modèles algébriques et des grammaires artificielles en analyse et composition musicale ? Peut-on envisager d'étudier le problème des émotions en musique contemporaine à partir de théories comme celles des groupes, des grammaires formelles, des catégories ou des topoï ?

Ces trois questions demandent tout d'abord que l'on puisse identifier les difficultés qui sont propres à chaque discipline afin de pouvoir bâtir un véritable dialogue multidisciplinaire. S'agissant d'une interaction entre trois disciplines⁵, il est tout à fait naturel que certaines passerelles soient plus faciles que d'autres. Le dialogue entre mathématiciens théoriciens de la musique et informaticiens ne pose pas de problèmes particuliers, vu la nature « computationnelle » de l'objet d'étude et des méthodes utilisées. Beaucoup plus délicat et difficile était, a priori, le dialogue avec les sciences cognitives et les neurosciences, ce qui nous a obligé à orienter les activités du groupe de travail vers une direction différente de celle initialement envisagée.

Une analyse des rapports entre recherche musicale et sciences cognitives montre pourtant que la musique est le seul art qui constitue un objet d'étude en soi en neurosciences cognitives⁶. Dans ce champ de recherche, il n'y a, pour l'instant, que très peu d'études sur les approches mathématiques de la musique et l'activité cognitive⁷. C'est en s'appuyant sur la modélisation informatique des structures musicales, qu'il s'avère possible, comme nous allons le montrer par la suite, de mettre en évidence un certain nombre de problèmes qui sont de bons candidats pour l'étude des retombées cognitives et perceptives des méthodes algébriques. Dans l'approche algébrique en musique il y a une articulation permanente entre le processus de formalisation des structures musicales et le choix des possibles représentations géométriques⁸. À partir de cette articulation opératoire entre formalisation algébrique et représentation géométrique, le problème se pose de la pertinence perceptive des transformations algébriques qui sont à la base des approches qui relèvent de ce qu'on appelle la « tradition américaine », ce terme incluant à la fois la *Set Theory* d'Allen Forte, les théories diatoniques ainsi que la théorie transformationnelle de David Lewin. Curieusement, depuis les années quatre-vingt, très peu de recherches ont été menées pour étudier les retombées cognitives et perceptives des approches set-théoriques et

5. Mathématiques/musique (ou musicologie computationnelle), informatique musicale et psychologie expérimentale (ou, plus généralement, les sciences cognitives).

6. Peretz et Zatorre (2003).

7. Les rares tentatives dans cette direction sont issues des constructions formelles proposées par des théoriciens de la musique travaillant sur les méthodes mathématiques en analyse musicale. Voir, en particulier, l'interprétation phénoménologique que David Lewin a initialement donné à son « système généralisé d'intervalles » (Lewin, 1986), une construction théorique qui a été ensuite appliquée en analyse musicale en relation avec des résultats de la psychologie expérimentale (Lewin, 1993).

8. Chemillier (1990) et Andreatta (2003).

transformationnelles en analyse musicale⁹. De même, les tentatives d'appliquer la théorie des grammaires génératives pour l'analyse des musiques qui ne sont pas basées sur la notion de tonalité (musique sérielle, musique atonale, etc.), en créant ainsi des passerelles vers les approches algébriques en musique, sont restées programmatiques¹⁰.

Dans le cadre d'un Symposium organisé en collaboration avec Irene Deliège de l'ES-COM (société européenne des sciences cognitives appliquées à la musique) à l'occasion du 25^e anniversaire de publication de l'ouvrage *A Generative Theory of Tonal Music* (Lerdahl et Jackendoff, 1983), nous avons essayé de confronter cette approche théorie aux modèles formels en théorie mathématique de la musique, grâce en particulier à une présentation détaillée de Thomas Noll s'appuyant sur une analyse de la notion de *well formedness* telle qu'on retrouve dans la perspective « générative » de GTTM (*Generative Theory of Tonal Music*) d'abord et de TPS (*Tonal Pitch Space*) ensuite, ainsi que dans l'approche transformationnelle de l'école diatonique de la tradition set-théorique américaine¹¹.

La théorie diatonique est sans doute l'une des approches susceptibles d'une formalisation algébrique dont les liens avec la cognition et perception musicales ont été mis en évidence à la fois d'un point de vue théorique (Balzano, 1980 et 1982 ; Cross *et al.*, 1983), mais aussi de façon expérimentale (Van Egmond R. & Butler D., 1997 ; Cross 1997). Pour cette raison, une des journées d'étude avait été entièrement consacrée à une analyse des multiples facettes de la théorie diatonique, y compris dans ses développements récents en relation avec les grammaires formelles (au sens de la combinatoire algébrique des mots¹²) et la théorie des *maximally even sets*¹³. Comme nous l'avons vu dans la première partie, grâce aux travaux d'Emmanuel Amiot¹⁴, qui a formalisé une intuition de David Lewin (1959) reprise par Ian Quinn dans sa théorie générale de l'harmonie (Quinn 2006), la propriété de « maximal evenness » peut être désormais définie à partir de la transformée de Fourier discrète (DFT). Il y a donc un lien nouveau entre théorie générative de la musique tonale, grammaires formelles et transformée de Fourier qui reste à explorer. Nous avons consacré une journée de travail à une réflexion sur les aspects cognitifs et perceptifs de l'utilisation de la DFT en théorie mathématique de la musique. En plus de donner une

9. Voir, par exemple, Balzano (1982) et Lewin (1986).

10. Voir Lerdahl (1989). Dans son deuxième ouvrage (Lerdahl, 2001), l'auteur semble ouvrir des perspectives nouvelles allant bien au-delà du cadre traditionnel de la musique tonale, mais les outils théoriques proposés n'ont jamais fait l'objet d'études perceptives systématiques. Voir également Pineau et Tillmann (2001) pour une réflexion sur les modalités de généralisation au répertoire non-tonal des techniques existantes pour la perception des structures tonales.

11. Voir, en particulier, Carey & Clampitt (1989). La plupart des articles présentés lors du Symposium « Autour de la théorie générative de la musique tonale de Fred Lerdahl et Ray Jackendoff » ont été rassemblés dans un numéro spécial de la revue *Musicae Scientiae* (Andreata et Deliège, 2010).

12. Voir, par exemple, Noll (2008).

13. Voir le cinquième problème mathémusical décrit en première partie.

14. Voir en particulier Amiot (2007).

caractérisation élégante de la propriété de *maximal evenness*, la DFT s'applique plus en général à l'étude des propriétés structurelles des gammes musicales. Un projet en cours¹⁵ qui représente la suite naturelle des recherches que nous avons menées dans le domaine des hauteurs vise à étudier les aspects perceptifs de l'utilisation de la DFT dans la description structurelle du rythme.

Nous avons avancé l'hypothèse que la transformée de Fourier discrète, outre à représenter un outil privilégié dans le domaine de l'analyse et synthèse du son, peut également être utilisée pour caractériser de façon perceptive certaines propriétés des structures musicales dans le domaine du symbolique. A partir d'un catalogue de patterns rythmiques obtenu par « transfert de structure » du catalogue des 80 hexacordes à une transposition près, on analyse pour chaque structure musicale le degré de platitude de ses coefficients de Fourier. La figure suivante (Fig. 2.29). montre une sélection de quatre patterns rythmiques parmi les 80 possibilités offertes par le catalogue. Une analyse des valeurs des coefficients de Fourier pour chaque structure montre que les rythmes (a), (b) et (c) ont un comportement similaire en ce qui concerne la distribution des coefficients de Fourier (représentés dans la série des BPF en dernière colonne), à la différence du pattern (d) pour lequel les coefficients de Fourier se distribuent de façon différente, avec un point de maximum global correspondant à la valeur 6. Cette distribution des coefficients de Fourier est-elle pertinente d'un point de vue de la perception musicale ? Il s'agit à présent d'une hypothèse théorique qui ne pourra être validée qu'à travers la mise en place d'une série de tests d'écoute associés à de tâches de catégorisation, selon les protocoles traditionnels en psychologie expérimentale.

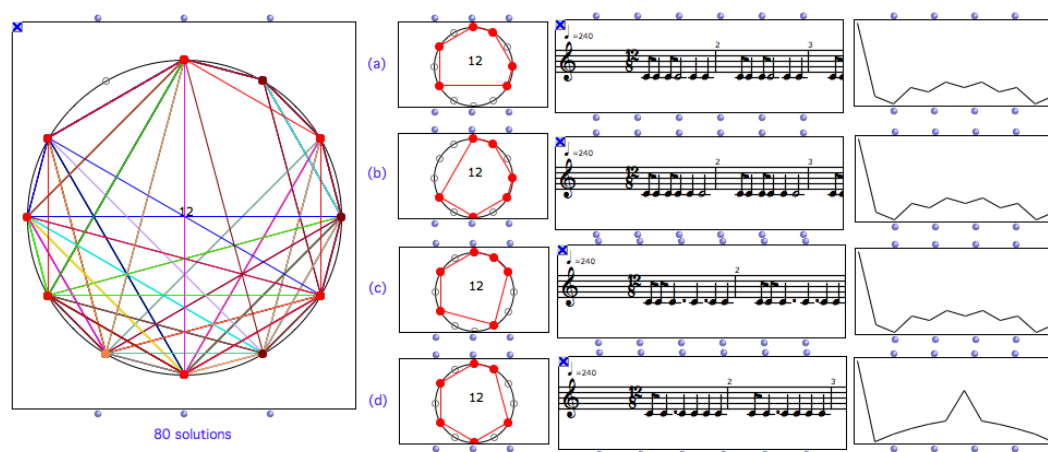


FIGURE 2.29 – Matériau de base pour un test de psychologie expérimentale essayant de dégager la pertinence perceptive de l'utilisation de la DFT dans une tâche de catégorisation des structures musicales.

15. Ce projet est réalisé en collaboration avec Isabelle Viaud-Delmon de l'équipe espaces acoustiques et cognitifs (Ircam/CNRS), Emmanuel Amiot et Carlos Agon.

2.1.1 Perspectives futures : vers un nouveau dialogue entre les neurosciences et la recherche « mathémusicale » ?

Dans son analyse consacrée aux liens entre mathématiques et neurosciences (Berthoz, 2005), Alain Berthoz¹⁶ propose une vision des mathématiques qui s'applique tout à fait à la réflexion que nous essayons de mener sur les liens entre mathématiques, musique et cognition. Si c'est indéniable que les mathématiques ont souvent été les protagonistes des tournants scientifiques en contribuant au même temps à des changements de paradigmes dans la connaissance (de l'invention du calcul infinitésimal à la géométrisation de la physique¹⁷), on peut imaginer que « dans les rapports des mathématiques aux sciences du vivant et de la cognition, nous sommes face à la possibilité d'un tournant comparable. Les neurosciences y sont au centre. Les enjeux sont si importants et originaux qu'il faut s'attendre à des changements de paradigme de grande envergure » (Berthoz, 2005, p. 178). On peut donc renverser la perspective traditionnelle, bien résumée par le mot du physicien Eugène Wigner quand il souligne « la déraisonnable efficacité des mathématiques » et partir des sciences cognitives, et en particulier des neurosciences intégratives, pour voir quels types de problèmes nouveaux se posent aux mathématiques, notamment via la musique. En effet, si d'un côté les mathématiques ont trouvé de plus en plus d'applications dans les neurosciences intégratives et cognitives, dans les dernières décennies, pour reprendre l'analyse de Berthoz, « les progrès dans ces disciplines sont en train d'enrichir les conceptions classiques de l'origine, des fondements et de la nature des mathématiques et de susciter des avancées nouvelles en mathématiques » (Berthoz, 2005, p. 177).

Bien que nous soyons encore loin de pouvoir imaginer un tel renversement de perspective à partir des problèmes posés par la cognition et perception musicale, nous avons pu constater, grâce à l'activité de notre groupe de travail, dans quelle mesure les mathématiques constituent un cadre privilégié pour l'étude de certaines fonctions cérébrales intégrées. Nous avons commencé l'étude d'une possible modélisation de l'activité neuronale à l'aide de la théorie mathématique des catégories (Eilenberg & Mac Lane, 1945) en suivant un modèle des « Systèmes Evolutifs à Mémoire » (ou SEM) proposé par Andrée C. Ehresmann et Jean-Paul Vanbremeersch. Ce modèle théorique avait été initialement conçu pour des systèmes naturels complexes tels les systèmes biologiques, sociaux ou culturels, et il a été ensuite étendu aux systèmes cognitifs (modèle MENS pour *Memory Evolutive Neural Systems*). C'est ce dernier modèle qui a fait l'objet d'une journée d'étude qui a montré, de façon plus générale, la pertinence de la théorie des catégories pour l'étude des systèmes

16. Avec la complicité de Daniel Andler, Daniel Bennequin, Jacques Droulez, Olivier Faugeras, Giuseppe Longo, Stéphane Mallat et Jean Petitot.

17. Et, on ajoutera, également de la logique et de l'informatique, un sujet qui a eu une forte expansion dans les dernières années et dont les retombées dans le domaine de la cognition constituent un terrain très riche pour la recherche interdisciplinaire. Voir à ce propos notre projet exploratoire « Géométrie de l'Interaction et musique », dans la section suivante.

dynamiques. C'est un point qui mérite d'être souligné, car on reproche souvent à cette théorie de négliger l'aspect temporel en privilégiant la notion de structure sur l'idée de processus¹⁸. La question sous-jacente au modèle MENS est celle de l'émergence des processus d'ordre supérieur du fonctionnement du cerveau ce qui découle de la modélisation des objets mentaux par des cat-neurones (neurones de catégorie), liant une multiplicité d'hyper-assemblées de neurones. Grâce à la modélisation catégorielle, il est possible de donner une formalisation du concept d'émergence, étroitement liée au processus de « complexification » par liage et classification (via colimites et limites projectives). Le modèle MENS montre comment des objets de complexité croissante peuvent émerger par une suite de complexifications, dès lors qu'un certain « principe de multiplicité » (ou *degeneracy* dans le sens de Edelman, 1989 ; Edelman & Gally, 2001) est vérifié.

Comme les auteurs l'ont souligné dans leur présentation détaillée du modèle MENS, ceci conduit à une « algèbre des objets mentaux » (au sens de Changeux, 1983), ce qui mène à la formation d'un invariant global, le noyau archétypal, confirmé par la découverte récente, dans le cerveau, du *neural connection core* (Hagmann *et al.*, 2008). Ce noyau archétypal intègre les expériences saillantes et/ou régulièrement ré-enforcées, à la fois sensibles, motrices, émotionnelles, procédurales et sémantiques. Ce sont des questions qui nous semblent pouvoir ouvrir des perspectives nouvelles dans l'étude de la cognition et perception musicales. Nous envisageons dans la suite des activités de ce groupe de travail la mise en place d'un protocole de recherche étudiant les processus cognitifs ainsi que les corrélats neuronaux du modèle MENS appliqué à la musique. Ceci touche à la fois à la notion de représentation géométrique et catégorielle des structures musicales mais aussi au concept même d'espace musical dont nous proposons d'étudier les rapports avec les neurosciences en s'appuyant sur les recherches les plus récentes autour de la réalité virtuelle¹⁹.

On aurait ainsi une piste nouvelle pour aborder un des axes de recherche initialement prévu dans les activités de ce groupe de travail, à savoir les retombées cognitives et perceptives du paradigme transformationnel en analyse musicale, à la fois dans la version de David Lewin mais aussi dans la démarche inaugurée par Henry Klumpenhouwer avec les *K*-réseaux (ou *K*-nets). En effet, si le paradigme « set-théorique » classique en analyse musicale repose finalement sur l'idée d'un catalogage de l'espace combinatoire des

18. Notons également que cette orientation « dynamique » propre à l'approche catégorielle a ouvert une nouvelle perspective dans la théorie mathématique de la musique de Guerino Mazzola. Si *Topos of Music* (Mazzola, 2002) est la *summa* de ce qu'on peut théoriser des aspects « hors temps » de la musique, pour reprendre la terminologie de Iannis Xenakis (1971/1992), d'autres constructions mathématiques se sont avérées nécessaires pour rendre compte de phénomènes musicaux basés sur le continu, tels les gestes musicaux. Comme dans le cas des systèmes évolutifs à mémoire, la théorie mathématique des gestes (Mazzola 2007 ; Mazzola et Andreatta, 2007) s'appuie sur une paramétrisation temporelle des structures catégorielles, ce qui pourrait avoir à son tour des retombées intéressantes en sciences cognitives.

19. Viaud-Delmon (2006).

structures de hauteurs (ou rythmiques) présentes dans une partition analysée²⁰, l'analyse transformationnelle implique un double mouvement. D'un côté on vise la construction d'une configuration abstraite d'objets musicaux (appelée « réseau transformationnel ») mais également, d'un autre côté, l'utilisation de cette architecture formelle permettant de dégager des critères de pertinence pour la réception de l'œuvre et pour son interprétation. Autrement dit, l'intérêt de construire un réseau réside dans la possibilité de l'utiliser, à la fois pour « structurer » l'écoute par rapport à la singularité de l'œuvre analysée mais également pour établir des critères formels qui pourront servir pour aborder le problème de son interprétation. La construction d'un réseau transformationnel ou bien d'un K -réseau s'appuie, en effet, sur une volonté implicite de l'analyste de rendre « intelligible » une logique musicale à l'œuvre dans la pièce analysée.

Cette démarche analytique possède à notre avis des implications théoriques tout à fait nouvelles pour les sciences cognitives, comme le suggère un rapprochement direct entre la théorie transformationnelle en analyse musicale et des nouveaux courants de la psychologie du développement, en particulier le néostructuralisme de Halford et Wilson (1980) et ceux qu'Olivier Houdé appelle les « derniers ajustements piagétiens » dans une approche catégorielle de l'épistémologie génétique (Houdé, 1993)²¹.

D'autres questions ouvertes, que nous nous proposons d'aborder dans les travaux futurs, concernent la pertinence des algèbres de dimension supérieure comme outils descriptifs et opérationnels tout d'abord en neurosciences (Brown & Porter, 2008; Brown & Porter, 2009) et ensuite dans le domaine de la cognition et perception musicales. On pourra également étudier la pertinence du transfert vers la musique d'une théorie générale du sens qui a été développé par René Guitart (2009) à la suite des travaux d'Ehresmann et Vanbremeersch sur les systèmes évolutifs à mémoire, dont nous avons indiqué les liens conjecturaux avec la musique. Ceci permettrait, à plus long terme, d'arriver à constituer un cadre conceptuel pour l'étude des relations entre mathématique/musique et cognition dans lequel pouvoir aborder des notions qui ont été traditionnellement associées à une démarche sémiotique, telle la notion du « sens » en musique, mais cette fois de façon indépendante de toute considération sur le langage et son rapport avec la musique. Un tel projet est au cœur de la thèse de doctorat de John Mandereau dans laquelle le modèle théorique MENS sera également abordé dans ses aspects logiques et

20. Et donc, in fine, à l'idée de symétrie et au concept d'invariance. Symétrie et invariance sont intimement liées à la structure mathématique de groupe, si bien qu'étudier la perceptibilité de la notion de symétrie et d'invariance en musique revient à étudier les effets cognitifs de l'action d'un groupe de transformation sur une structure musicale donnée (i.e. de l'approche « paradigmatique » décrite dans la première partie). Il s'agit d'une question qui touche directement aux questions philosophiques et esthétiques du rapport mathématique/musique. Voir, par exemple, Amiot (1991) et Hautbois (2006).

21. Voir Acotto et Andreatta (2008) ainsi que la discussion sur une démarche structurale en théorie mathématique de la musique dans la section consacrée aux interactions entre recherche mathémusicale et philosophie.

computationnels en vue d'une première application dans la modélisation des structures et processus musicaux.

2.1.2 Direction de travaux d'étudiants sur ce sujet :

1. John Mandereau, *Modélisation informatique des processus musicaux : une étude de la GdI et des SEM appliqués à l'informatique musicale* (titre provisoire), thèse de doctorat en mathématiques, Université de Pisa/Université de Paris 6 (codirection M. Andreatta)

2.2 Mathématiques/Musique et Informatique

Ces recherches s'inscrivent dans le cadre d'un projet exploratoire « Interactions Maths/ST2I » que nous coordonnons à présent²². Ce projet est né du constat qu'une dizaine d'années après le Forum Diderot 1999 « Mathématiques & Musique²³ », un événement qui a donné une impulsion majeure au domaine des relations entre musique et mathématique, les questions autour desquelles les organisateurs de la partie parisienne avaient centré le débat restent d'actualité, à savoir :

1. Quel est le rapport entre les logiques mathématiques et les logiques musicales ?
2. Les formalismes bâtis sur le « raisonnement » musical a-t-il quelque chose à voir avec tel ou tel formalisme de la logique ?
3. La logique mathématisée peut-elle aider les musiciens à clarifier la spécificité de leur mode de raisonnement ?

Le projet « Géométrie de l'interaction et musique » (GdIM) cherche à reprendre ces questions en explorant une nouvelle hypothèse en ce qui concerne la relation entre logique et musique, à savoir celle d'un lien étroit entre constructions mathématiques, dimension logique et calcul informatique.

Parmi les entreprises majeures qui ont accompagné la mathématisation de la logique au XX^e siècle, la logique linéaire et, plus récemment, la géométrie de l'interaction occupent une place tout à fait singulière, notamment en ce qui concerne le postulat de la primauté de la pensée mathématique sur la pensée logique. En contraposition explicite aux constructions logiques traditionnelles (des logiques non monotones aux logiques épistémiques), la géométrie de l'interaction de Jean-Yves Girard entreprend de refonder la logique en la formalisant dans le cadre de la géométrie contemporaine, à l'aide d'outils mathématiques tels les algèbres de von Neumann ou la géométrie non commutative d'Alain Connes, qui deviennent les fondements théoriques de la logique même, en induisant ainsi un véritable

22. Voir : <http://recherche.ircam.fr/equipes/repmus/mamux/PEPS-GdIM.html>

23. Assayag *et al.* (2002).

‘tournant géométrique’ dans la discipline²⁴. En d’autres termes, la logique n’est plus posée comme *constituante* des mathématiques, mais *constituable* à partir d’elles, ce qui comporte une remise sur pied de la dialectique mathématiques/logique, les premières servant de socle à la seconde (et non plus l’inverse). Cela entraîne, avant tout, une prise de distance par rapport au paradigme langagier qui a dominé la réflexion sur les fondements de la logique au cours du XX^e siècle. La logique n’est plus concentrée sur la question de la véridicité des énoncés mais il s’avère nécessaire d’aller au-delà de la conception ensembliste de la théorie des modèles qui présuppose l’existence autonome d’un modèle à partir de quoi se constitue une théorie selon une dualité du type syntaxe/sémantique.

Le projet GdIM explore les possibilités d’une réactivation de la logique musicale au moyen de la géométrie de l’interaction et des nouvelles perspectives que cette dernière ouvre dans l’informatique musicale. Si l’application de la géométrie de l’interaction à la musique et à l’informatique musicale reste conjecturale, il y a, cependant, dans une telle démarche des points qui nous semblent déjà très prometteurs. L’évolution de la théorie musicale au cours des dernières décennies indique clairement la présence d’une composante « algébrique » qui a accompagné progressivement les recherches liées à la modélisation, formalisation et représentations géométriques des structures musicales, aussi bien d’un point de vue théorique que dans les aspects liés à l’informatique musicale. L’application de la théorie des catégories et des topoï en musique et en informatique musicale, qui représente l’une des réussites majeures des théories mathématiques de la musique (Mazzola, 2002), n’a cependant pas contribué, sauf de rares exceptions²⁵, à ouvrir une véritable réflexion sur la dimension logique en musique. Dans la conception de Jean-Yves Girard, qui relègue l’approche de la logique par la théorie des catégories au « deuxième sous-sol » (ou niveau -2 de l’édifice conceptuel), la logique a affaire à la forme (à la « morphologie ») des raisonnements-démonstrations-déductions-développements vus comme jeux (dont les enjeux véritables ne sont pas logiquement pris en compte).

Le but essentiel – qu’il appelle « interaction » – est que la dualité à laquelle la logique a à faire (celle, par exemple des preuves et des formules) n’est plus conçue comme formalisation d’une réalité autonome préexistante et indifférente à cette formalisation mais comme autoengendrée par *polarisation*²⁶. Il découle de cette nouvelle approche de la logique que la preuve sera conçue comme espace de travail immanent et non plus comme ajustement à une véridicité exogène.

La musique nous semble offrir une excellente illustration des postulats sous-jacents

24. Cf. Girard (2006-2007). Pour une présentation didactique de ces questions mathématiques, en vue d’une première tentative d’établir des liens avec la musique, nous renvoyons à la présentation de Yves André dans le cadre de « l’école mathématique pour musiciens et d’autres non-mathématiciens » organisée par l’Ircam et l’ENS : <http://recherche.ircam.fr/equipes/repmus/mamux/EcoleYA.html>.

25. Voir, en particulier, l’intervention de Thomas Noll intitulée « Logics and Mathematical Music Theory », Séminaire *mamuphi*, 5 décembre 2009 (<http://www.entretiens.asso.fr/maths/>).

26. Au sens défini par Jean-Yves Girard dans le chapitre 12 du deuxième volume du *Point aveugle*.

à l'entreprise de Jean-Yves Girard. Par exemple, la question de la véracité ou de la véridicité d'une réalisation sonore par rapport à une partition n'est qu'une question secondaire, la vraie question étant celle de la « cohérence » du processus comme tel, de la procédure comme telle, de sa cohérence musicale, c'est-à-dire de son intérêt musical. L'aspect procédural de la géométrie de l'interaction, une fois transféré dans le domaine musical, pourrait ainsi emmener à concevoir le *sens* en musique comme une dynamique, à la différence des approches traditionnelles dans lesquelles la dimension sémantique de la musique serait indissociable du paradigme langagier sous-jacent, ce qui donne lieu à des discussions souvent stériles sur le rapport entre musique et langage. On serait ainsi face à un véritable « tournant géométrique » dans la logique musicale ²⁷.

En réalité, comme nous avons pu le constater à l'occasion de quatre séances du Séminaire MaMuX que nous avons organisé en 2009 dans le cadre des activités du projet GdIM, il y a plusieurs approches théoriques qui, avec la Géométrie de l'interaction, suggèrent la pertinence d'une démarche géométrique en informatique musicale ²⁸. Nous nous sommes concentrés, en particulier, sur le paradigme de la programmation spatiale ²⁹, un domaine que nous avons pu étudier en collaboration avec l'équipe « Informatique, Biologie Intégrative et Systèmes Complexes » (IBISC, FRE 3190), Université d'Evry Val d'Essonne, Genopole, dirigée par Jean-Louis Giavitto. Les travaux menés par ce groupe de recherche s'appuient sur diverses notions spatiales pour repenser la notion de structure des données et développer de nouvelles approches pour la programmation. Ces travaux mettent en avant le slogan « calculer = se déplacer » au lieu de la vision traditionnelle en logique selon laquelle calculer serait synonyme de démontrer. Ce changement de perspective s'apparente au projet de la géométrie de l'interaction car la programmation spatiale partage avec cette dernière la volonté de repenser le calcul de manière intrinsèque, en portant une attention toute particulière à la dynamique et aux représentations mathématiques géométriques. La programmation spatiale cherche ainsi à expliciter la notion d'espace dans les modèles de programmation soit parce que l'espace est vu comme une ressource, soit parce que l'espace est une donnée ou bien un résultat du calcul. L'équipe de J.-L. Giavitto a développé ce thème initialement pour la programmation parallèle (aller plus vite via le parallélisme de données) à travers le langage « 8 1/2 » et ensuite pour des problèmes de simulation (modélisation de la morphogenèse et calcul d'une forme dans l'espace) avec

27. Cf. Nicolas (2009).

28. Après la séance de lancement du groupe de travail GdIM, ayant comme objectif de faire un tour d'horizon sur quelques aspects de la géométrie de l'interaction tout en essayant d'explorer une application potentielle entre logique linéaire, géométrie de l'interaction et informatique musicale (9 mai 2009), nous avons consacré trois autres séances du séminaire respectivement à la Géométrie de l'Information (10 octobre 2009), à la programmation spatiale (13 novembre 2009) et à l'approche fonctorielle (4 décembre 2009). Les programmes des quatre séances sont disponibles à l'adresse : <http://recherche.ircam.fr/equipes/repmus/mamux/PEPS-GdIM.html>

29. Voir <http://www.dagstuhl.de/en/program/calendar/semhp/?semnr=2006361>

le langage MGS. Le langage MGS a fait plus récemment l'objet d'un mémoire de master dans le cadre de la formation ATIAM de l'Ircam (Bigo, 2010) dans lequel les trois perspectives sur l'espace que nous venons de rappeler trouvent des applications tout à fait naturelles en musicologie computationnelle (en particulier dans le problème du calcul des séries tous-intervalles, dans la démarche néo-riemannienne³⁰ en analyse musicale et dans l'utilisation des complexes simpliciaux pour l'analyse des propriétés structurales d'une séquence d'accords).

2.2.1 Travaux d'étudiants sur ce sujet :

1. Louis Bigo, *Utilisation de la programmation spatiale pour l'analyse et la représentation symbolique musicale*, mémoire de Master ATIAM, Ircam/Université de Paris 6. Codirection : M. Andreatta (IRCAM/CNRS), J.-L. Giavitto (IBISC/CNRS), A. Spicher (LACL), O. Spicher (LACL) et C. Agon (IRCAM).

2.3 Mathématiques/Musique et Philosophie

Outre au séminaire MaMuX de l'Ircam, dans lequel nous avons organisé plusieurs séances consacrées aux interactions entre recherche mathémusicale et philosophie, les réflexions sur les enjeux philosophiques et épistémologiques du rapport mathématiques/musique ont été menées principalement dans le cadre du séminaire « Mathématiques, Musique et Philosophie » que je co-organise à l'école normale supérieure, en collaboration avec F. Nicolas (compositeur) et Charles Alunni (philosophe)³¹. L'objectif qui anime ma démarche est

30. L'analyse néo-riemannienne s'inscrit traditionnellement dans les théories transformationnelles. Le caractère à la fois géométrique et algébrique de l'espace utilisé pour représenter les structures musicales (*Tonnetz* ou réseau d'Euler) rend cette approche un cas d'étude idéal pour tester la puissance des outils de la programmation spatiale. De plus, en changeant les intervalles générateurs on obtient une panoplie d'espaces géométriques susceptibles de rendre compte des propriétés musicales sans aucune limitation au cas du tempérament égal. A la place des « structures fortes », tels les groupes, Xavier Hascher a proposé récemment une formalisation basée sur les grammaires formelles (Hascher, 2007). A partir de cette formalisation, une piste intéressante qui mériterait d'être explorée dans les travaux futurs, concerne l'adaptation des outils issus de la programmation spatiale à ce cadre théorique plus général, en vue d'une application en analyse musicale mais également en composition assistée par ordinateur.

31. Pour plus de renseignements, voir à l'adresse : <http://www.entretemps.asso.fr/maths/>. Le spectre des activités liées à ce séminaire s'est enrichie récemment d'un cours « Catégories et structures » de René Guitart centré sur la théorie des esquisses et ses applications dans l'activité de modélisation en sciences humaines. Dans ce cours Guitart a exposé également sa vision des rapports entre structuralisme en mathématique et en sciences humaines, en montrant comment la théorie des esquisses, une fois intégrée dans une démarche de modélisation, permet de « repenser les structures », pour reprendre la présentation de Guy Félix Duportail dans un numéro spécial de la *Revue de métaphysique et de morale* consacré au structuralisme (Duportail, 2005), dans une perspective post-bourbakiste. Notre réflexion sur les ramifications philosophiques du rapport mathématiques/musique cherche, à son tour, de repenser les structures (et le structuralisme), mais cette fois à partir des problèmes posés par la démarche de formalisation algébrique

celui d'arriver à répondre à la question suivante : quelle philosophie pour les rapports mathématiques/musique³² ? Autrement dit, il s'agit de cerner une orientation philosophique susceptible de rendre compte de la dynamique mathémusicale dont nous avons décrit quelques aspects dans la première partie de ce document, à la fois dans ses applications en théorie, composition et analyse musicales.

J'ai essayé, tout d'abord, d'analyser les ramifications philosophiques de la recherche mathémusicale telle que nous l'avons étudiée au sein de la tradition américaine, plus exactement dans celle que nous avons proposée d'appeler la « filiation Babbitt/Lewin »³³.

Une analyse comparée des propositions théoriques ainsi que des méthodes analytiques et stratégies compositionnelles de Milton Babbitt et David Lewin permet de comprendre un aspect ambivalent de la tradition set-théorique et transformationnelle, à savoir l'influence initiale du paradigme langagier du néopositivisme logique de l'école de Vienne et l'abandon progressif de cette orientation philosophique en vue d'une intégration des idées issues de la phénoménologie husserlienne dans une démarche formelle en analyse musicale³⁴.

L'influence du positivisme logique chez Milton Babbitt est évidente dans la réflexion du compositeur sur la « structure » et la « fonction » de la théorie de la musique, pour reprendre le titre de l'article consacré à cette question (Babbitt 1965/1972). Dans cet écrit, Babbitt oscille encore entre l'emploi du terme « théorie musicale » [*musical theory*], « théorie de la musique » [*theory of music*] et *music theory*, un terme qu'il introduit à la fin de l'article pour indiquer explicitement la discipline en train de se constituer sur le plan académique.

des structures et processus musicaux.

32. Selon le point de vue du mathématicien et théoricien de la musique. Pour une approche différente à la même question d'un point de vue du musicien, voir Nicolas (2009a).

33. Andreatta (2010). Dans cette article nous proposons une lecture de la tradition américaine en terme de « communauté scientifique » au sens de Kuhn (1962). C'est une notion qu'on utilise couramment lorsque l'on cherche à retracer l'histoire d'un courant de pensée. Par exemple Ralf Krömer, dans son ouvrage *Tool and object. A history and philosophy of Category theory* (Krömer, 2007), est confronté au problème de caractériser une communauté, celle des théoriciens des catégories, dont les frontières sont parfois très floues (à cette communauté peuvent appartenir des mathématiciens qui travaillent sur la théorie de l'homologie, sur la topologie ou sur la géométrie algébrique, sur la logique, etc.). De même, les frontières de la communauté des théoriciens de la musique appartenant à la tradition américaine, surtout en ce qui concerne les outils employés et les domaines analytiques visés, sont multiples, allant de l'utilisation des catalogues d'accords pour l'analyse de la musique atonale jusqu'au déploiement d'un arsenal algébrique pour l'analyse de la musique tonale (théories diatoniques et néo-riemanniennes), en passant par la création d'outils « mobiles », susceptibles d'être appliqués aussi bien au répertoire tonal ou atonal (réseaux de Klumpenhouwer).

34. La référence à Husserl devient explicite au sein de la théorie transformationnelle à partir de l'article de David Lewin sur les rapports entre théorie de la musique, phénoménologie et modes de perception de la musique (Lewin, 1986).

Tout d'abord Babbitt précise la fonction centrale de la « théorie musicale », à savoir celle de

“rendre possible d'un côté l'étude de la structure des systèmes musicaux [...] et la formulation des contraintes de ces systèmes dans une perspective compositionnelle [...] mais aussi, comme étape préalable, une terminologie adéquate [...] pour rendre possible et établir un modèle qui autorise des énoncés bien déterminés et testables sur les œuvres musicales³⁵” .

Cette nécessité de créer une « terminologie adéquate » au sein de la théorie de la musique fait évidemment écho aux propos de Willard Van Orman Quine, selon lequel

“Moins une science est avancée, plus sa terminologie tend à reposer sur le présupposé d'une compréhension mutuelle, sans le remettre en cause. Plus de rigueur aidant, des définitions sont introduites, qui remplacent peu à peu cette base. Les relations mises en jeu dans ces définitions acquièrent le statut de principes analytiques; et ce que l'on considérait auparavant comme une théorie portant sur le monde est réinterprété comme une convention de langage. C'est pourquoi un passage du théorique au conventionnel est un progrès dans les fondements logiques d'une science³⁶”

Les échos deviennent des résonances conceptuelles lorsqu'on analyse quelques traits majeurs du positivisme logique, en particulier la composante empirique qui mène, en plus du rejet ou de l'élimination de la métaphysique, à une émulation de la science dans sa méthodologie et sa terminologie et à une utilisation de l'analyse linguistique et logique (en particulier le recours à la logique formelle). Les deux citations suivantes d'Alfred Ayer et Milton Babbitt sont particulièrement révélatrices de l'influence du positivisme logique sur la pensée de ce compositeur qui est considéré comme le père spirituel de la tradition set-théorique américaine. Pour Ayer

“Il n'existe aucun domaine de l'expérience qui ne puisse, en principe, être placé sous la forme d'une loi scientifique, ni aucun type de connaissance spéculative du monde qui soit, en principe, au-delà du pouvoir de la science [...]. Les propositions de la philosophie ne sont pas de caractère factuel mais linguistique – c'est-à-dire qu'elles ne décrivent pas le comportement des objets physiques ou mentaux; elles expriment des définitions, ou les conséquences formelles de définitions³⁷”

Du côté de chez Babbitt :

“Parce que les éléments essentiels des caractérisations précédentes, mettant en jeu les corrélations des domaines syntaxique et sémantique, la notion d'analyse, et – peut-être de façon plus significative – les besoins d'une formulation linguistique et la différenciation parmi les types de prédicat, allant plus loin que fortement suggérer

35. Babbitt 1965/1972, p. 10.

36. Quine (1976). La première version du texte « Truth by Convention », d'où nous avons extrait cette citation, remonte, en réalité, aux années 1930 (in O ; H. Lee, ed., *Philosophical Essays for A. N. Whitehead*, New York : Longmans, 1936).

37. Cf. Ayer (1952).

que l'objet propre de l'enquête que nous nous sommes assignés pourrait être – à la lumière de ces critères – une classe vide, et en conservant bien à l'esprit les obligations systématiques liées à nos propres présentation et discussion nécessaires du sujet présumé, qui nous font nous souvenir qu'il n'y a qu'une seule sorte de langage, une seule sorte de formulation verbale des 'concepts' et d'analyse verbale de telles formulations : le langage 'scientifique' et la méthode 'scientifique'³⁸ .

De plus, alors que, toujours selon l'expression d'Ayer, de même que la philosophie devient un « département de la logique », la théorie de la musique peut se réduire, pour Babbitt, à un type de logique formelle. Comme le compositeur l'indique dans le passage qui suit et qui montre clairement l'influence remarquable du positivisme logique dans la naissance de la théorie de la musique aux Etats-Unis :

“Progressivement du concept à la loi (généralité synthétique), nous arrivons au système de lois déductivement inter-reliées qu'est une théorie, énonçable sous la forme d'un ensemble mis en relation d'axiomes, de définitions et de théorèmes - les preuves qui ont été dérivées au moyen d'une logique adéquate. Une théorie musicale se réduit, ou devrait se réduire, à une telle théorie formelle quand les prédicats et les opérations non-interprétés sont substitués aux termes et opérations faisant référence aux observables musicaux³⁹” .

Une théorie (de la musique) est toujours formalisable, selon Babbitt, avec un ensemble bien défini d'axiomes, définitions et théorèmes dont la preuve est obtenue à travers le choix d'un système logique parmi ceux qui sont *a priori* possibles. Le compositeur semble faire allusion au concept d'explication déductive-nomologique chez Carl Hempel (1965 et 1966), l'un des théoriciens du Cercle de Vienne auquel Babbitt se réfère le plus en ce qui concerne le rôle des lois dans l'explication scientifique⁴⁰.

Cependant, l'empirisme logique n'est qu'une composante de la pensée théorique de Babbitt et nous avons essayé de proposer une analyse plus fine de l'influence du Cercle de Vienne sur la tradition américaine à partir d'une réflexion plus large sur ce qu'on appelle véritablement « structuralisme » en musique, cette notion n'ayant pas créé, à ce jour, le consensus parmi les musicologues⁴¹. La généalogie linguistico-sémiotique du struc-

38. Cf. Babbitt 1961/1972.

39. Babbitt, 1961/1972, p. 4.

40. « Position selon laquelle on explique un phénomène en déduisant la proposition qui le décrit d'une ou plusieurs propositions générales qui expriment une ou plusieurs lois de la nature » (Esfeld, 2006). Une analyse détaillée de ce concept est contenue, en particulier, dans le cinquième chapitre de Hempel (1966). Notons également que l'ouvrage *Aspects of Scientific Explanation* (Hempel 1965) fait partie des titres cités à la fin de l'article considéré comme le plus techniquement philosophique des écrits théoriques de Milton Babbitt. Il s'agit de l'étude intitulée « Contemporary Music Composition and Music Theory as Contemporary Intellectual History » (Babbitt, 1972) et qui constitue l'une des leçons inaugurales du premier programme de doctorat en théorie de la musique et composition musicale à la City University de New York (année 1968-1969).

41. Mes premières réflexions sur les enjeux philosophiques d'une démarche structurale en musique re-

turalisme, dans laquelle, comme on peut le lire dans les études musicologiques consacrées à cette question, le structuralisme musical se trouverait naturellement reconduit, n'est en réalité qu'une parmi les possibles généalogies⁴² du structuralisme et, par conséquent, elle ne constitue qu'une des analyses possibles des limites et de la portée d'une approche structurale en musique.

Notre hypothèse est celle d'une possible réactivation de la question structurale en musique à partir d'une généalogie proprement mathématique du structuralisme. Cette généalogie rend ainsi compte non seulement de l'influence que la pensée structurale en mathématique a eu sur le concept de « structure » telle que les structuralistes l'ont employée (de Lévi-Strauss à Piaget) mais elle permet de mieux comprendre l'évolution de la pensée théorique en musique, notamment à partir de la *Set Theory* et jusqu'à la théorie transformationnelle de David Lewin et au modèle catégoriel et toposique proposé par Guerino Mazzola. Il nous semble, par exemple, que l'existence d'une généalogie « géométrico-algébrique » du structuralisme puisse avoir de conséquences profondes sur l'activité « mathémusicale », par rapport à la généalogie traditionnelle issue de la linguistique.

Le point de départ consiste dans une interprétation philosophique du Programme d'Erlangen de Felix Klein, dont relève tout naturellement notre approche paradigmatique en analyse musicale. Notons que le terme « paradigmatique » avait également été adopté en musicologie par Nicolas Ruwet dans son approche structuraliste de l'analyse musicale qui était fortement influencée par la linguistique. Notre approche « paradigmatique », basé sur la théorie des groupes de transformations, suggère une nouvelle interprétation de la démarche structurale en analyse musicale, indépendamment de toute considération sur le rapport entre musique et langage. La musique, ou plus précisément la recherche mathémusicale, représente ainsi une démarche grâce à laquelle on pourrait arriver à concilier certaines instances structuralistes avec d'autres orientations philosophiques, en particulier la phénoménologie husserlienne. Pour cela nous avons proposé l'appellation « structuralisme phénoménologique⁴³ » pour une telle orientation philosophique

montent à une présentation donnée à l'occasion d'une journée scientifique du Centre Georges Canguilhem (2 décembre 2004) intitulée « Les structures après le structuralisme » (organisée par Frédéric Patras, Univ. Sophia Antipolis, Nice). La participation à cette journée a été précieuse pour comprendre qu'avant de s'attaquer à la question du structuralisme en musique il fallait reprendre la discussion sur le structuralisme tout court, la perception de ce courant de pensée en France n'étant sans doute pas la même que dans d'autres pays d'Europe (par exemple en ce qui concerne la difficulté, en France, d'admettre Piaget parmi les structuralistes...).

42. D'autres généalogies du structuralisme ont été également proposées, comme par exemple celle morphologique (Petitot, 2004), ce qui semble suggérer que la question de la compréhension intime de l'origine du structuralisme reste une question ouverte en épistémologie des sciences.

43. Nous avons récemment découvert que cette appellation a été également proposée dans d'autres approches, en particulier en référence à la démarche de Jakobson en linguistique structurale (Holenstein 1976), concept repris par Petitot dans sa lecture morphologique de la généalogie du structuralisme (Petitot 2004).

en théorie mathématique de la musique. C'est une hypothèse que l'on peut avancer à partir, par exemple, des écrits d'Ernst Cassirer, dont certaines considérations algébriques sur la mélodie musicale, inspirées directement par le programme de Klein, semblent bien s'inscrire dans une démarche structurale qui reste cependant ancrée sur le terrain de la phénoménologie⁴⁴.

En outre, l'articulation entre l'objectal et l'opératoire, que l'épistémologue français Gilles-Gaston Granger avait indiqué à partir de la fin des années 1940 comme le fondement de la notion du concept philosophique⁴⁵, semble toucher un aspect qui, comme nous l'avons déjà mentionné, peut être considéré comme la dualité à la base de la théorie musicale : l'articulation entre le son et l'intervalle. Cette considération ouvre également à des questions qui touchent plus précisément les rapports entre méthodes algébriques, perception et cognition musicale auxquels nos travaux n'ont pas su donner, jusqu'à maintenant, une réponse satisfaisante.

Un aspect de ces retombées concerne le processus de construction d'un réseau transformationnel. Nous voudrions proposer une lecture des diagrammes utilisés par Lewin à partir d'une analyse de certaines approches développementales récentes de la pensée logico-mathématique. Parmi les trois problématiques qui, selon le psychologue Olivier Houdé, marquent le renouveau de la pensée piagétienne, la théorie mathématique des catégories occupe une place tout à fait centrale. À la différence de l'approche structurale que Piaget a développée à partir de l'*Essai de logistique opératoire*⁴⁶ et qui constitue également le cadre conceptuel de ses recherches sur l'abstraction réfléchissante⁴⁷ et sur la généralisation⁴⁸, la théorie des catégories introduit, selon Houdé, un élément nouveau dans la pensée opératoire⁴⁹. Les morphismes permettent « la prise en compte d'un aspect de la cognition logico-mathématique qui ne procède pas de la transformation du réel (opérations et groupements d'opérations) mais de la simple activité de mise en relation »⁵⁰. Cette lecture de l'approche catégorique éclaire, à notre avis, un aspect fondamental de l'analyse musicale de type transformationnel, à savoir l'articulation entre la notion de progression et celle de réseau transformationnel, que nous avons illustrée dans le cas du *Klaviertück III* de Strockhausen. Dans une progression, les transformations s'enchaînent selon un ordre qui respecte le déroulement chronologique de la pièce. La logique opératoire reste ancrée

44. Cassirer (1944).

45. Voir, en particulier, l'écrit « Contenus formels et dualité », repris dans Granger (1994).

46. Piaget (1949).

47. Piaget (1977).

48. Piaget (1978).

49. Notons que l'approche algébrique est déjà présente chez Piaget dès la fin des années trente, comme le témoigne l'écrit intitulé « La réversibilité des opérations et l'importance de la notion de 'groupe' pour la psychologie de la pensée » (Piaget, 1938).

50. Houdé et Miéville (1994).

dans une notion de temporalité qui, comme dans le cas de la pièce de Stockhausen, s'avère parfois insuffisante d'un point de vue de la perception de l'œuvre. Dans un réseau transformationnel, la « logique opératoire » est créée par le sujet (qui est dans ce cas l'auditeur et/ou l'analyste) à travers une mise en relation d'objets et de morphismes dans un espace abstrait de potentialités. Pour paraphraser la conclusion de Lewin, dans le cas des progressions transformationnelles, quand nous sommes à un point d'une telle progression, nous sommes à un *instant* précis du temps, de la *narration* de la pièce, tandis que dans le cas d'un réseau abstrait nous sommes plutôt à un *point* bien défini à l'intérieur d'un *espace* créé par la pièce. Dans un réseau spatial, les différents événements musicaux « se déroulent à l'intérieur d'un univers bien défini de relations possibles tout en rendant l'espace abstrait de cet univers accessible à nos sensibilités. Autrement dit, l'histoire projette ce qu'on appelle traditionnellement la forme »⁵¹.

Il est probablement trop tôt pour évaluer les conséquences épistémologiques d'un tel changement de paradigme en analyse musicale, la théorie transformationnelle n'étant pas encore un objet d'études pour la psychologie expérimentale⁵². Cependant, elle ne fait qu'articuler, à un deuxième degré, la dualité de l'*objectal* et de l'*opératoire* en tant que « *catégorie primitive de la pensée* », pour reprendre la thèse de Granger. Du point de vue des sciences cognitives, cette approche touche à la question même de la nature de l'espace en musique, un problème dont la richesse en ce qui concerne les possibles retombées perceptives et cognitives reste, à notre avis, à comprendre. Il est évident que ces types de problématiques demandent également une remise en question des ramifications philosophiques de certaines théories algébriques, en particulier la théorie des catégories et des

51. Lewin (1993), p. 41.

52. L'évaluation perceptive du modèle computationnel que nous avons explicité dans le cas de l'analyse transformationnelle du *Klavierstück III* de Stockhausen fait l'objet d'un projet en cours avec Steve McA-dams, responsable de la chaire de perception et cognition musicales de l'université McGill à Montréal, Jon Wild (théoricien de la musique) et Cristoph Neidhöfer (musicologue et pianiste). En ce qui concerne plus précisément la nature de l'espace en musique, outre à la programmation spatiale, dont nous avons souligné les application récentes en musicologie computationnelle, nous avons trouvé plusieurs éléments qui pourront nourrir ultérieurement notre réflexion sur la nature de l'espace en musique dans un ouvrage consacré à un réexamen critique et prospectif de la phénoménologie husserlienne notamment dans ses rapports avec les idéalités mathématiques et la réalité physique (Boi et al., 2007). Un certain nombre de questions posées par Luciano Boi dans la présentation de la première partie de cet ouvrage, centrée sur la spatialité et la phénoménologie de la perception, s'appliquent à notre avis non seulement au cas de la perception visuelle mais elles semblent également offrir un nouvel éclairage sur les implications cognitives et perceptives de la modélisation transformationnelle en musique. En particulier, dans le cas de l'organisation spatiale des structures musicales proposée par les approches transformationnelles, la question se pose de la relation entre les formes perçues, et l'activité cognitive. Cette relation demande également une analyse de la relation locale/globale au sein d'un réseau transformationnel. Cela rejoint les préoccupations qui animent le projet d'application de la théorie des esquisses en musique via le modèle MENS (voir section consacrée au projet « Mathématiques/Musique et Cognition »).

topoi, appliquées à la musique⁵³.

À partir de réflexions des mathématiciens sur la portée phénoménologique de l'activité mathématique contemporaine⁵⁴, et en comparant ces auteurs avec d'autres orientations plus épistémologiques sur la portée cognitive de la réflexion phénoménologique⁵⁵, la recherche mathémusicale contemporaine, dans ses interactions avec les autres disciplines, pourrait ainsi constituer un domaine d'étude à l'intérieur duquel certains problèmes mathématiques posés par la musique ont des implications importantes pour la perception et soulèvent des questions théoriques et philosophiques auxquelles la philosophie toute seule n'aurait, peut-être, jamais pensé.

53. Une réflexion philosophique qui nous semble pouvoir s'appliquer directement au cas de l'analyse musicale transformationnelle est celle proposée par Jocelyn Benoist dans son étude sur la pertinence phénoménologique de la théorie des catégories (Boi et al., 2007). En effet, si l'un des aspects qui caractérisent la pensée phénoménologique est l'attention envers la dynamique de l'intuition conceptuelle, l'importance que David Lewin accorde au processus de construction au sein d'une analyse transformationnelle souligne la possibilité d'une coexistence entre démarche phénoménologique et approche structurale en musique. De même que « la phénoménologie husserlienne des mathématiques est structurale en ce qu'elle se fixe sur les invariances [...] dont elle fait le cœur de l'objectivité mathématique en tant qu'objectivité formelle » (Benoist, 2007 ; p. 349), l'analyse transformationnelle est phénoménologique tout en étant structurale, le groupe de transformation qui opère sur l'espace musicale étant confronté systématiquement au processus perceptif propre à la subjectivité de l'analyste. D'où l'appellation « structuralisme phénoménologique » que nous avons proposé comme philosophie sous-jacente à la recherche mathémusicale.

54. Patras (2006).

55. Petitot *et al.* (2002).

Bibliographie

- [1] Acotto E. et Andreatta, M. (2010), « Représentations mentales musicales et représentations mathématiques de la musique », à paraître dans *InCognito, Cahiers Romans de Sciences Cognitives*.
- [2] Adler, C. (1885), « Umfang, Methode und Ziel der Musikwissenschaft », *Vierteljahresschrift für Musikwissenschaft*, 1, 1885, p. 5-20.
- [3] Agon, C. (1998), *OpenMusic : un langage visuel pour la composition musicale assistée par ordinateur*, thèse, Université de Paris VII.
- [4] Agon, C. (2004), *Langages de programmation pour la composition musicale*, habilitation à diriger les recherches, université de Paris VI.
- [5] Agon C., Assayag G., Laurson, M. et Rueda, C. (1999), « Computer Assisted Composition at Ircam : PatchWork & OpenMusic », *Computer Music Journal*, 23(5).
- [6] Alunni, C. (2005), « Diagrammes & Catégories comme prolégomènes à la question : Qu'est-ce que s'orienter diagrammatiquement dans la pensée? », in *Penser par le diagramme : de Gilles Deleuze à Gilles Châtelet*, Presses Universitaires de Vincennes, janvier 2005, n° 22
- [7] Amiot, E. (1991), « Pour en finir avec le Désir : la notion de symétrie en Analyse Musicale », *Revue d'Analyse Musicale*, N° 22.
- [8] Amiot, E. (2007), « David Lewin and Maximally Even Sets », *Journal of Mathematics and Music* 1(3), 157-172.
- [9] Andreatta, M. (1996), *Gruppi di Hajós, Canoni e Composizioni*, Tesi di laurea, Faculté de mathématiques, Université de Pavie.
- [10] Andreatta M. (2003), *Méthodes algébriques en musique et musicologie du XX^e siècle : aspects théoriques, analytiques et compositionnels*, thèse de doctorat, EHESS/Ircam.
- [11] Andreatta, M. (2004), « On group-theoretical methods applied to music : some compositional and implementational aspects », *Perspectives in Mathematical and Computational Music Theory*, ed. G. Mazzola, T. Noll and E. Lluís-Puebla. (Electronic Publishing Osnabrück, Osnabrück), p. 169-193.
- [12] Andreatta, M. (2007), « De la conjecture de Minkowski aux canons rythmiques mosaïques », *L'Ouvrè*, n° 114, mars 2007, p. 51-61.

- [13] Andreatta, M. (2008) « Calcul algébrique et calcul catégoriel en musique : aspects théoriques et informatiques », *Le calcul de la musique*, L. Pottier (éd.), Publications de l'université de Saint-Etienne, p. 429-477.
- [14] Andreatta, M. (2010) « Mathématiques, Musique et Philosophie dans la tradition américaine : la filiation Babbitt/Lewin », à paraître dans *Revue de Synthèse*, numéro spécial « Mathématiques/Musique et Philosophie » (sous la direction de C. Alunni, M. Andreatta et F. Nicolas).
- [15] Andreatta M. et Vuza D. T. (2001), « On some properties of periodic sequences in Anatol Vieru's modal theory », *Tatra Mountains Mathematical Publications*, vol. 23, p. 1-15.
- [16] Andreatta M., C. Agon, D. T. Vuza (2004), « On some theoretical and computational aspects of Anatol Vieru's periodic sequences », *Soft Computing*, Septembre, vol. 8, n° 9, p. 588-596.
- [17] Andreatta M., J.-M. Bardez & J. Rahn (dir.) (2007), *Autour de la Set Theory. Rencontre Musicologique franco-américain*, Collection « Musique/Sciences », Ircam-Delatour France.
- [18] Andreatta, M. et Bloch, G. (2007), « Tiling Space with Musical Canons », *Seed Workshop*, Dublin, 5 mai 2007.
- [19] Andreatta M. et Agon C. (guest eds) (2009), Special Issue « Tiling Problems in Music », *Journal of Mathematics and Music*, Juillet, 3(2).
- [20] Andreatta M., Assayag G. et Bloch, G. (2008), « Outils set-théorique et modulations métriques dans la musique d'Elliott Carter : une perspective musicologique computationnelle », Colloque International Hommage à Elliott Carter, Ircam, 11-12 décembre 2008.
- [21] Andreatta, M. et Déliège, I. eds. (2010), « GTTM 25 years on », numéro spécial de la revue *Musicae Scientiae*, à paraître.
- [22] Assayag, G. (2006), « De la calculabilité à l'implémentation musicale », in *Penser la musique avec les mathématiques ? Actes du Séminaire Mathématiques/Musique/Philosophie*, G. Assayag, G. Mazzola et F. Nicolas (eds), Collection « Musique/Sciences », Ircam-Delatour France.
- [23] Assayag, G. (2009), *Algorithmes, langages et modèles pour la recherche musicale : de la composition à l'interaction*, habilitation à diriger les recherches, Université Paris 6.
- [24] Assayag G., H.G. Feichtinger, J.F. Rodrigues eds (2002), *Mathematics and Music, Diderot Forum*, European Mathematical Society, Berlin, Springer Verlag.
- [25] Audétat, P. (2006), « La cloche diatonique ». Jazz Department, University of Applied Sciences of Western Switzerland.
- [26] Ayer A. J. (1952), *Language, Truth & Logic*, Penguin Modern Classics.

- [27] Babbitt, M. (1961), « Set Structure as a Compositional Determinant », *Journal of Music Theory*, 5(2), p. 72-94.
- [28] Babbitt M. (1965/1972), « The Structure and Function of Music Theory », College Music Symposium, Vol. 5, 1965 (repris dans B. Boretz et E. T. Cone, *Perspectives on Contemporary Music Theory*, W.W. Norton and Company, New York. 1972, p. 10-21).
- [29] Babbitt, M. (1972), « Contemporary Music Composition and Music Theory as Contemporary Intellectual History » (dans B. Brook, E. Downes et S. van Solkema (éds.), *Perspectives in Musicology*, Norton, New York, 1972. p. 151-184).
- [30] Balzano, G. (1980), « The group-theoretic representation of 12-fold and microtonal pitch systems », *Computer Music Journal*, 4.
- [31] Balzano G. (1982), « The Pitch Set as a Level of Description for Studying Musical Pitch Perception », in *Music, Mind, and Brain*, Manfred Clynes, ed., Plenum Press.
- [32] Bamberger J. et DiSessa A. (2004), « Music as embodied mathematics : A study of a mutually informing affinity », *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 8, 123-160.
- [33] Bancquart A., Andreatta M., et C. Agon (2008), « Microtonal Composition », in *The OM Composer's Book 2*, Jean Bresson, Carlos Agon and Gérard Assayag (eds.), IRCAM/Delatour France, p. 279-302.
- [34] Bazelow, A. R. et Brickle, R. (1976), « A Partition Problem Posed by Milton Babbitt (Part I) », *Perspectives of New Music*, Vol. 14, No. 2, *Sounds and Words. A Critical Celebration of Milton Babbitt at 60*, p. 280-293.
- [35] Berthoz A. (2005), « Les liens entre mathématiques et neurosciences », dans *Les mathématiques dans le monde scientifique contemporain*, Académie des sciences, rst n° 20, p. 175-211.
- [36] Bigand E., Lalitte P & Dowling W. J. (eds) (2009), « Special Issue Music and Language : 25 years after Lerdahl & Jackendoff's DTTM », *Music Perception*, 26(3).
- [37] Bigo L., Michel O., Spicher A. (2010), « Spatial Programming for Music Representation and Analysis », Spatial Computing Workshop, Budapest, Novembre 2010.
- [38] Bloch, G. (2007), *The OM Composer's Book 1*, Collection « Musique/Sciences », Ircam-Delatour France.
- [39] Boulez, P. (1963), *Penser la musique aujourd'hui*, Paris : Gallimard.
- [40] Brown R. & Porter T. (2008), « Category Theory and Higher Dimensional Algebra : potential descriptive tools in neurosciences » (online : <http://arxiv.org/pdf/math/0306223v2>)
- [41] Brown R. & Porter T. (2009), « The intuitions of higher dimensional algebra for the study of structured space » (online : <http://www.springerlink.com/content/a280w10813411982/>)

- [42] Carey, N. & Clampitt D. (1989). « Aspects of Well-Formed Scales », *Music Theory Spectrum*, 11(2), p. 187-206.
- [43] Cassirer R. (1944), « The concept of group and the theory of perception », *Philosophy and Phenomenological Research*, V/1, p. 1-36.
- [44] Changeux, J.-P., (1983), *L'homme neuronal*, Fayard, Paris.
- [45] Chemillier M. (1990), *Structure et méthode algébriques en informatique musicale*, thèse, Université Paris 7, LITP.
- [46] Chouvel J.-M. (2006), *Analyse musicale. Sémiologie et cognition des formes temporelles*, Collection « Art&Sciences de l'Art », L'Harmattan.
- [47] Clough, J. et Douthett, J. (1991), « Maximally Even Sets », *Journal of Music Theory* 35, p. 93-173.
- [48] Cohn, R. (1986), *Transpositional combination in twentieth-century music*, PhD thesis, University of Rochester, Eastmann School of Music.
- [49] Corry, L. (1996), *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures*, Birkhäuser Verlag.
- [50] Cross I., P. Howell & R. West (1983), « Preferences for scale structure in melodic sequences », *Journal of Experimental Psychology : Human Perception and Performance*, 9(3).
- [51] Cross I. (1997), « Pitch Schemata », in I. Deliège & J. Sloboda (éd.), *Perception and Cognition of Music*.
- [52] Douthett, Jack (2008), « Filtered Point-Symmetry and Dynamical Voice-Leading ». In : Jack Douthett et al. (eds.) *Music Theory and Mathematics : Chords, Collections, and Transformations*, University of Rochester Press.
- [53] Duportail, J. F. (2005), « Présentation : repenser les structures », *Revue de métaphysique et de morale*, n° 45, p. 3-4.
- [54] Edelman, G.M. (1989), *The remembered Present*, Basic Books, New York.
- [55] Edelman, G.M. and Gally, J.A. (2001), « Degeneracy and complexity in biological systems », *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 98, 13763-13768.
- [56] Ehresmann, A.C. and Vanbremeersch J.-P. (2007), *Memory Evolutive Systems : Hierarchy, Emergence, Cognition*, Elsevier, Amsterdam.
- [57] Eilenberg, S. and Mac Lane, S. (1945), « General theory of natural equivalences », *Trans. Am. Math. Soc.* 58, 231-294.
- [58] Esfeld M. (2006), *Philosophie des sciences, une introduction*, Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne.
- [59] Estrada J. (1994), *Théorie de la composition : discontinuum-continuum*, Thèse, Université de Strasbourg.

- [60] Estrada J. et Gil J. (1984), *Musica Y Teoria De Grupos Finitos : 3 Variables Booleanas*, UNAM, Mexique.
- [61] Forte A. (1977), *The Structure of Atonal Music*, Yale University Press.
- [62] Fuglede B. (1974) « Commuting self-adjoint partial differential operators and a group theoretic problem », *J. Funct. Anal.* 16, p. 101-121.
- [63] Girard J.-Y. (2006-2007), *Le Point Aveugle* (en deux volumes), Hermann.
- [64] Granger G.-G. (1994), *Formes, opérations, objets*, Paris : Librairie Philosophique J. Vrin.
- [65] Guitart R. (2009), « Théorie du nouveau », intervention dans le séminaire MaMuPhi, école normale supérieure, 9 mai. Argumentaire de la séance et texte préparatoire disponibles à l'adresse : <http://recherche.ircam.fr/equipes/repmus/mamux/MamuPhiXMai09.pdf>
- [66] Hascher, X. (2007), « Tonality As Formal Grammar : Functional Cycles, Equivalence, and Substitutions », conférence au département de musique de l'université de Harvard, 9 mars 2007.
- [67] Hascher, X. (2008), « Une analyse transformationnelle de l'op. 19 no 4 de Schoenberg au moyen des K-réseaux », dans Andreatta *et al.* (éd.), *Autour de la Set Theory*, Collection « Musique/Sciences », Ircam-Delatour France.
- [68] Hempel, C. (1965), *Aspects of Scientific Explanation*, New York, Free Press.
- [69] Hempel, C. (1966), *Philosophy of Natural Science*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey. Tr. fr. *Éléments d'épistémologie*, Armand Colin éditeur, Paris, 2004.
- [70] Hagmann, P., Cammoun, L., Gigandet, X., Meuli, R., Honey, C.J., Van J. Wedeen & Sporns, O. (2008), « Mapping the Structural Core of Human Cerebral Cortex », *PLoS Biology* 6, Issue 7, 1479-1493. Online : www.plosbiology.org
- [71] Halford G. S. et Wilson W .H. (1980), « A category-theory approach to cognitive development », *Cognitive Psychology*, 12, 356-411.
- [72] Hautbois, X. (2006), *L'unité de l'œuvre musicale : recherche d'une esthétique comparée avec les sciences physiques*, Collection « Art&Sciences de l'Art », L'Harmattan.
- [73] Holenstein, E. (1976), *Roman Jakobson's approach to language : phenomenological structuralism*, Bloomington, Indiana University Press.
- [74] Houdé O. et Miéville D. (1993), *Pensée Logico-mathématique, nouveaux objets interdisciplinaires*, Paris : Presses Universitaires de France.
- [75] Jedrzejewski, F. (2007), *Mathematical Theory of Music*, Collection « Musique/Sciences », Ircam-Delatour France.
- [76] Jedrzejewski, F., Andreatta, M., Johnson, T. (2009), « Musical experiences with Block Designs », *Proceedings of the Proceedings Conference MCM09*, Springer CCIS Series, Vol. 38, New Haven, p. 154-165.

- [77] Johnson, T. (2006), « Ecouter un block-design », *Gazette des mathématiciens*, 107, p. 39-47.
- [78] Junod, J. *Étude combinatoire et informatique du caractère diatonique des échelles à sept notes*, 2008, Mémoire de master atiam, IRCAM/Paris VI, Paris. Disponible à l'adresse : <http://recherche.ircam.fr/equipes/repmus/mamux/RapportATIAMJunod.pdf>
- [79] Junod J., Audétat P., Andreatta M., Agon C. (2009), « A Generalisation of Diatonism and the Discrete Fourier Transform » in E. Chew, A. Childs, and C.-H. Chuan (Eds.), MCM 2009, CCIS 38, pp. 166, Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag.
- [80] Klein, F. (1872), « Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen », *Mathematische Annalen*, 43 (1893) p. 63-100. Tr. fr. *Le Programme d'Erlangen. Considérations comparatives sur les recherches géométriques modernes*, Paris, Gauthier-Villars, 1974.
- [81] Krömer, R. (2007), *Tool and object. A history and philosophy of Category theory*, Birkhäuser.
- [82] Kuhn, Th. (1962), *The Structure of Scientific Revolutions*, university of Chicago Press.
- [83] Leibniz, G. (1734), *Epistolae ad diversos*, Vol. 1, Chr. Kortholt (éd.), Leipzig.
- [84] Leman M. (1997), *Music, Gestalt and Computing. Studies in Cognitive and Systematic Musicology*, Springer.
- [85] Lerdahl F. (1989), « Structure de prolongation dans l'atonalité », in *La musique et les sciences cognitives*, S. McAdams et I. Deliège (éd.), Mardaga.
- [86] Lerdahl, F. (2001), *Tonal Pitch Space*, Oxford University Press.
- [87] Lerdahl F. et Jackendoff, R. (1983), *A Generative Theory of Tonal Music*, MIT Press.
- [88] Lewin D. (1959), « Intervallic Relations between Two Collections of Notes », *Journal of Music Theory*, Vol. 3, No. 2, 298-301.
- [89] Lewin D. (1986), « Music Theory, Phenomenology and Modes of Perception », *Music Perception*, 3(4), p. 327-392.
- [90] Lewin D. (1987), *Generalized Musical Intervals and Transformations*, Yale University Press.
- [91] Lewin D. (1990), « Klumpenhouwer Networks and Some Isographies That Involve Them », *Music Theory Spectrum*, 12(1), p. 83-120.
- [92] Lewin, D. (1993), « Making and Using a pcset Network for Stockhausen's *Klavierstück III* », *Musical Form and Transformation : 4 Analytic Essays*, New Haven : Yale University Press, p. 16-67.
- [93] Mandereau J., Ghisi D., Amiot E., Andreatta M. et Agon C. (2011), « Phase retrieval in musical structures », à paraître dans *Journal of Mathematics and Music*.

- [94] Marquis, J.-P. (2009), *From a Geometrical Point of View. A Study of the History and Philosophy of Category Theory*. Springer.
- [95] Mazzola, G. (1985), *Gruppen und Kategorien in der Musik*, Berlin : Helderman.
- [96] Mazzola G. (2002), *Topos of Music*, Birkhäuser Verlag
- [97] Mazzola, G. (2010), « Matematica e musica : due movimenti aggiunti fra formule e gesti », à paraître dans *La Matematica*, sous la direction de C. Bartocci et P. Odifreddi, vol. 3, Einaudi (traduit de l'anglais par M. Andreatta).
- [98] Mazzola G. (en collaboration avec Yun Kang Ahn) (2008), *La vérité du beau dans la musique*, Collection « Musique/Sciences », Ircam-Delatour France.
- [99] Mazzola G. et Andreatta, M. (2007), « Diagrams, gestures and formulae in music », *Journal of Mathematics and Music*, Vol. 1, No. 1, March 2007, p. 23-46.
- [100] Mazzola, G. et Andreatta M. (2006), « From a categorical point of view : K-nets as limit denotators », *Perspectives of New Music*, vol. 44, n° 2, Août, p. 88-113.
- [101] Messiaen, O. (1949-1992), *Traité de rythme, de couleur, et d'ornithologie* (1949-1992), Alphonse Leduc.
- [102] Morris, R. (1987), *Composition with Pitch-Classes : A Theory of Compositional Design*, New Haven, Yale University Press.
- [103] Neumann, P. M. (1979), « A Lemma that is not Burnside's », *Math. Scientist*, 4, p. 133-141.
- [104] Nicolas, F. (2009a), « Théoriser aujourd'hui la musique à la lumière des mathématiques ? Un point de vue musicien », *Gazette des mathématiciens*, n°119, janv. 2009, p. 35-49.
- [105] Nicolas, F. (2009b), « D'un 'tournant géométrique' dans la logique musicale », dans *Logique & Interaction : Géométrie de la cognition*, Actes du colloque et école thématique du CNRS « Logique, Sciences, Philosophie » à Cerisy, Hermann.
- [106] Noll Th. (2008), « Sturmian Sequences and Morphisms : A Music-Theoretical Application », in : Yves André : *Mathématique et Musique. Journée Annuelle de la Société Mathématique de France à l'Institut Henri Poincaré, le 21 juin 2008*
- [107] Papadopoulos, A. (2008), « Complexity in geometry and in music », Séminaire MaMuX, séance autour de la complexité dans les arts, 7 novembre 2008.
- [108] Patras, F. (2001), *La Pensée mathématique contemporaine*, Collection « Science, histoire et société », Presses Universitaires de France.
- [109] Patras, F. (2006)., « Phénoménologie et théorie des catégories », dans L. Boi (éd.) : *Geometries of Nature, Living Systems and Human Cognition : New Interactions of Mathematics with Natural Sciences and Humanities*, World Scientific Publishing, 2006.

- [110] Patras, F. (2008), « Carnap, l'*Aufbau*, et l'idée mathématique de structure ». In *Mathématiques et expérience. L'empirisme logique à l'épreuve (1918-1940)*. Dir. J. Bouveresse et P. Wagner, Odile Jacob - Collège de France, p. 33-54.
- [111] Paul, T. (2010), « Des sons et des quanta », dans *Mathématiques, Musique et Philosophie*, numéro spécial de la *Revue de Synthèse* (sous la direction de C. Alunni, M. Andreatta et F. Nicolas, à paraître automne 2010).
- [112] Paul, T. et Longo G. (2009), « Le monde et le calcul : réflexions sur calculabilité, mathématiques et physique », dans *Logique & Interaction : Géométrie de la cognition*, Actes du colloque et école thématique du CNRS "Logique, Sciences, Philosophie" à Cerisy, Hermann.
- [113] Peretz I. et Zatorre R. J. (2003), *The cognitive neuroscience of music*, Oxford University Press.
- [114] Petitot, J. (1985), *Morphogenèse du sens*, Paris : PUF.
- [115] Petitot, J. (2004), *Morphologie et esthétique*, Paris, Maisonneuve et Larose.
- [116] Piaget, J. (1938), « La réversibilité des opérations et l'importance de la notion de 'groupe' pour la psychologie de la pensée », in H. Piéron et I. Meyerson (éds.), Onzième congrès international de psychologie, Paris, 25-31 juillet 1937, p. 433-434.
- [117] Piaget, J. (1949), *Essai de logistique opératoire*, Paris : Armand Colin.
- [118] Piaget, J. (1977), « Recherches sur l'abstraction réfléchissante », *Etudes d'épistémologie génétique*, Paris : Presses Universitaires de France, p. 34-35.
- [119] Piaget, J. (1978), « Recherches sur la généralisation », *Etudes d'épistémologie génétique*, Paris : Presses Universitaires de France, p. 36.
- [120] Pineau M. et Tillmann B. (2001), *Percevoir la musique : une activité cognitive*, L'Harmattan.
- [121] Rahn, J. (1980), *Basic Atonal Theory*, New York, Longman.
- [122] Rosenblatt, J. et Seymour, P. D. (1982), « The Structure of Homometric Sets », *SIAM. Journal on Algebraic and Discrete Methods*, 3(?).
- [123] Rosenblatt, J. (1984), « Phase Retrieval », *Communications in Mathematical Physics*, 95, p. 317-343.
- [124] Quine, W. V. (1976), *The Ways of Paradox and Other Essays* (revised and enlarged edition), Harvard University Press, Cambridge.
- [125] Quinn, I. (2006), « General Equal-Tempered Harmony », *Perspectives of New Music* 44.2 (2006) : p. 6-50 (Introduction and Part 1); *Perspectives of New Music* 45.1 (2007) : p. 6-65 (Parts 2 and 3).
- [126] Tillmann, B., Madurell, F., Lalitte, P. & Bigand, E. (2005), Apprendre la musique : Perspectives sur l'apprentissage implicite de la musique et implications pédagogiques, *Revue Française de Pédagogie*, 152, 63-77.

- [127] Van Egmond R. & Butler D. (1997), « Diatonic Connotations of Pitch-Class Sets », *Music Perception*, 15(1).
- [128] Viaud-Delmon I. (2006), *Réalité virtuelle, intégration multi-sensorielle & espace : de l'outil expérimental au paradigme scientifique*, mémoire d'habilitation à diriger des recherches, Université de Paris VI.
- [129] Vieru, A. (1980), *Cartea modurilor, 1* (Le livre des modes, 1), Bucarest : ed. muzicala.
- [130] Vuza, D. T. (1982), « Aspects mathématiques dans la théorie modale d'Anatol Vieru, *Revue Roumaine de Mathématiques Pures et Appliquées*, Vol. 27, n°10, p.1091-1099.
- [131] Vuza, D. T. (1991-1993), « Supplementary Sets and Regular Complementary Unending Canons », en 4 parties, *Perspectives of New Music*, 29(2), p. 22-49, 1991 ; 30(1), p. 184-207, 1992 ; 30(2), p. 102-125, 1992 ; 31(1), p. 270-305, 1993.
- [132] Xenakis, I. (1971/1992), *Formalized Music*, Indiana University Press, 1971 (rev. Edition, Pendragon Press, Stuyvesant NY, 1992).
- [133] Zalewski, M. (1972), *Harmonia Teoretyczna*, PWSM.

Annexe

Valorisation, transmission des connaissances et direction de travaux d'étudiants

Le domaine des rapports entre mathématiques et musique n'étant pas encore « institutionnalisé », il m'a semblé tout à fait indispensable d'envisager des nouvelles actions visant à unifier les efforts de la communauté scientifique qui souhaite s'engager dans ce champ de recherche. Je voudrais souligner deux aspects de ce travail de valorisation : un premier aspect concernant les activités liées aux publications et un deuxième visant des actions spécifiquement pédagogiques. Je terminerai en présentant brièvement les travaux d'étudiants dont j'ai assuré la direction ou la co-direction jusqu'à présent.

3.1 Création d'un contexte éditorial favorable

Afin d'augmenter le caractère institutionnel des activités « mathémusicales », j'ai participé au projet de création de la première revue à comité de lecture sur mathématique/musique. Cette étape, indispensable à la constitution d'une véritable communauté de chercheurs travaillant sur ce nouveau domaine, a été discutée à plusieurs reprises à l'occasion des deux dernières rencontres de l'*American Mathematical Society* (Phoenix, Arizona 7-10 janvier 2004 et Evanston, Illinois, 23-24 octobre 2004) auxquelles j'ai eu l'occasion de participer. L'intérêt croissant pour ce champ de recherche de la part de l'AMS, qui depuis 2003 organise des séances spéciales sur les « Méthodes Mathématiques en Analyse Musicale », a donné un élan majeur au projet de création de la revue. Un comité éditorial a été constitué réunissant les plus grands spécialistes du domaine mathématique/musique (y compris des personnalités qui soutiennent ce projet à titre honorifique, tels Pierre Boulez en France et Milton Babbitt aux Etats-Unis). Le premier numéro du *Journal of Mathematics and Music* (édité par Taylor & Francis) a été présenté officiellement lors du premier Colloque International *Mathematics and Computation in Music* (Berlin, 18-20 mai, 2007). A cette occasion nous avons posé les bases pour la création d'une société savante, la *Society of Mathematics and Computation in Music*, dont je suis à présent le vice-président et qui se réunit tous les deux ans à l'occasion de la conférence Internationale MCM. La troisième édition des MCM sera organisée par l'équipe Représentations Musicales de l'Ircam et aura lieu pendant le Festival Agora (Juin 2011). Les actes de la conférence MCM sont régulièrement publiés chez Springer dans la collection CCIS.

Une action similaire a été menée pour encourager la publication d'ouvrages sur mathématiques et musique et, plus en général, sur les rapports entre la recherche musicale et l'activité scientifique. J'ai participé à la conception d'une nouvelle collection d'ouvrages intitulée « Musique/Sciences¹ » coéditée par l'Ircam et les éditions Delatour France, sous la direction de Jean-Michel Bardez (Président de la SFAM, Société Française d'Analyse Musicale) et moi-même. Elle a un caractère pluridisciplinaire et propose des ouvrages aussi bien en français, en anglais qu'en édition bilingue. Liste d'ouvrages publiés :

1. Plus d'information sur la collection « Musique/Sciences » à l'adresse : <http://www.ircam.fr/598.html>

1. G. Assayag, F. Nicolas, G. Mazzola dir. (2006), *Penser la musique avec les mathématiques ?*
2. A. Riotte, M. Mesnage (2006), *Formalismes et modèles musicaux*. Vol. 1 : « Préliminaires et formalismes généraux »
3. A. Riotte, M. Mesnage (2006), *Formalismes et modèles musicaux*. Vol. 2 : « Exemples de modélisation de partitions musicales »
4. C. Agon, G. Assayag, J. Bresson, eds (2006), *The OM Composer's Book 1*
5. F. Jędrzejewski (2006), *Mathematical Theory of Music*
6. G. Mazzola (2007), *La vérité du beau dans la musique* (en coll. avec Y.-K. Ahn)
7. J. Bresson, C. Agon, G. Assayag, eds (2007), *The OM Composer's Book 2*
8. M. Andreatta, J.-M. Bardez, J. Rahn dir. (2008), *Autour de la Set Theory. Rencontre musicologique franco-américaine*
9. M. Andreatta, J.-M. Bardez, J. Rahn eds (2008), *Around Set Theory. A French/American Musicological Meeting*
10. E. Rix et M. Formosa dir. (2008), *Vers une sémiotique générale du temps dans les arts*, Actes du Colloque « Les Unités Sémiotiques Temporelles (UST), Nouvel outil d'analyse musicale : théories et applications », Marseille 7-9 décembre 2005.
11. G. Assayag, A. Gerzso eds (2009), *Nouveaux Paradigmes pour l'Informatique Musicale*, Actes du colloque tenu à l'Ircam le 11 juin 2007
12. R. Hirs & B. Gilmore eds (2009), *Contemporary compositional techniques and OpenMusic*

J'ai également participé à la création d'une collection chez Springer (*Computational Music Science*), que je codirige avec Guerino Mazzola (University of Minnesota / University of Zürich). Liste d'ouvrages parus et à paraître² :

1. G. Mazzola & P.B. Cherlin, *Flow, Gesture, and Spaces in Free Jazz*—(2009)
2. G. Milmeister, *The Rubato Composer Music Software* (2009)
3. G. Mazzola, *Musical Performance - A Comprehensive Approach : Theory, Analytical Tools, and Case Studies* (à paraître fin 2010)

3.2 Nouvelles actions pédagogiques pour renforcer l'axe mathématiques/musique

Parallèlement à l'organisation du Séminaire MaMuX (Mathématique/Musique et relations avec d'autres disciplines) de l'Ircam, j'ai également participé à la création en 2004 d'un nouveau Séminaire *mamuphi* (Mathématique/Musique et Philosophie) à l'ENS, dont je partage la direction avec François Nicolas (compositeur) et Charles Alunni (philosophe et Directeur du Laboratoire Disciplinaire « Pensée des Sciences »). Nous avons également mis

2. Plus d'information sur la collection « Computational Music Sciences » à l'adresse : <http://www.springer.com/series/8349>

en place une nouvelle école de mathématiques pour musiciens et d'autres non-mathématiciens, organisée sous l'égide du Séminaire MaMuX et *mamuphi* et animée initialement par Yves André (ENS/CNRS) et actuellement par Pierre Cartier (IHES). Je vais décrire brièvement ces trois initiatives.

3.2.1 Séminaire MaMuX

Depuis 2001 je coordonne le Séminaire MaMuX (Mathématique/Musique et relations avec d'autres disciplines) de l'IRCAM (co-organisé avec Carlos Agon). Le Séminaire de travail MaMuX, cherche à développer une hypothèse de pertinence, à la fois musicale et mathématique, du rapport mathématiques/musique à travers une exploration des liens qui se créent avec d'autres disciplines dont la philosophie, l'épistémologie, la linguistique, l'informatique et les sciences cognitives. Les différentes séances qui ont eu lieu depuis 2001 peuvent être regroupées selon ces thèmes :

1. Formalisation et représentation des structures musicales ;
2. La *Set Theory* et la théorie transformationnelle ;
3. Méthodes mathématiques dans l'analyse musicale ;
4. Mosaïques et pavages dans la musique ;
5. Informatique musicale, logique et calculabilité ;
6. Sciences cognitives et théories de la perception ;
7. Philosophie et sémiotique des mathématiques et de la musique.

Comme je l'ai montré dans la première partie, ces axes thématiques autour desquels on a décidé d'orienter notre séminaire ont également été des catalyseurs importants dans ma propre activité de recherche (en particulier, les axes de recherche sur la *Set Theory* et la théorie transformationnelle et les mosaïques et pavages dans la musique). Le Séminaire MaMuX s'appuie maintenant sur une collaboration permanente avec des mathématiciens, notamment G. Mazzola (Université de Minnesota), F. Jedrzejewski (CEA, Saclay), Th. Noll (ESMuC, Barcellona) et E. Amiot³.

3.2.2 Séminaire *mamuphi*

Depuis 2004, et parallèlement au Séminaire MaMuX, je codirige avec François Nicolas et Charles Alunni le Séminaire « Musique et Mathématique ». Trois sujets ont été abordés jusqu'au présent dans le séminaire :

1. Les mathématiciens et la musique (2004-2005) ;

3. Un bilan détaillé des huit premières séances du séminaire (années 2001-2009) incluant la liste complète des participants, est disponible à l'adresse : <http://recherche.ircam.fr/equipes/repmus/mamux/BilanSemMaMuX2001-2009.html>

2. Questions de logique (2005-2006) ;
3. Intellectualité mathématique et musicale (2006-2007).

A partir de la saison 2007-2008, nous n'avons pas fixé de thématique précise pour ce séminaire qui est donc ouvert à de propositions d'interventions tout azimut sur les rapports entre mathématiques/musique et philosophe⁴. J'ai participé à ce séminaire avec plusieurs interventions consacrées aux ramifications philosophiques des modèles algébriques appliqués à la musique. Un numéro spécial de la *Revue de Synthèse* (sous la direction de François Nicolas, Charles Alunni et moi-même) est actuellement en préparation (date prévu de publication fin 2010).

3.2.3 Ecole mathématique pour musiciens et d'autres non-mathématiciens

J'ai parallèlement participé, toujours avec François Nicolas et Charles Alunni, à la mise en place d'une nouvelle école qui s'inscrit formellement dans le Séminaire MaMuX mais qui est organisée en partenariat avec le Séminaire *mamuphi*. Le principe en est tout à fait singulier car il s'agit de rendre compréhensible un concept central de la mathématique la plus contemporaine à des non-spécialistes, en tentant de les mener au cœur de la pensée mathématique la plus active, et sans économiser ni la spécificité de l'écriture mathématique. La première saison de l'école (2006-2009) était animée par Yves André (CNRS/ENS)⁵. La liste de s sujets traités pendant l'école comprend :

1. Espace (Topos et Algèbres d'opérateurs)
2. Symétries (Idées galoisiennes et Représentations linéaires)
3. Singularités
4. Dualité
5. L'infini

Depuis fin 2009 l'école est animée par Pierre Cartier (IHES)⁶.

4. Les enregistrements de la plus grande partie des séances, ainsi que la liste complète des intervenants, sont disponibles à l'adresse : <http://www.entretiens.asso.fr/maths/>.

5. Les enregistrements et les textes des différentes séances de l'école sont disponibles à l'adresse : <http://recherche.ircam.fr/equipes/repmus/mamux/EcoleYA.html>

6. Voir à l'adresse : <http://recherche.ircam.fr/equipes/repmus/mamux/EcolePC.html>

3.3 Direction de travaux d'étudiants

1. Hugues Zuber, *Vers une arithmétique des rythmes ?*, mémoire de Master 1 en mathématiques, ENS Cachan, 2005.

Premières tentatives de donner de conditions nécessaires et suffisantes sur un sous-ensemble d'un groupe cyclique $\mathbb{Z}_n$ en vue d'obtenir un canon rythmique mosaïque par translation. Ce travail, réalisé dans le cadre d'une stage de trois mois au sein de l'équipe Représentations musicales, a permis de comprendre la difficulté de cette question, qui reste, en générale, ouverte en théorie du pavage. Le mémoire s'attache également à l'étude des polynômes à coefficients 0 et 1, en vue d'une caractérisation polynomiale du pavage. Parmi les approches nouvelles proposées, on peut citer la recherche de fonctions de $\mathbf{Z}$ à valeur dans les entiers qui sont « compatibles » au pavage. L'espace des fonctions compatibles au pavage joue le rôle de revêtement de l'espace des rythmes qui pavent.

2. Vedad FamourZadeh, *La musique persane, Formalisation algébrique*, mémoire de Master, Université du Maine, 2005 (codirection avec Mondher Ayari).

Travail très original d'un étudiant qui avait suivi mon cours « Modèles mathématiques en informatique musicale » dans le cadre de la formation ATIAM de l'Ircam. Bien que par sa nature fondamentalement mélodique la musique persane semble incompatible avec une analyse algébrique, la définition d'une méthode et le choix d'outils mathématiques adéquats l'analyse algébrique est en mesure de rendre compte des lois de composition qui sont intuitivement appliquées par les musiciens pour la succession des mélodies. La compréhension des lois compositionnelles de la musique persane passe ainsi par l'étude des relations d'équivalence nécessaires pour traduire la « proximité musicale » entre deux séquences mélodiques.

3. Yun-Kang Ahn, *Aspects théoriques et informatiques de l'analyse transformationnelle*, mémoire d'ingénieur et de master ATIAM de l'Ircam/ Université de Paris VI, mai 2005.

Ebauche d'une étude computationnelle de l'analyse transformationnelle qui a été ensuite reprise de façon plus systématique dans la thèse de doctorat de Yun-Kang Ahn.

4. Gracienne Benoit, *Terminologie. La Set Theory*, mémoire de fin d'études en traduction, I.S.T.I. (Institut supérieur de traducteurs et interprètes de Bruxelles), mai 2005.

Mené dans le cadre d'une école de traduction, ce mémoire nous a permis d'approfondir un certain nombre de questions liés à la traduction en français des termes employés au sein de la tradition américaine. Avec un regard particulier sur la *Set Theory* d'Allen Forte, les fiches en version bilingue du glossaire sont disponibles en ligne⁷ accompagnées d'un réseau conceptuel qui montre la richesse du domaine et les relations entre les différents concepts.

5. Edouard Gilbert, *Polynômes cyclotomiques, canons mosaïques et rythmes k -asymétriques*, mémoire de Master ATIAM, mai 2007.

Un mémoire autour des liens étroits entre les canons rythmiques mosaïques et la k -asymétrie, une généralisation de la d'impairité rythmique proposée à l'origine par Simha Arom pour l'étude systématique des polyrythmies de l'Afrique centrale. En s'appuyant sur les polynômes

7. <http://www.termisti.refer.org/data/settheory/settheoryhome.html>

cyclotomiques et les conditions de Coven-Meyerowitz, le mémoire mène une étude de la notion d'ensemble spectral dans son applications au cas du pavage du cercle.

6. Giulia Fidanza, *Canoni ritmici a mosaico*, tesi di laurea, Università degli Studi di Pisa, Facoltà di SSMFFN, Corso di laurea in Matematica, 2008 (codirection avec F. Acquistapace, Univ. Pisa).

Un travail qui fait le point sur la théorie des canons rythmiques mosaïques, en reprenant en forme rigoureuse tous les résultats connus à présent, des théorèmes d'existence (conditions de Coven-Meyerowitz) jusqu'à propriété d'invariance par affinité du caractère mosaïque d'un canon rythmique. Outre à expliciter les liens entre les canons mosaïques et plusieurs conjectures en mathématiques (de la conjecture de Minkowski à celle de Fuglede), ce travail présente également de nouveaux résultats computationnels. De nouvelles solutions pour des Canons de Vuza sont obtenues à l'aide d'un algorithme proposé par de Bruijn, plus général de celui de Vuza et classifiées d'un point de vue paradigmatique (à travers les trois actions traditionnelles sur l'espace des solutions : celle du groupe cyclique, du groupe diédral et du groupe affine).

7. Julien Junod, *Etude combinatoire et informatique du caractère diatonique des échelles à sept notes*, Mémoire de Master ATIAM, Ircam/Université Paris 6, juin 2008. (dir. M. Andreatta)

Trois aspects de l'étude des échelles à sept notes et de leurs modes dans un total chromatique de douze notes sont abordés dans ce travail. Tout d'abord la taille d'un catalogue est calculé à l'aide du lemme de Burnside et du théorème de Polya, en tenant compte des équivalences par action des groupes cyclique, diédral et affine. La relation Z , la relation par permutation de la structure intervallique (démarche de Julio Estrada) ainsi que par permutation du contenu intervallique (une variante) sont également passées en revue. Ensuite, la représentation graphique du catalogue telle que proposée par Pierre Audétat avec sa cloche diatonique est formalisée mathématiquement. Chaque échelle est comparée à l'échelle diatonique au moyen de la modélisation traditionnelle du monde chromatique par un groupe cyclique, et du monde diatonique par une hélice des quintes, en faisant correspondre à chaque note sa distance en quintes par rapport au *ré*, qui occupe une position centrale dans le cycle des quintes. Finalement, les propriétés géométriques des différentes échelles sont comparées à l'aide de leur transformée de Fourier.

8. John Mandereau, *Étude des ensembles homométriques et leur application en théorie mathématique de la musique et en composition assistée par ordinateur*, Mémoire de Master ATIAM, Ircam/Université Paris 6, juin 2009 (dir. M. Andreatta & C. Agon)

Il s'agit du tout premier travail académique dédié à la théorie de l'homométrie en tant que généralisation de la relation Z dans la théorie des ensembles de classes de hauteurs. Ce mémoire contient également une présentation du concept de Système d'Intervalle Généralisé (SIG) à l'aide de la théorie de la mesure, ce qui généralise cette construction dans une direction que David Lewin avait indiqué (sans pourtant la poursuivre). Un des résultats nouveaux, liés à la récupération de la phase, établit l'impossibilité de construire une action de groupe décrivant la relation Z avec un groupe de permutations de $\mathbb{Z}_n$. Cela pointe une des limites majeures de l'approche paradigmatique dans la classification des structures musicales.

9. Yun-Kang Ahn, *L'analyse musicale computationnelle*, thèse en informatique, Ircam/Université de Paris 6, 2005-2009 (codirection avec Carlos Agon).

Thèse qui reprend le mémoire de Master de l'étudiant en étudiant quelques aspects algorithmiques de l'analyse transformationnelle. A partir de l'analyse du *Klavierstück III* de Stockhausen par David Lewin, la thèse corrobore le choix particulier du pentacorde générateur de la pièce faite par l'analyste à l'aide d'une modélisation réalisée en *OpenMusic*. Ce travail contient également une ébauche d'implémentation informatique des réseaux de Klumpenhouwer en vue d'une leur utilisation en analyse assistée par ordinateur.

10. Leone Slavich, *Strutture algebriche e topologiche nella musica del XX° secolo*, tesi di laurea in matematica, Università di Pisa, 2010 (codirection avec Francesca Acquistapace).

Travail qui expose les résultats obtenus à la suite d'un stage de recherche de six mois réalisé au sein de l'équipe Représentations musicales (dans le cadre d'une collaboration entre l'Ircam et le département de mathématiques de l'université de Pisa). Le mémoire contient plusieurs résultats nouveaux, obtenus, en particulier, dans deux domaines : la théorie des nœuds et la théorie des orbifolds. Premièrement, en ce qui concerne l'application de la théorie des nœuds en musique, le mémoire présente une double généralisation des diagrammes de Gauss, un outil initialement proposé par Franck Jedrzejewski pour la classification des séries dodécaphoniques. En proposant une définition plus générale d'un diagramme de Gauss, dans lesquels l'identification via les tritons est remplacée par un sous-groupe quelconque de $\mathbb{Z}_{12}$, le mémoire expose les outils d'algèbre combinatoire qui permettent de résoudre le problème de leur classification dans un groupe cyclique d'ordre n . Deuxièmement le mémoire présente la théorie des orbifolds appliqués à l'analyse musicale en suivant le modèle proposé par D. Tymoczko dont on montre la structure en terme de fibré de Seifert (dans le cas particulier des accords de trois notes). Cette approche est ensuite généralisée au cas de dimension n , en ouvrant ainsi des perspectives théoriques tout à fait nouvelles en analyse musicale.

11. Emmanuel Amiot, *Modèles algébriques et algorithmiques pour la formalisation mathématique de structures musicales*, thèse, université de Paris 6 / Ircam, 2010 (codirection avec Carlos Agon)

Une codirection atypique pour une thèse sur travaux résumant les principaux résultats obtenus par Emmanuel Amiot, une grosse partie desquels témoignant du caractère fécond de la collaboration entre ce mathématicien et l'équipe Représentations musicales de l'Ircam. On retrouve ainsi une bonne partie des sujets décrits dans le présent mémoire d'habilitation et bien d'autres, dont celle qu'Amiot considère comme sa contribution plus originale en théorie mathématique de la musique, à savoir une formalisation algébrique des mélodies autosimilaires (*self-similar melodies*) du compositeur Tom Johnson.

12. Guillaume Lachaussée, *Théorie des ensembles homométriques*, Stage de troisième année de l'Ecole Polytechnique, Master 1 de Mathématiques, juin 2010 (dir. M. Andreatta)

Un deuxième mémoire d'étudiant, après celui de John Mandereau, consacré à la théorie de l'homométrie dont certains résultats ont fait l'objet d'une analyse critique allant jusqu'à soulever le problème de leur véridicité. C'est le cas, en particulier, d'un résultat dû à F. A. Grünbaum et C. C. Moore dont la preuve (publiée dans l'article « The Use of Higher-Order Invariants in the Determination of Generalized Patterson Cyclotomic Sets », *Acta*

Cryst. A51, 1995,) n'est pas correcte et qui est pourtant repris par de travaux successifs sur l'homométrie. En s'appuyant initialement sur les travaux « classique » en théorie de l'homométrie, le mémoire présente et discute en détail une approche proposée récemment par Luke Pebody qui semble ouvrir des pistes nouvelles sur la restructurabilité des sous-groupes de $\mathbb{Z}_n$ à partir de leur 4-Deck (problème ouvert pour n impaire).

13. Louis Bigo, *Utilisation de la programmation spatiale pour l'analyse et la représentation symbolique musicale*, mémoire de Master ATIAM, Ircam/Université de Paris 6, septembre 2010. Codirection : Moreno Andreatta (IRCAM/CNRS), Jean-Louis Giavitto (IBISC/CNRS), Antoine Spicher (LACL), Olivier Michel (LACL) et Carlos Agon (IRCAM).

Une étude du paradigme de la programmation spatiale en vue de son application en analyse musicale. A partir d'approches formelles déjà existantes, le mémoire discute comment les intégrer au cadre général de la programmation spatiale. En particulier cette intégration est proposée au sein du langage MGS permettant la manipulation et la transformation de données organisées dans l'espace. Ceci soulève le problème de la pertinence d'outils topologiques pour la représentation d'objets musicaux, une question à la quelle ce travail répond positivement à travers de multiples exemples, tel le calcul des séries tous intervalles, la théorie néoriemannienne et la représentation géométrique de suites d'accords.

14. John Mandereau, *Modélisation informatique des processus musicaux : une étude de la Géométrie de l'Interaction et des Systèmes Evolutifs à Mémoire appliqués à l'informatique musicale* (titre provisoire), thèse de doctorat en mathématiques, Université de Pisa / Université de Paris 6 (codirection M. Andreatta)

Le projet de cette thèse (dont le sujet précis reste en cours de définition) part du constat que l'on assiste aujourd'hui à un véritable tournant « mathématique » en informatique, comme le témoigne l'existence de plusieurs groupes de travail qui remettent en question, en particulier, le rôle de la géométrie dans la logique et l'informatique (Geocal, géométrie de la cognition, géométrie de l'interaction...). L'informatique musicale représente un cas d'étude intéressant, car elle s'attache à un objet complexe comme la musique dont elle essaie de modéliser les aspects computationnels susceptibles de multiples représentations et formalisations. Bien que le lambda calcule ait largement montré la pertinence du paradigme fonctionnel pour la composition assistée par ordinateur (par exemple dans *OpenMusic*, environnement de programmation visuelle conçu et développé par l'équipe Représentations musicales de l'Ircam), il semble nécessaire d'envisager d'autres modèles de calcul susceptibles de constituer des alternatives pertinentes en termes d'expressivité. L'un des enjeux de cette thèse est d'étudier l'applicabilité en informatique musicale de deux démarches, l'une basée sur la géométrie non commutative (la géométrie de l'interaction de Girard) et l'autre s'appuyant sur la théorie des catégories (les systèmes évolutifs à mémoire d'A. Ehresmann). Si la géométrie de l'interaction (GdI) propose un dépassement du cadre linguistique en logique, les systèmes évolutifs à mémoire (SEM) modélisent des systèmes complexes à l'aide de la catégorie des graphes dirigés. L'enjeu majeur de ce projet de thèse est celui de mettre en lumière les multiples relations entre ces deux approches, i.e. GdI et SEM, qui ne sont qu'apparemment très éloignées. En effet une même démarche, que l'on pourrait qualifier de « diagrammatique », guide les deux approches, dont une application à l'informatique musicale pourrait poser les bases pour des nouveaux paradigmes de programmation pour la musique.

