



Département
Génie Mathématique

Rapport de Stage
**Géométrie différentielle, groupes
de Lie et transformations.**

Juin à Septembre 2011

Florie-Anne Baugé

Table des matières

1	Introduction	1
2	Théorème d'Euler-Lagrange et géodésiques	3
2.1	Principe de moindre action et variété Riemannienne	3
2.1.1	Variétés Riemanniennes : présentation et propriétés	4
2.1.2	Recherche des géodésiques sur une variété Riemannienne	5
2.2	Un exemple d'application : les géodésiques d'une sphère	7
2.2.1	Géodésiques en coordonnées sphériques	7
2.2.2	Géodésiques en coordonnées stéréographiques	11
2.3	Quantités conservées et champs de Killing	14
2.3.1	Base orthonormale unitaire du plan tangent	15
2.3.2	Champ de vecteurs de Killing	15
2.3.3	Vecteur vitesse, champs de Killing, géodésiques et quantité conservée	18
3	Géodésiques et groupe de transformations	21
3.1	Groupe des transformations affines de la droite des réels \mathbb{R}	21
3.2	Algèbre de Lie associée à \mathbf{G}	24
3.2.1	Approche mathématique	24
3.2.2	Correspondances physiques	26
3.3	Variété Riemannienne isomorphe à \mathbf{G} : le Demi-plan de Poincaré	28
3.3.1	Métrique induite sur l'espace tangent	28
3.3.2	Tiré-arrière par la droite	29
3.3.3	Le demi-plan de Poincaré	29
3.3.4	Immersion dans \mathbb{R}^3	31
3.4	Opérateurs adjoints, co-adjoints et carte des algèbres	33
3.4.1	Opérateurs adjoints	34
3.4.2	Opérateurs co-adjoints	37
3.5	Géodésiques et quantités conservées	45
3.5.1	Équations d'Euler-Poincaré	45
3.5.2	Quantités conservées le long des géodésiques	47
3.5.3	Détermination des géodésiques à partir de l'équation d'Euler-Poincaré	49
3.6	Exemple d'application : transformation de signaux basée sur la théorie de l'information	52
4	Conclusion	53
5	Annexes	55
5.1	Principe de moindre action pour une variété Riemannienne : équation géodésique	55
5.1.1	Minimisation de la fonctionnelle énergie	55
5.1.2	Prise en compte du système de coordonnées	56
5.1.3	Réécriture à l'aide des Symboles de Christoffel	57
5.2	Changement de variables pour intégrer le système différentiel dans l'exemple de la sphère	57

1 Introduction

Depuis la deuxième moitié du XVII^{ème} siècle, les systèmes physiques peuvent être étudiés en utilisant les lois formulées par Sir Isaac Newton, et notamment son principe fondamental de la dynamique aussi appelé deuxième loi de Newton qui peut se résumer ainsi :

« la somme des forces sur un corps est égale à sa masse multipliée par son accélération » I.
Newton

A la même époque Pierre de Fermat posait les fondements de l'optique géométrique avec son principe de Fermat :

« La lumière se propage d'un point à un autre sur des trajectoires telles que la durée du parcours soit extrémale. » P. de Fermat

Ce n'est qu'au XVIII^{ème} siècle que ces deux notions, en apparence éloignées, furent mises en relation. C'est Pierre Louis Moreau de Maupertuis qui eut le premier l'intuition que ces deux lois découlaient d'un même phénomène plus général. Cette intuition lui vint de ses convictions philosophiques qui voulaient que tout fut ordonné et émane de Dieu. Il parla alors d'Action et en donna le premier une définition accompagnée d'une propriété où apparaît la volonté de l'Être suprême :

« L'Action est proportionnelle au produit de la masse par la vitesse et par l'espace. Maintenant, voici ce principe, si sage, si digne de l'Être suprême : lorsqu'il arrive quelque changement dans la Nature, la quantité d'Action employée pour ce changement est toujours la plus petite qu'il soit possible. » P.L.M. de Maupertuis

Ce sont ensuite Sir William Rowan Hamilton, Leonhard Euler et Joseph-Louis Lagrange, entre autres, qui formalisèrent cette intuition sous la forme du principe de moindre action que nous connaissons aujourd'hui, dont découle le théorème d'Euler-Lagrange. Celui-ci permet d'obtenir de façon analytique les équations des courbes minimisantes de l'Action. On les nomme les courbes géodésiques ou courbes de plus court chemin en référence au principe de Fermat.

C'est en s'évertuant à ce que cette formalisation soit totalement analytique qu'ils fondèrent la théorie variationnelle pour s'abstraire totalement de toute géométrie. Leurs travaux ont alors permis de montrer que l'étude de n'importe quel système physique pouvait être ramenée à un problème de minimisation d'une action et c'est ainsi qu'a pu naître la théorie quantique qui n'aurait jamais vu le jour si la physique en était restée aux lois de Newton.

L'équipe d'Acoustique Instrumentale de l'IRCAM a étudié ou créé de nombreux modèles physiques d'instruments de familles différentes. Construire un modèle physique c'est trouver les causes de la production du son par un instrument. Pour faire simple, un instrument peut être représenté par un excitateur et un résonateur. A priori les équations qui régissent ces éléments sont non-linéaires et complexes. On peut dans un premier temps considérer les résonateurs régis par des lois linéaires (petites variations par rapport à des situations d'équilibre) ce qui permet alors d'utiliser la théorie modale. Cependant, lorsque l'instrument fonctionne à fort niveau des non-linéarités apparaissent dans les équations de propagation du son, non-linéarités qui sont l'expression d'une certaine courbure.

Résoudre des systèmes non-linéaires est une tâche difficile : problèmes numériques pour la simulation, stabilité ... La géométrie différentielle va permettre de travailler dans un cadre plus général. En effet, elle a été conçue

pour être appliquée à des variétés, qui sont des espaces dont les éléments peuvent ne pas être simplement des points mais par exemple des distributions ou des matrices. Et surtout, elle permet d'interpréter géométriquement certains résultats, qui présentés de manière analytique peuvent sembler bien compliqués. Voici un exemple de la présentation de David Roze extrait de sa thèse effectuée à l'IRCAM :

« Une des étapes de la synthèse sonore par modèle physique consiste à résoudre la dynamique d'un résonateur excité par une force (action du musicien). Cette force et ses caractéristiques sont très importantes puisqu'elles traduisent musicalement toute la gestuelle du musicien. Pour des amplitudes de force atteignant un certain seuil, l'hypothèse de linéarité n'est plus valable. Par exemple, les auditeurs peuvent entendre pour les nuances fortissimo une modification du timbre de l'instrument de musique. Le travail de cette thèse consiste à approximer la dynamique de modèles non linéaires par les séries de Volterra (outil d'approximation de systèmes faiblement non linéaires) afin d'améliorer le réalisme de la synthèse. Ces modèles sont au nombre de trois : deux modèles de cordes prenant en compte la variation de tension (Kirchhoff et Kirchhoff-Carrier) et le modèle de poutre de Reissner (dont la cinématique est définie à l'aide d'un groupe de Lie) afin d'exprimer le couplage entre les six degrés de liberté. Pour chacun de ces modèles, le calcul des noyaux de Volterra (définissant la série de Volterra) sera réalisé ainsi que la structure de simulation mise en œuvre à partir des résultats obtenus. » David Roze [13]

Par suite, il est possible de ré-envisager les résonateurs linéaires comme des points dans un espace courbe. En effet, ces résonateurs peuvent être décrits avec le même formalisme puisqu'on peut les voir comme un ensemble de fréquences de résonances avec quelques caractéristiques en plus.

Quoi qu'on fasse, pour toute application, il est nécessaire de se familiariser avec les outils de la géométrie différentielle. C'est donc ce que nous allons faire en commençant dans le premier chapitre par voir comment le théorème d'Euler-Lagrange nous permet de déterminer ces géodésiques. Puis, à l'aide d'un exemple, nous illustrerons le fait que selon le système de coordonnées dans lequel on se place, le système différentiel permettant de trouver ces équations est plus ou moins compliqué à résoudre. Au passage nous poursuivrons l'exemple pour illustrer que le long des géodésiques certaines quantités sont conservées.

Au vue des complications liées aux systèmes de coordonnées nous essaierons ensuite dans le deuxième chapitre de nous en abstraire en remarquant que, si le système physique étudié présente des symétries (au sens large), alors son comportement relève de l'action d'un groupe. A ce moment là nous introduirons la notion de **groupe et d'algèbre de Lie** et nous verrons que le théorème d'Euler-Poincaré nous permettra de déterminer ces géodésiques en s'appuyant sur la conservation de certaines quantités le long des géodésiques. Dans toute cette partie, afin de rendre notre propos moins abstrait, nous nous appuierons sur l'exemple de l'action d'un groupe en particulier : celui des transformations affines de la droite des réels. Nous terminerons ce chapitre en appliquant notre travail à des signaux dont le spectre sera représenté comme une densité de probabilités. Alors la théorie de l'information nous permettra d'y associer une variété : l'espace de l'ensemble des densités de probabilité d'une même famille (par exemple les densités de type Gaussienne), muni de la métrique de Fischer. On remarquera que dans le cas des Gaussiennes cette variété est la même que celle étudiée pour le groupe des transformations de la droite des réels, ce qui nous permettra de développer un exemple en prise directe avec ce que nous aurons vu précédemment : la transformation d'une Gaussienne en une autre.

Mais pour l'instant, commençons par le commencement et étudions de plus prêt le théorème d'Euler-Lagrange.

2 Théorème d'Euler-Lagrange et géodésiques

Ce premier chapitre va nous servir à nous fixer les idées sur ce que sont les géodésiques et comment les obtenir à partir du théorème d'Euler-Lagrange.

Celui-ci étant extrêmement général, il est applicable à toute sorte d'espaces de configurations, du moment qu'ils sont différentiables. Cette étude sera axée sur les variétés Riemanniennes qui ont pour particularité, en plus d'être différentiables, d'être munies d'une métrique qui permet d'introduire une notion de distance et donc de plus court chemin. Un exemple sera traité, celui de la recherche des géodésiques sur une variété simple : la sphère. Deux systèmes de coordonnées différents seront alors étudiés : les coordonnées sphériques et les coordonnées stéréographiques. Ceci afin d'illustrer que, même si quelque soit le système de coordonnées utilisé les géodésiques d'une variété sont toujours les mêmes, la difficulté de leur détermination est totalement liée à ces systèmes de coordonnées.

Mais, tout d'abord, voici le théorème d'Euler-Lagrange dans son cadre le plus général.

2.1 Principe de moindre action et variété Riemannienne

Le principe d'Hamilton permet de dire qu'un système physique, dont le lagrangien vit sur un espace des configurations quelconque (du moment qu'il est différentiable), évoluera de manière à minimiser son action i.e. l'intégrale de son lagrangien. Euler et Lagrange sont allés plus loin en donnant un système différentiel vérifié par ce minimum.

Mais avant de donner la formulation du théorème qui en découle, un rappel de ce qu'est un lagrangien et comment il permet de définir l'action d'un système :

Définition 1 : Lagrangien et action

Un lagrangien L est une quantité qui décrit l'énergie d'un système physique et qui, en notant E_c l'énergie cinétique totale du système et E_p son énergie potentielle totale, s'écrit :

$$L = E_c - E_p \tag{2.1}$$

C'est une fonction qui vit sur l'espace des configurations du système noté $(q(t), \dot{q}(t))$ d'où $L = L(t, q(t), \dot{q}(t))$.

On définit alors l'action comme étant l'intégrale par rapport au temps de ce lagrangien, soit :

$$A = \int L(t, q(t), \dot{q}(t)) dt \tag{2.2}$$

Armé de cette définition on peut alors énoncer le théorème d'Euler-Lagrange donnant le système différentiel vérifié par les trajectoires $q(t)$ d'action minimale.

Théorème 1 : Théorème d'Euler-Lagrange

Soit un Lagrangien $L(t, q(t), \dot{q}(t))$. Si $q(t)$ minimise la fonctionnelle $\int L(t, q(t), \dot{q}(t)) dt$ alors elle satisfait :

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0 \tag{2.3}$$

Ce théorème est extrêmement général. Dans la suite, seule sera présentée une restriction de son étude aux variétés Riemanniennes. En effet, un son se propageant dans un résonateur a une énergie cinétique mais pas d'énergie potentielle. Or l'expression du lagrangien sur une variété Riemannienne est quadratique et ne dépend que de l'énergie cinétique du système.

Voici tout d'abord quelques généralités sur les variétés Riemanniennes.

2.1.1 Variétés Riemanniennes : présentation et propriétés

Définition 2 : Variété Riemannienne [21]

Une variété riemannienne est une variété différentielle V munie en chacun de ses points M d'une forme quadratique définie positive g_M sur l'espace tangent $T_M V$ en M . La donnée g est appelée **métrique Riemannienne** sur V et permet de définir une notion de distance entre deux points sur la variété. Les métriques Riemanniennes existent sur toute variété différentielle.

Remarque 1. *L'ensemble des espaces tangents en chacun des points, associés à la métrique du point, forment le fibré tangent de la variété $TV = \bigcup_{M \in V} (T_M V, g_M)$ et dans le cas des variétés Riemanniennes c'est une union d'espaces vectoriels.*

Pour illustrer ce qu'est une métrique, ci-après est développé l'exemple de l'espace \mathbb{R}^3 .

Exemple 1 : La métrique de \mathbb{R}^3 :

Prenons l'espace \mathbb{R}^3 qui est l'espace de vie des objets de tous les jours. Il s'agit bien d'une variété différentielle et dans laquelle on mesure quotidiennement des distances à l'aide d'une règle ou d'un mètre par exemple. Et il se trouve que ce mètre a certaines propriétés : il est tel que dans toutes les directions la façon de mesurer les distances est la même, qu'elle est indépendante de l'endroit où l'on se trouve dans l'espace et que si on se déplace avec une vitesse de norme 1 pendant une unité de temps alors on aura avancé d'une unité de distance. Synthétiquement, il s'agit là de la notion usuelle de distance. Alors l'espace \mathbb{R}^3 avec cette notion de distance est bien une variété différentiable munie d'une métrique et donc Riemannienne. Explicitons cette métrique.

Pour cela, munissons cette variété d'un système de coordonnées (x, y, z) . Soit $\gamma(t)$ une courbe dans cette variété passant par deux points P_1 et P_2 respectivement au temps t_1 et t_2 . Cette courbe peut s'exprimer en fonction des coordonnées comme $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))^T \in \mathbb{R}^3$. Alors sa longueur entre les deux points P_1 et P_2 sera donnée par la somme (sous forme d'intégrale) des longueurs infinitésimales ds à chaque instant t entre t_1 et t_2 . D'après ce qui précède sur la mesure des distances dans \mathbb{R}^3 , cette longueur de déplacement infinitésimal le long de $\gamma(t)$ s'écrira $ds = \|d\gamma(t)\| = \|\dot{\gamma}(t)\|dt$, où $\|\cdot\|$ est la norme usuelle dans \mathbb{R}^3 et $\dot{\gamma}(t)$ la vitesse de parcours de la courbe à l'instant t . D'où, en fonction du système de coordonnées, on a :

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt$$

Et cette équation peut être réécrite comme :

$$ds^2 = (dx \quad dy \quad dz) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_g \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

C'est cette matrice g qui est appelée la métrique de la variété Riemannienne.

Dans le cas de \mathbb{R}^3 la métrique est la matrice identité ce qui résume bien les propriétés citées sur le mètre permettant de mesurer usuellement les distances dans \mathbb{R}^3 (identique dans toutes les directions, indépendant du temps ...). Cet exemple permet également d'illustrer que les notions de distances et de métrique sont intrinsèquement liées.

Remarque 2. *Un abus de langage fait que souvent le mot métrique désigne à la fois la matrice g et l'élément infinitésimal de longueur au carré ds^2 .*

Après cette illustration par un exemple de ce qu'est une métrique Riemannienne, en voici une définition générale, accompagnée de la définition du produit scalaire et de la norme qu'elle induit.

Définition 3 : Métrique Riemannienne

Soit V une variété Riemannienne de dimension n et M un point de cette variété de coordonnées $(x_1 \dots x_n)$. Alors la métrique g de cette variété au point M est une matrice carrée de dimension n , définie positive, telle que l'élément de longueur infinitésimal ds^2 s'écrive :

$$ds^2 = (dx_1 \dots dx_n) g \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Et cette métrique g dépend du point M .

Sous les hypothèses de cette définition, en notant g_{ij} les éléments de la métrique g au point M , pour tout vecteur \vec{u} et \vec{v} de $T_M V$, l'espace tangent au point M de la variété V , on définit le produit scalaire sur la variété au point M induit par la métrique, noté $\langle \cdot, \cdot \rangle_V \Big|_M$, comme étant :

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_V \Big|_M = \vec{u}^T g \vec{v} \quad (2.5)$$

et la norme induite du vecteur \vec{u} au point M , notée $\|\cdot\|_V \Big|_M$, est :

$$\|\vec{u}\|_V \Big|_M = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle_V \Big|_M} \quad (2.6)$$

Remarque 3. *Il est important de préciser que l'on travaille au point M à cause de la dépendance de la métrique g aux coordonnées du point. De plus, de part la définition du produit scalaire sur une variété Riemannienne, il est nécessaire si l'on veut comparer deux vecteurs du fibré tangent (i.e. faire leur produit scalaire), de les transporter en un même point de la variété. C'est la notion de connexion, qui sera abordée un peu plus tard, qui permet ce transport.*

2.1.2 Recherche des géodésiques sur une variété Riemannienne

On rappelle que le théorème d'Euler-Lagrange donne une équation vérifiée par les courbes minimisantes de l'intégrale d'un lagrangien. Si ce lagrangien est défini sur un espace de configurations qui est une variété Riemannienne, on dit que l'équation d'Euler-Lagrange est vérifiée par les géodésiques de la variété, où les géodésiques sont des courbes sur la variété définies comme ceci :

Définition 4 : Géodésique

Soit une variété Riemannienne. Une géodésique sur cette variété est une courbe minimisante de l'action du système physique associé, et c'est aussi une courbe sur la variété permettant de relier deux points de celle-ci par le plus court chemin (principe de minimisation du temps de parcours à vitesse constante).

Il s'agit d'une généralisation aux espaces courbes de la notion planaire : "aller tout droit" (la ligne droite étant le plus court chemin sur un plan).

Soit $\vec{\gamma}(t)$ une courbe paramétrée par le temps et exprimée dans un système de coordonnées par $\vec{\gamma}(t) = (x_1(t) \dots x_i(t) \dots x_n(t))^T$, évoluant sur une variété Riemannienne de métrique la matrice *symétrique* g qui

dépend des $x_i(t)$. Notons g_{ij} les éléments de la métrique. La mesure infinitésimale de longueur de la courbe sur la variété peut alors, d'après (2.4), s'écrire comme :

$$ds^2 = \vec{d}\vec{\gamma}(t)^T g \vec{d}\vec{\gamma}(t) = \dot{\gamma}(t)^T g \dot{\gamma}(t) dt^2$$

Ainsi on remarque que ds , qui peut être vu comme un petit déplacement le long de $\vec{\gamma}(t)$, est tel que s dépend du temps puisque $ds = \dot{s}dt$ avec $\dot{s} = \sqrt{\dot{\gamma}^T g \dot{\gamma}} = \|\dot{\gamma}(t)\|_V$.

Puisque chercher les géodésiques sur une variété Riemannienne revient à trouver les courbes de longueur minimale, i.e. de temps de parcours minimal à vitesse constante, sur cette variété, on peut formuler ce problème comme un problème de minimisation d'une fonctionnelle $J(\vec{\gamma}(t))$, qui à une courbe $\vec{\gamma}(t)$ sur la variété, passant par deux points quelconques $P_1 = \vec{\gamma}(t_1)$ et $P_2 = \vec{\gamma}(t_2)$ de celle-ci, associera sa longueur entre ces deux points. Cette fonctionnelle s'écrit alors :

$$J(\vec{\gamma}) = \int_{\vec{\gamma}} ds = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{\gamma}^T g \dot{\gamma}} dt \quad (2.7)$$

Remarque 4. Le deuxième membre de cette double égalité nous donne la longueur de la courbe entre les deux points. Le troisième membre est une réécriture de cette longueur en terme de vitesse et de temps de parcours. En particulier, si on prend la norme de la vitesse de parcours de la courbe \dot{s} constante alors minimiser J reviendra à trouver la courbe qui, partant de P_1 arrivera en P_2 le plus tôt. Autrement dit on minimisera le temps de parcours à vitesse constante.

D'autre part, $J(\vec{\gamma})$ représente l'Action du système étudié, et s'écrit comme l'intégrale du lagrangien $L(t, \vec{\gamma}(t), \dot{\vec{\gamma}}(t)) = \sqrt{\dot{\gamma}^T g \dot{\gamma}}$. Il s'agit d'une forme quadratique sur les vitesses i.e. d'une énergie cinétique. Autrement dit, le lagrangien d'une variété Riemannienne est exprimé uniquement comme une énergie cinétique (pas d'énergie potentielle). De plus, l'espace $(\vec{\gamma}(t), \dot{\vec{\gamma}}(t))$ est appelé espace des configurations du système physique, et c'est lui qui est une variété Riemannienne.

Le problème revient donc à chercher la courbe $\vec{\gamma}^*(t)$ qui, parmi toutes les courbes du type $\vec{\gamma}_\epsilon(t) = \vec{\gamma}^*(t) + \epsilon \vec{\delta}\vec{\gamma}(t)$, minimise l'Action J . Autrement dit, la courbe $\vec{\gamma}^*(t)$ cherchée est telle que la fonctionnelle $J(\vec{\gamma}^*(t))$ soit minimale, ce qui peut encore s'écrire sous la forme :

$$\delta J(\vec{\gamma}^*(t)) = 0 \quad \forall \vec{\delta}\vec{\gamma}(t) \quad (2.8)$$

où $\vec{\delta}\vec{\gamma}(t)$ est une petite variation appliquée à $\vec{\gamma}^*(t)$. La variation de J ainsi définie sera calculée à l'aide de la dérivée directionnelle définie ci après en (2.9), de telle sorte que l'équation d'Euler-Lagrange sur une variété Riemannienne s'écrira :

$$(2.8) \Leftrightarrow \langle \nabla_q L - \frac{d}{dt}(\nabla_{\dot{q}} L), \delta q \rangle = 0 \quad \forall \vec{\delta}q(t)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\nabla_q L - \frac{d}{dt}(\nabla_{\dot{q}} L) = 0}$$

Où la dérivée directionnelle est définie ainsi :

Définition 5 : Dérivée directionnelle

Notons $\vec{q}_\epsilon(t) = \vec{q}(t) + \epsilon \vec{\delta}\vec{q}(t)$. Alors la dérivée directionnelle de la fonctionnelle $J(\vec{q}(t))$ dans la direction $\vec{\delta}\vec{q}(t)$ s'écrit :

$$\delta J(\vec{q}(t)) = \langle \nabla J, \vec{\delta}\vec{q} \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{J(\vec{q}_\epsilon) - J(\vec{q})}{\epsilon} \quad (2.9)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire usuel tel que $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{x}^T \vec{y}$.

Alors, en exprimant l'équation obtenue dans un système de coordonnées tel que $\vec{\gamma}(t) = (x_1(t) \dots x_i(t) \dots x_n(t))^T$, et en tirant partie de la symétrie de la métrique g , on obtient que les géodésiques de la variété vérifient le système différentiel suivant (c.f. annexes 5.1) :

$$\ddot{x}_k + \dot{x}_i \dot{x}_j \Gamma_{ij}^k = 0 \quad k = 1 \dots n \quad (2.10)$$

où les quantités Γ_{ij}^k sont appelées symboles de Christoffel et sont définies¹ par

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{km} (g_{im,j} + g_{jm,i} - g_{ij,m}) \quad (2.11)$$

La résolution de ces n équations différentielles permet de connaître l'évolution temporelle de chaque composante $x_k(t)$ de la courbe $\vec{\gamma}(t)$ dans le système de coordonnées fixé.

Voici une illustration de ce résultat sur une variété Riemannienne simple : la sphère. Cet exemple permettra de mettre en évidence l'influence du système de coordonnées choisit sur la difficulté de résolution des équations différentielles nécessaires à l'obtention des géodésiques.

2.2 Un exemple d'application : les géodésiques d'une sphère

Dans cette section seront déterminées les courbes géodésiques de la sphère de rayon 1, et cela à partir de deux systèmes de coordonnées différents : les coordonnées sphériques et les coordonnées stéréographiques. Ceci permettra tout d'abord de montrer que, quelque soit le système de coordonnées placé sur la variété, les géodésiques sont les mêmes i.e. elles sont intrinsèques à sa géométrie. Et d'autre part cela illustrera que le système différentiel permettant de trouver ces géodésiques est d'une difficulté de résolution fonction du système de coordonnées choisit. On dit alors que les systèmes de coordonnées introduisent des non-linéarités de paramétrage sur le système différentiel.

2.2.1 Géodésiques en coordonnées sphériques

Une sphère de rayon $r = 1$ peut être représentée comme l'immersion dans \mathbb{R}^3 - muni des coordonnées (x, y, z) - d'une portion du plan - muni des coordonnées (θ, ϕ) où θ et ϕ sont deux angles tels que $\theta \in [0; \pi]$ et $\phi \in [0; 2\pi]$. Et la fonction d'immersion f permettant de passer de l'un à l'autre s'écrit :

$$f(\theta, \phi) = \begin{cases} x = \sin \theta \cos \phi \\ y = \sin \theta \sin \phi \\ z = \cos \theta \end{cases} \quad (2.12)$$

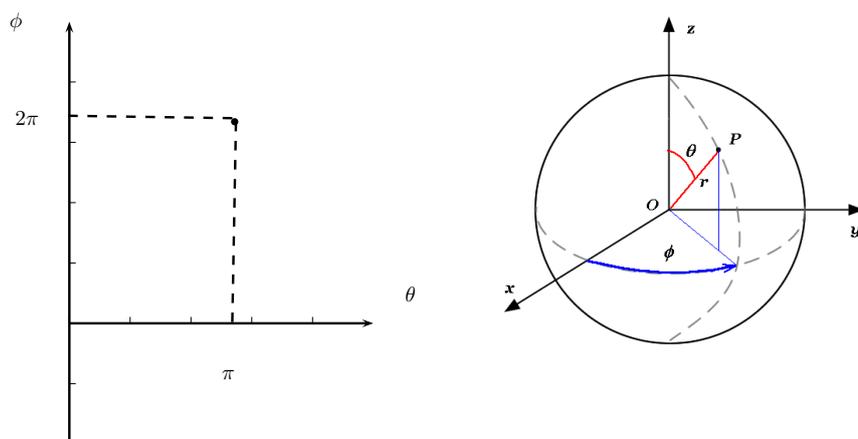


FIGURE 2.1 – Immersion du plan (θ, ϕ) dans \mathbb{R}^3 : la sphère de rayon 1.

1. En fait, ces symboles de Christoffel sont ceux définis pour une connexion particulière : la connexion de Levi-Cevita. Ses propriétés caractérisent la variété riemannienne. Notamment, les géodésiques, courbes minimisant localement la distance riemannienne, sont exactement les courbes pour lesquelles le vecteur vitesse se transporte parallèlement.

Métrie Riemannienne de la sphère en coordonnées sphériques

L'élément infinitésimal de longueur dans \mathbb{R}^3 s'écrit $ds^2(x, y, z) = dx^2 + dy^2 + dz^2$ (c.f. exemple 1), ce qui peut se réécrire en fonction de θ et ϕ comme :

$$ds^2(x(\theta, \phi), y(\theta, \phi), z(\theta, \phi)) = dx^2(\theta, \phi) + dy^2(\theta, \phi) + dz^2(\theta, \phi)$$

D'où, en remplaçant à l'aide de (2.12) :

$$ds^2(x(\theta, \phi), y(\theta, \phi), z(\theta, \phi)) = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 = dS^2(\theta, \phi) \quad (2.13)$$

où $dS^2(\theta, \phi)$ est l'élément infinitésimal de mesure des longueurs dans la portion de plan (θ, ϕ) .

Remarque 5. Le fait de remplacer x, y et z par $x(\theta, \phi), y(\theta, \phi)$ et $z(\theta, \phi)$ s'appelle faire le tiré arrière de ds^2 par f , aussi appelé avec un anglicisme *pulling-back*. De plus, puisque $ds^2(x, y, z) = dS^2(\theta, \phi)$ alors le tiré-arrière par f de la métrique de la variété d'arrivée est la métrique de celle de départ. Autrement dit, la métrique est préservée par f et donc les distances sont conservées. Alors f est appelée une isométrie.

On peut réécrire (2.13) sous forme matricielle ce qui fait alors apparaître la métrique g de la variété comme ceci :

$$ds^2 = \begin{pmatrix} d\theta & d\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\theta \\ d\phi \end{pmatrix}$$

D'où, la métrique associée à la sphère en coordonnées sphériques est symétrique et s'écrit :

$$g(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

L'obtention de cette métrique permet de poursuivre en utilisant les résultats de la section précédente pour déterminer le système différentiel vérifié par les géodésiques de la sphère.

Obtention du système différentiel d'Euler-Lagrange

D'après (2.7), la fonctionnelle à minimiser pour trouver les géodésiques de la sphère s'écrit, en coordonnées sphériques :

$$\int ds = \int \sqrt{d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2} = \int \sqrt{\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2} dt = \int L(t, \theta(t), \dot{\theta}, \dot{\phi}) dt$$

où L est le Lagrangien considéré.

Pour écrire l'équation (2.10) dans ce système de coordonnées il faut tout d'abord calculer les symboles de Christoffel associés à la métrique. On rappelle que ces symboles s'écrivent :

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{km} (g_{mi,j} + g_{mj,i} - g_{ij,m})$$

et que g étant symétrique les Γ_{ij}^k le sont également, i.e. : $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$. D'autre part, la matrice des g^{ij} qui est la matrice inverse de g , est telle que $g^{ij} g_{jk} = \delta_k^i$ et donc g^{-1} est symétriques. D'où :

$$g^{-1} = (g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sin^2 \theta} \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \Gamma_{\theta\phi}^\theta &= \Gamma_{\phi\theta}^\theta &= 0 \\ \Gamma_{\theta\phi}^\phi &= \Gamma_{\phi\theta}^\phi &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\ \Gamma_{\theta\theta}^\theta &= 0 \\ \Gamma_{\theta\theta}^\phi &= 0 \\ \Gamma_{\phi\phi}^\theta &= 0 \\ \Gamma_{\phi\phi}^\phi &= -\cos \theta \sin \theta \end{aligned}$$

Alors, dans ce système de coordonnées, où la courbe $\vec{\gamma}(t)$ est paramétrée par le temps telle que $\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \phi(t) \end{pmatrix}$, (2.10) est équivalent à :

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \cos \theta \sin \theta \dot{\theta}^2 \\ \ddot{\phi} = -\frac{2 \cos \theta}{\sin \theta} \dot{\theta} \dot{\phi} \end{cases} \quad (2.15)$$

Les géodésiques de la sphère de rayon **1** en coordonnées sphériques vérifient donc ces équations différentielles. Pour obtenir ces courbes géodésiques, il faudrait résoudre ces équations différentielles ce qui n'est pas réalisable de façon simple, d'où, l'introduction au paragraphe suivant d'une reparamétrisation du lagrangien.

Reparamétrisation du lagrangien et géodésiques

Pour une sphère de rayon **1**, étudiée en coordonnées sphériques, la quantité à minimiser est la fonctionnelle : $\int ds = \int \sqrt{d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi}$. Or on peut réécrire cela comme :

$$\int \sqrt{d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi} = \int \sqrt{1 + [\sin^2 \theta \phi'(\theta)]^2} d\theta = \int \mathcal{L}(\theta, \phi'(\theta)) d\theta \quad (2.16)$$

où $\mathcal{L}(\theta, \phi'(\theta))$ est une reparamétrisation du lagrangien décrivant le système étudié, qui est alors non-plus paramétré par le temps mais par l'angle θ . Et il est à noter que cette écriture du lagrangien est indépendante de $\phi(\theta)$ donc $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$, d'où si l'on écrit l'équation d'Euler-Lagrange correspondante on a :

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi'} \right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi'} = cste = C \quad (2.17)$$

Or $\mathcal{L}(\theta, \phi'(\theta)) = \sqrt{1 + [\sin^2 \theta \phi'(\theta)]^2}$, d'où, en calculant $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi'}$, et en cherchant à exprimer ϕ' en fonction de θ et C , on obtient, pour $|C| < 1$:

$$\phi'(\theta) = \frac{d\phi}{d\theta} = \frac{C}{\sin \theta \sqrt{\sin^2 \theta - C^2}}$$

Alors en intégrant par la méthode de séparation de variables on obtient :

$$\phi + \underbrace{D}_{=cste} = \int \underbrace{\frac{C}{\sin \theta \sqrt{\sin^2 \theta - C^2}}}_{=I} d\theta \quad (2.18)$$

On note I le membre de droite. Pour le calculer, le changement de variable suivant sera opéré :

$$X = \frac{C}{\sqrt{1 - C^2}} \cot \theta \quad (2.19)$$

Remarque 6. Le détail des calculs permettant d'obtenir ce changement de variables est donné en annexe (5.2).

Et alors avec ce changement de variables, on obtient que :

$$I = \arccos(X) + \underbrace{E}_{cste}$$

En remplaçant dans (2.18), et en notant $\beta = E - D$, on obtient :

$$\begin{aligned} \phi - \beta &= \arccos(X) \\ \Leftrightarrow \cos(\phi - \beta) &= X = \frac{Cu}{q}, \quad \text{où } q^2 = 1 - C^2 > 0 \\ \Leftrightarrow \cos(\phi - \beta) &= \frac{C}{\sqrt{1 - C^2}} \cot \theta \quad \text{où } |C| < 1 \end{aligned} \quad (2.20)$$

Puisque $|C| < 1$, cette constante peut être écrite comme le sinus d'un angle quelconque $\alpha \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$, soit : $C = \sin \alpha$ et alors (2.20) devient :

$$\boxed{\cos(\phi(\theta) - \beta) = \tan \alpha \cot \theta} \quad (2.21)$$

avec α et β deux angles constants ($\alpha \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$).

Il s'agit là de l'équation des grands cercles de la sphère et en voici quelques uns. Pour les tracer on a utilisé le fait que

$$(2.21) \Leftrightarrow \phi(\theta) = \arccos(\tan(\alpha) \cot(\theta)) + \beta$$

On rappelle qu'en coordonnées sphériques une sphère de rayon 1 est paramétrisée comme ceci :

$$\begin{cases} x = \sin \theta \cos \phi \\ y = \sin \theta \sin \phi \\ z = \cos \theta \end{cases}$$

D'où, avec l'équation précédente, les géodésiques sont paramétrées par :

$$\begin{cases} x = \cos(\arccos(\tan \alpha \cot \theta) + \beta) \sin \theta \\ y = \sin(\arccos(\tan \alpha \cot \theta) + \beta) \sin \theta \\ z = \cos \theta \end{cases}$$

Vérifions qu'il s'agit bien d'un cercle et en particulier d'un grand cercle de la sphère en prenant $\alpha = \beta = 0$:

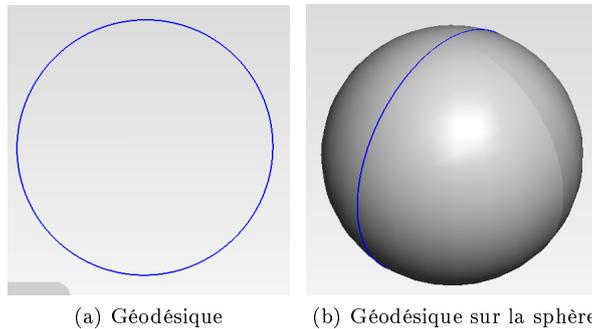
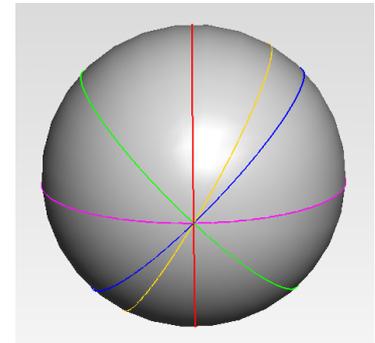


FIGURE 2.2 – Une géodésique de la sphère pour $\alpha = \beta = 0$

Maintenant, voici ce que l'on obtient pour différentes valeurs de α et β (constantes), i.e. pour différentes conditions initiales :

FIGURE 2.3 – Évolution des géodésiques en fonction de β avec $\alpha = 0$:

couleur	β
—	$\frac{\pi}{2}$
—	$\frac{\pi}{6}$
—	$\frac{\pi}{4}$
—	$\frac{\pi}{4}$
—	$-\frac{\pi}{4}$



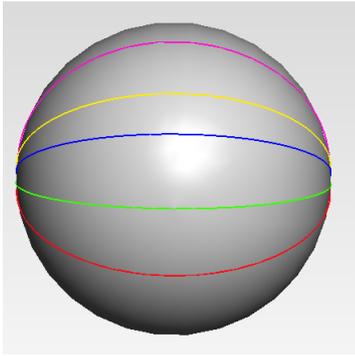


FIGURE 2.4 – Évolution des géodésiques en fonction de α avec $\beta = \frac{\pi}{2}$:

couleur	α
—	$\frac{\pi}{3}$
—	$\frac{3\pi}{5}$
—	$-\frac{\pi}{8}$
—	$\frac{\pi}{8}$
—	0

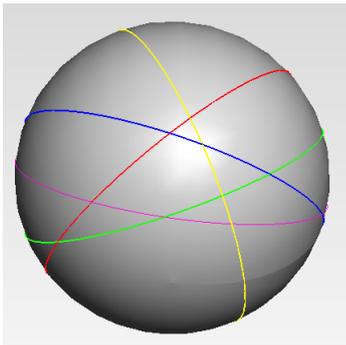


FIGURE 2.5 – Évolution des géodésiques en fonction de α et β :

couleur	α	β
—	$-\frac{\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{2}$
—	$\frac{7\pi}{8}$	$-\frac{\pi}{2}$
—	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{9\pi}{6}$
—	$-\frac{3\pi}{5}$	$-\frac{7\pi}{6}$
—	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{3}$

Remarque 7. *Ce qui vient d'être fait permet de dire que, si on choisi des conditions initiales sur la sphère, alors on sera en mesure de trouver la géodésique qui correspond.*

Dans cette section, les géodésiques de la sphère ont été obtenues à partir des coordonnées sphériques, et la résolution du système différentiel permettant de les obtenir n'a pas été facile. Dans la suite, ces géodésiques vont être re-déterminées (sans entrer autant dans les détails le travail ayant déjà été effectué une fois) pour les coordonnées stéréographiques de la sphère. Et cela afin, d'une part, de montrer qu'avec cet autre système de coordonnées les géodésiques de la sphère seront aussi les grands cercles de celle-ci, ce qui illustre le caractère intrinsèque à la géométrie de la variété des géodésiques. Et, d'autre part, afin de montrer que le système différentiel à résoudre pour obtenir ces courbes géodésiques est encore plus compliqué dans le cas des coordonnées stéréographiques. Ce qui illustrera les non-linéarités de paramétrage sur les équations d'Euler-Lagrange.

2.2.2 Géodésiques en coordonnées stéréographiques

Les coordonnées stéréographiques sont un système de coordonnées basé sur la projection stéréographique. La projection stéréographique était utilisée dans la conception des astrolabes arabes de l'époque médiévale. Elle est amplement utilisée en cristallographie pour étudier la symétrie morphologique des cristaux et, notamment, pour représenter les formes cristallines.

La projection stéréographique [20] est une méthode permettant de représenter une sphère privée d'un point sur un plan. On convient souvent que le point dont on prive la sphère sera un des pôles de celle-ci ; le plan de projection peut être celui qui sépare les deux hémisphères, nord et sud, de la sphère qu'on appelle plan équatorial. On peut également faire une projection stéréographique sur n'importe quel plan parallèle au plan équatorial pourvu qu'il ne contienne pas le point dont on a privé la sphère.

Si par exemple on effectue une projection stéréographique de la sphère sur son plan équatorial, à partir du pôle Sud noté S, alors l'image Z' d'un point Z de cette sphère par la projection stéréographique sera définie par l'intersection entre le plan équatorial et la droite (SZ) (Cette projection revient à observer la sphère à partir du pôle sud). Et le seul point qui ne puisse être représenté de cette manière est le point S : le pôle sud lui-même.

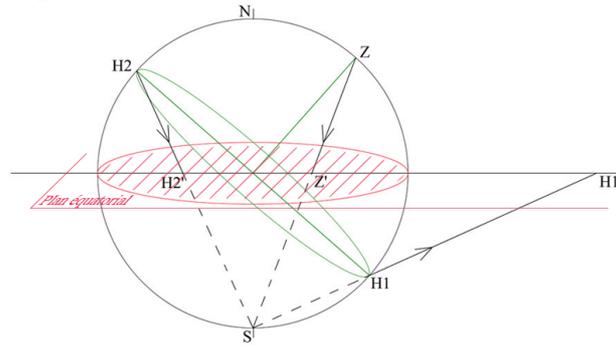


FIGURE 2.6 – Projection stéréographique de la sphère depuis le pôle sud sur son plan équatorial.

C'est ainsi que les coordonnées stéréographiques permettant de représenter la sphère toute entière sont définies à partir de deux cartes de projections stéréographiques, définies par projection à partir de deux pôles tels que nord et sud, qui forment un atlas.

Voici quelques propriétés et remarques sur ces projections :

Proposition 2 : Projection stéréographique

Les projections Stéréographiques ont deux propriétés importantes :

- tout cercle sur la sphère — hormis ceux passant par le pôle de référence — sera transformé en un autre cercle dans le plan équatorial ;
- les angles sont conservés pendant la transformation (transformation conforme).

Remarque 8. Lorsque l'on effectue une projection stéréographique de la sphère sur son plan équatorial à partir du pôle Sud :

- L'équateur est projeté sur lui-même.
- Un point de l'hémisphère nord sera projeté à l'intérieur de l'équateur et, inversement, un point de l'hémisphère sud sera projeté à l'extérieur (c.f. figure 2.6).
- L'image d'un cercle par la projection étant un cercle, il suffit de projeter deux points formant un diamètre pour retrouver le cercle projeté.

Dans la suite les coordonnées stéréographiques seront considérées comme liées à l'atlas formé par les deux cartes de projection sur le plan équatorial à partir des pôles Nord et Sud.

Définition 6 : Projection stéréographique de la sphère unité

Soient (x, y, z) le système de coordonnées sur la sphère dans \mathbb{R}^3 et (u, v) celui sur le plan équatorial de projection. Alors la projection stéréographique, notée P , de la sphère unité centrée en \mathcal{O} , depuis son pôle Nord, sur son plan équatorial s'écrira :

$$P(x, y, z) = \begin{cases} u = \frac{x}{1-z} \\ v = \frac{y}{1-z} \end{cases} \quad \forall z \neq 1, \tag{2.22}$$

Remarque 9. La condition $z \neq 1$ est bien équivalente à dire que le seul point qui ne puisse être projeté par P est le pôle Nord.

Et la projection inverse, notée f , qui permet d'immerger le plan (u, v) dans \mathbb{R}^3 sous la forme d'une sphère

unité centrée en \mathcal{O} , s'écrit, en notant $r^2 = u^2 + v^2$:

$$f(u, v) = \begin{cases} x = \frac{2u}{1+r^2} \\ y = \frac{2v}{1+r^2} \\ z = \frac{r^2-1}{1+r^2} \end{cases} \quad (2.23)$$

Métrie Riemannienne de la sphère en coordonnées stéréographiques

Par un procédé identique à celui utilisé pour déterminer la métrique de la sphère en coordonnées sphériques, on obtient que :

$$ds^2(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = dx^2(u, v) + dy^2(u, v) + dz^2(u, v)$$

Et grâce à l'immersion f on a, par exemple pour la première coordonnée, $dx = d\left(\frac{2u}{1+r^2}\right)$, ce qui en n'oubliant pas que $r^2 = u^2 + v^2$ s'écrira :

$$dx = \frac{2}{1+r^2} \left((1+r^2)du - \frac{2ru(udu + vdv)}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right)$$

En procédant de façon analogue pour dy et dz on obtient que ds^2 peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$ds^2 = (du \quad dv) \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{4}{(1+r^2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{4}{(1+r^2)^2} \end{pmatrix}}_g (du \quad dv) \quad (2.24)$$

D'où, pour les coordonnées stéréographiques, la variété Riemannienne associée à la sphère, sera le plan (u, v) muni de la métrique symétrique g définie ci-dessus.

Système différentiel d'Euler-Lagrange et géodésiques

Comme précédemment, pour écrire le système différentiel vérifié par les géodésiques d'une variété Riemannienne il est nécessaire de calculer les coefficients de Christoffel associés à la métrique (c.f. équation (2.10)). Le calcul de ces coefficients ne sera pas détaillé ici mais le lecteur pourra, s'il le souhaite, le faire à l'aide de leurs définition (2.11). Voici donc ces coefficients pour la métrique g définie ci-dessus :

$$\begin{aligned} \Gamma_{uu}^u &= \Gamma_{uv}^v = \Gamma_{vu}^v = \frac{2u}{1+r^2} \\ \Gamma_{vv}^u &= -\frac{2u}{1+r^2} \\ \Gamma_{uv}^u &= \Gamma_{vu}^u = \Gamma_{uu}^v = \Gamma_{vv}^v = \frac{2v}{1+r^2} \end{aligned}$$

Et alors d'après (2.10) le système différentiel vérifié par les géodésiques de la sphère est pour ce système de coordonnées :

$$\begin{cases} \ddot{u} = -\frac{2}{1+r^2} \left(u(\dot{u}^2 - \dot{v}^2) + 2v\dot{u}\dot{v} \right) \\ \ddot{v} = -\frac{2}{1+r^2} \left(v(\dot{u}^2 + \dot{v}^2) + 2u\dot{u}\dot{v} \right) \end{cases} \quad (2.25)$$

Ce système est différent de celui obtenu en (2.15) pour la même variété en coordonnées sphériques et il est même beaucoup plus compliqué que ce dernier. Pourtant le lecteur, s'il le souhaite, pourra vérifier que les grands cercles de la sphère sont bien également solution de ce système différentiel.

Cet exemple illustre d'une part que les géodésiques d'une variété sont indépendantes du système de coordonnées qui la représente et, d'autre part, qu'en revanche le système différentiel à résoudre pour les obtenir est totalement dépendant des coordonnées : d'où l'apparition de non-linéarités de paramétrage.

C'est pour éliminer ces non-linéarités de paramétrage que dans la suite le but sera de s'abstraire de ces systèmes de coordonnées dans le processus de détermination des géodésiques. Ce qui rendra cela possible c'est de constater si sur la variété à étudier des symétries sont présentes. Par exemple dans le cas de la sphère, il est aisé de constater qu'elle est invariante par rotation autour de n'importe quel axe passant par son centre. Cette invariance par rotation de la sphère entraîne l'invariance de son lagrangien sous l'action du groupe des rotations. C'est alors la théorie des groupes et en particulier le théorème d'Euler-Poincaré qui permettra d'obtenir un autre système différentiel également vérifié par les géodésiques de la variété. Et grâce à la conservation de certaines quantités le long des géodésiques, ce système différentiel d'Euler-Poincaré pourra être écrit de manière totalement absoute de tout système de coordonnées.

Avant de plonger dans la théorie des groupes, l'exemple de la variété Riemannienne sphère va être de nouveau utilisé pour aborder une des quantités conservées le long des géodésiques, précédemment mentionnée, à savoir la projection du vecteur vitesse sur un champ de vecteurs de Killing.

2.3 Quantités conservées et champs de Killing

En chaque point d'une variété un espace tangent peut être défini, et dans le cas des variétés Riemanniennes cet espace tangent sera un espace vectoriel (c.f. section 2.1.1). Si de plus la variété Riemannienne est munie d'un système de coordonnées, cet espace tangent pourra être écrit comme l'espace engendré par une base vectorielle.

D'autre part, quelque soit la nature de l'espace tangent, on peut définir dessus des champs de vecteurs, et en particulier, dans le cas des espaces tangents vectoriels, n'importe quel champ de vecteurs s'écrira comme combinaison linéaire des champs engendrés par la base de l'espace tangent.

Il existe différents types de champs de vecteurs, et en particulier, il peut en exister un, appelé champ de Killing, qui est défini par :

Définition 7 : Vecteur de Killing

Un vecteur de Killing, ou champ de Killing, est un champ vectoriel sur une variété riemannienne qui préserve la métrique de cette variété.

Ces champs de vecteurs de Killing sont, lorsqu'ils existent, particulièrement intéressants car ils sont assortis de la propriété suivante, découverte par Clairaut, pour les surfaces de révolution et qui fut généralisée aux variétés Riemanniennes :

Proposition 3 : Condition de Clairaut [7]

Si une variété Riemannienne est invariante sous l'action d'un groupe à un paramètre alors une constante du mouvement géodésique sur cette variété décrite par les coordonnées de Clairaut est la constante de Clairaut. Les coordonnées de Clairaut sont définies telles que les vecteurs de base associés soient orthogonaux et que l'un d'entre eux soit un vecteur de Killing. Alors la constante du mouvement appelée constante de Clairaut est le produit scalaire (induit par la métrique de la variété) du vecteur tangent unitaire le long d'une géodésique avec le vecteur de base de Killing.

Autrement dit : si une variété Riemannienne présente des symétries alors la projection du vecteur vitesse le long des géodésiques sur un champ de Killing est constante.

Afin d'illustrer cette propriété, l'exemple de la sphère unité décrite par les coordonnées sphériques sera de nouveau utilisé. Tout d'abord, la base vectorielle engendrant l'espace tangent à la variété en chacun de ses points

sera calculé, ce qui permettra par la suite de déterminer si l'un, ou une combinaison, est un champ de Killing. Enfin, le système différentiel vérifié par les géodésiques permettra de retrouver la proposition 3.

Remarque 10. Dans ce qui suit les doublets ou triplets en indice des vecteurs permettront d'indiquer dans quelle base ils sont considérés : $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ faisant référence à la base canonique de \mathbb{R}^3 et (θ, ϕ) à celle des coordonnées sphériques pour la sphère unitaire.

2.3.1 Base orthonormale unitaire du plan tangent

A chaque point M de la sphère unitaire, de coordonnées (θ_0, ϕ_0) , se trouve un plan tangent (l'espace tangent à un point d'une sphère est un plan) dont on peut écrire les vecteurs unitaires de base $\vec{e}_\theta|_M$ et $\vec{e}_\phi|_M$.

Considérons $\overrightarrow{OM}(\theta_0, \phi_0) = \begin{pmatrix} \sin \theta_0 \cos \phi_0 \\ \sin \theta_0 \sin \phi_0 \\ \cos \theta_0 \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}$. Alors :

$$\vec{e}_\theta|_M(\theta_0, \phi_0) = \frac{\partial \overrightarrow{OM}(\theta_0, \phi_0)}{\partial \theta_0} \times \frac{1}{\left\| \frac{\partial \overrightarrow{OM}(\theta_0, \phi_0)}{\partial \theta_0} \right\|} = \begin{pmatrix} \cos \theta_0 \cos \phi_0 \\ \cos \theta_0 \sin \phi_0 \\ -\sin \theta_0 \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})} \times 1$$

$$\vec{e}_\phi|_M(\theta_0, \phi_0) = \frac{\partial \overrightarrow{OM}(\theta_0, \phi_0)}{\partial \phi_0} \times \frac{1}{\left\| \frac{\partial \overrightarrow{OM}(\theta_0, \phi_0)}{\partial \phi_0} \right\|} = \begin{pmatrix} -\sin \theta_0 \sin \phi_0 \\ \sin \theta_0 \cos \phi_0 \\ 0 \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})} \times \frac{1}{\sin^2 \theta_0}$$

Voyons maintenant si l'un des champs engendrés par ces vecteurs de base est un champ de Killing.

2.3.2 Champ de vecteurs de Killing

Les générateurs de champs de vecteurs $\frac{\partial}{\partial \theta}$ et $\frac{\partial}{\partial \phi}$ (déterminés ci-après) forment également une base de ce plan tangent (base orthogonale mais non normée). Il s'agit d'exprimer ces champs de vecteurs au point M en fonction de $\vec{e}_\theta|_M$ et $\vec{e}_\phi|_M$ et de déterminer s'ils engendrent respectivement des champs de vecteurs de Killing ou non.

Cas du champ engendré par $\frac{\partial}{\partial \theta}$

Ce champ, plongé dans l'espace (θ, ϕ) , est le "champ des vecteurs unitaires horizontaux" c'est-à-dire le champ selon l'axe \mathcal{O}_θ (c.f. Figure 2.7). En particulier on peut prendre le vecteur de ce champ au point $M = \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \phi_0 \end{pmatrix}_{(\theta, \phi)}$.

Ce vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{(\theta, \phi)}$ pris au point M peut être vu comme le vecteur tangent à une courbe $\hat{c}(t)$ paramétrée par le temps, prise à $t = 0$, de conditions initiales

$$\begin{cases} \hat{c}(t=0) = \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \phi_0 \end{pmatrix}_{(\theta, \phi)} \\ \dot{\hat{c}}(t=0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{(\theta, \phi)} \end{cases}$$

On peut alors prendre par exemple $\hat{c}(t) = \begin{pmatrix} \theta_0 + t \\ \phi_0 \end{pmatrix}_{(\theta, \phi)}$.

Par la fonction d'immersion, donnée en (2.12), du plan (θ, ϕ) dans \mathbb{R}^3 , qui lui fait correspondre la sphère unité,

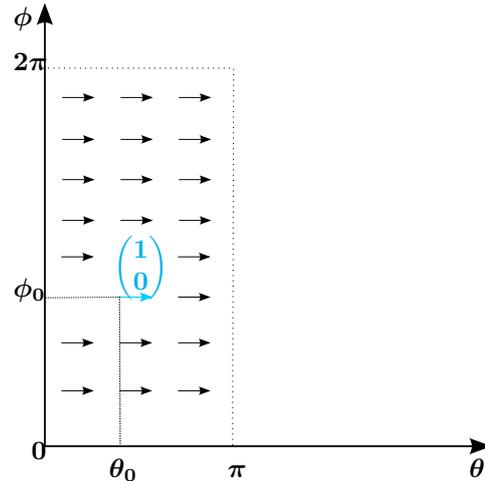


FIGURE 2.7 – Champ de vecteurs engendré par $\frac{\partial}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{(\theta, \phi)}$ vu dans le plan (θ, ϕ) .

$$\hat{c}(t) \Big|_{t=0} \text{ se transforme en } c(t) \Big|_{t=0} = \begin{pmatrix} \sin \theta_0 \cos \phi_0 \\ \sin \theta_0 \sin \phi_0 \\ \cos \theta_0 \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})} \text{ et donc}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \theta} \Big|_M = \dot{c}(t) \Big|_{t=0} = \begin{pmatrix} \cos \theta_0 \cos \phi_0 \\ \cos \theta_0 \sin \phi_0 \\ -\sin \theta_0 \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})} = \vec{e}_\theta \Big|_M} \quad (2.26)$$

S'agit-il d'un vecteur de Killing? Autrement dit, est-ce qu'une translation du point M le long de ce vecteur conserve la métrique de la surface Riemannienne sphère, et cela quel que soit le point considéré?

Pour le savoir il faut mesurer la variation de la métrique g en fonction de cette translation infinitésimale. Si cette variation est nulle pour tout point M de la sphère alors la métrique est inchangée (conservée).

Si on translate \overrightarrow{OM} de ε fois le vecteur $\frac{\partial}{\partial \theta}$ cela s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} \theta_0 + \varepsilon \\ \phi_0 \end{pmatrix}_{(\theta, \phi)} = \begin{pmatrix} \sin(\theta_0 + \varepsilon) \cos \phi_0 \\ \sin(\theta_0 + \varepsilon) \sin \phi_0 \\ \cos(\theta_0 + \varepsilon) \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}$$

D'où, d'après (5.2), la variation δg de g s'exprimera ainsi, pour tout point M de la sphère :

$$\delta g = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g\left(\overrightarrow{OM} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \theta}\right) - g\left(\overrightarrow{OM}\right)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sin^2(\theta_0 + \varepsilon) - \sin^2 \theta_0 \end{pmatrix}$$

Le terme $\sin^2(\theta_0 + \varepsilon)$ peut être développé en produits de sinus et cosinus à l'aide d'une formule trigonométrique et ces termes peuvent eux-mêmes être approximés par un développement limité à l'ordre 1, ce qui, en remplaçant dans l'expression précédente de δg donne :

$$\delta g = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \sin \theta_0 \cos \theta_0 \end{pmatrix} \neq 0, \text{ pour } M \text{ quelconque sur la sphère}$$

Le champ de vecteurs considéré ne préserve donc pas la métrique, on peut alors en conclure que $\frac{\partial}{\partial \theta}$ n'est pas un vecteur de Killing.

Cas du champ engendré par $\frac{\partial}{\partial \phi}$

Ce champ, plongé dans l'espace (θ, ϕ) , est le champ des vecteurs unitaires "verticaux" c'est-à-dire le champ selon l'axe \mathcal{O}_ϕ (c.f. Figure 2.8). En particulier on peut prendre le vecteur de ce champ au point $M = \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \phi_0 \end{pmatrix}_{(\theta, \phi)}$

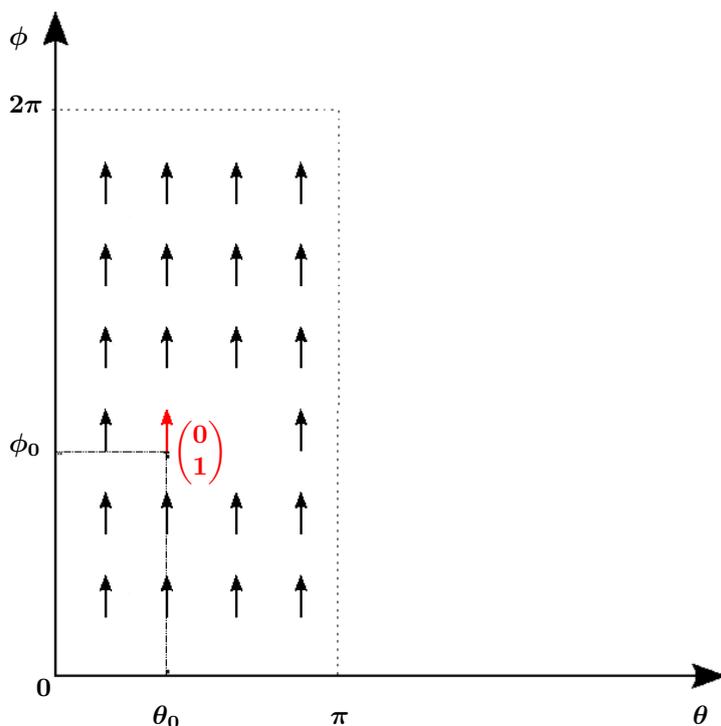


FIGURE 2.8 – Champ de vecteurs engendré par $\frac{\partial}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{(\theta, \phi)}$ vu dans le plan (θ, ϕ) .

De même que précédemment on peut voir ce vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{(\theta, \phi)}$ comme étant le vecteur tangent à une courbe $\hat{c}(t)$ paramétrée par le temps, prise à $t = 0$, de conditions initiales cette fois ci

$$\begin{cases} \hat{c}(t=0) = \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \phi_0 \end{pmatrix}_{(\theta, \phi)} \\ \dot{\hat{c}}(t=0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{(\theta, \phi)} \end{cases}$$

et on prendra par exemple $\hat{c}(t) = \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \phi_0 + t \end{pmatrix}_{(\theta, \phi)}$. Avec le même procédé que précédemment utilisant la fonction d'immersion on obtiendra que

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \phi} \Big|_M = \dot{\hat{c}}(t) \Big|_{t=0} = \begin{pmatrix} -\sin \theta_0 \sin \phi_0 \\ \sin \theta_0 \cos \phi_0 \\ 0 \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})} = \sin^2 \theta_0 \vec{e}_\phi \Big|_M} \quad (2.27)$$

Remarque 11. (2.26) et (2.27) permettent de confirmer que $\frac{\partial}{\partial \theta}$ et $\frac{\partial}{\partial \phi}$ sont bien des vecteurs orthogonaux (puisque \vec{e}_θ et \vec{e}_ϕ le sont), mais non-unitaires à cause du facteur $\sin^2 \theta_0$. Ces relations confirment également que ce sont bien des vecteurs de base du plan tangent à la sphère au point M tout comme $\vec{e}_\theta \Big|_M$ et $\vec{e}_\phi \Big|_M$.

Ce champs de vecteurs est-il un champ de Killing sur la sphère unité ?

Cette fois, la translation de \overrightarrow{OM} de ε fois le vecteur $\frac{\partial}{\partial\phi}$ s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial\phi} = \begin{pmatrix} \sin\theta_0 \cos(\phi_0 + \varepsilon) \\ \sin\theta_0 \sin(\phi_0 + \varepsilon) \\ \cos\theta_0 \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}$$

Or de part sa définition la métrique g de la variété est indépendante de ϕ_0 . Il vient alors naturellement que sa variation le long de $\frac{\partial}{\partial\phi}$ est nulle, soit :

$$\delta g = 0$$

Alors le champ de vecteurs considéré préserve la métrique et donc $\frac{\partial}{\partial\phi}$ est un vecteur de Killing.

En résumé, $\frac{\partial}{\partial\phi} \Big|_M$ est un vecteur de Killing et $\frac{\partial}{\partial\theta} \Big|_M$ lui est orthogonal dans le plan tangent à M sur la sphère.

2.3.3 Vecteur vitesse, champs de Killing, géodésiques et quantité conservée

Si une particule se trouve au point $M = (\theta, \phi)^T \Big|_{(\vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)}$ sur la sphère, sa vitesse s'écrit comme étant $\vec{v}_M = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$, soit :

$$\vec{v}_M = \begin{pmatrix} \cos\theta \cos\phi \dot{\theta} - \sin\theta \sin\phi \dot{\phi} \\ \cos\theta \sin\phi \dot{\theta} + \sin\theta \cos\phi \dot{\phi} \\ -\sin\theta \dot{\theta} \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}$$

Alors la projection de ce vecteur vitesse sur la base orthogonale $(\frac{\partial}{\partial\theta} \Big|_M, \frac{\partial}{\partial\phi} \Big|_M)$ où $\frac{\partial}{\partial\phi}$ est un champ de Killing est :

$$\vec{v}_M \cdot \frac{\partial}{\partial\theta} \Big|_M = \dot{\theta}$$

$$\vec{v}_M \cdot \frac{\partial}{\partial\phi} \Big|_M = \sin^2\theta \dot{\phi}$$

Maintenant, si on considère une géodésique passant par le point M (quelconque sur la sphère), on sait d'après ce que l'on a dit au chapitre précédent qu'elle devra vérifier au point M les équations d'Euler-Lagrange suivantes :

$$\begin{cases} \ddot{\theta} - \cos\theta \sin\theta \dot{\theta}^2 = 0 & (1) \\ \ddot{\phi} + \frac{2\cos\theta}{\sin\theta} \dot{\theta}\dot{\phi} = 0 & (2) \end{cases} \quad (2.28)$$

Or on peut réécrire (2) comme suit :

$$\begin{aligned} (2) &\Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{\sin^2\theta}}_{\neq 0} \times \frac{d}{dt} (\sin^2\theta \dot{\phi}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{d}{dt} (\sin^2\theta \dot{\phi}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \boxed{\sin^2\theta \dot{\phi} = cste} \end{aligned}$$

Autrement dit, le long des géodésiques de la sphère (qui est une variété invariante sous l'action du groupe des rotations), la projection du vecteur vitesse sur $\frac{\partial}{\partial\phi}$ est constante, i.e. cette projection est une quantité conservée

le long des géodésiques. La propriété 3 sur les champs de Killing a donc bien été retrouvée dans le cas de la sphère unité en coordonnées sphériques.

Cette propriété met en avant des quantités conservées le long des géodésiques, qui, tout comme les équations d'Euler-Lagrange, sont plus ou moins claires selon le système de coordonnées choisis. Alors un certain nombre de questions se posent comme par exemple : existe-t-il un système de coordonnées plus judicieux que les autres pour déterminer les géodésiques d'une variété ?

3 Géodésiques et groupe de transformations

Au cours du premier chapitre, la puissance du théorème d'Euler-Lagrange pour trouver les géodésiques d'une variété a été mise en avant, puisqu'en effet il énonce un système différentiel vérifié par ces géodésiques. Mais il a également été constaté que la forte dépendance de ce système différentiel aux coordonnées choisies pour décrire la variété entraîne des non-linéarités de paramétrage qui augmentent la difficulté de résolution du système.

Le deuxième chapitre a permis de remarquer que, pour les variétés présentant des symétries, il existe un système de coordonnées particulier, basé sur les champs de Killing, qui permet d'exprimer une constante du mouvement le long des géodésiques. Or, et c'est l'objet de ce chapitre, une variété présentant des symétries est isomorphe à un groupe de Lie, et cette symétrie entraîne une invariance du lagrangien sous l'action de ce même groupe de Lie. C'est cette constatation qui a permis à Poincaré de réécrire le théorème d'Euler-Lagrange en terme d'action de groupe de Lie, et plus précisément en terme d'action co-adjointe de l'algèbre de Lie sur son algèbre duale.

Dans la suite, pour plus de clarté, l'étude sera menée sur un exemple : celui de la variété isomorphe au groupe (relativement simple) des transformations affines de la droite des réels. Dans un premier temps, une définition de ce groupe sera donnée et il sera montré qu'il s'agit bien d'un groupe de Lie. Ensuite, l'algèbre de Lie associée à un groupe de Lie sera définie, déterminée dans le cadre de l'exemple et explicitée en termes de correspondances physiques. Alors, il sera constaté que dans l'exemple, si l'on veut pouvoir écrire le lagrangien sous forme quadratique sur l'algèbre alors la variété isomorphe à ce groupe de Lie sera le demi-plan de Poincaré, noté \mathbb{H}^2 . Une immersion dans \mathbb{R}^3 en sera donnée, sur laquelle les résultats trouvés sur \mathbb{H}^2 pourront être visualisés.

L'équation d'Euler-Poincaré, précédemment évoquée, nécessitant d'avoir un opérateur faisant agir l'algèbre de Lie du groupe sur son algèbre duale (appelé opérateur d'action conjuguée co-adjointe), la construction de cet opérateur à partir d'autres opérateurs sur le groupe sera abordée et leurs correspondances physiques seront données. Alors enfin, tous les outils nécessaires auront été réunis pour pouvoir exposer l'équation d'Euler-Poincaré ainsi que les deux théorèmes qui en découlent. Et c'est alors à l'aide de ces deux théorèmes que l'on verra comment obtenir les géodésiques d'une variété Riemannienne à partir de la conservation des constantes du mouvement le long de ces géodésiques et donc indépendamment de tout système de coordonnées.

Pour commencer, voici quelques explications sur le groupe de transformations retenu comme exemple.

3.1 Groupe des transformations affines de la droite des réels \mathbb{R}

Soit F une transformation affine de la droite des réels i.e. une dilatation et une translation, définie par :

$$F : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto X = ax + b \end{cases}, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

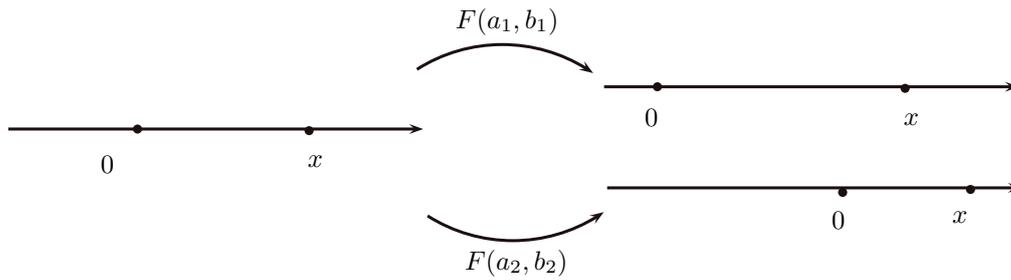


FIGURE 3.1 – Transformation de la droite des réels.

Cette transformation peut être ré-écrite sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_M \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{avec } M \in \mathcal{M}_{2,2} \text{ puisque } a \neq 0 \quad (3.1)$$

Où $\mathcal{M}_{n,n}$ désigne l'ensemble des matrices réelles carrées de taille $(n \times n)$ **inversibles**.

Toutes les matrices M de la forme ci-dessus forment donc l'ensemble de toutes les transformations possibles de la droite des réels \mathbb{R} . Montrons que cette ensemble est un groupe et étudions ses propriétés.

Définition 8 : Un groupe

L'ensemble G est un groupe si tous ses éléments h vérifient les propriétés suivantes :

1. loi de composition : Il existe une loi de composition \cdot telle que

$$\forall h, q \in G, (h \cdot q) \in G$$

2. associativité : Pour tout élément q, h et k de G la propriété suivante doit être vraie :

$$(q \cdot h) \cdot k = q \cdot (h \cdot k)$$

3. élément neutre : Il existe $e \in G$ tel que

$$\forall h \in G, e \cdot h = h \cdot e = h$$

4. inverse : A tout élément $k \in G$ il doit correspondre un inverse (ou symétrique) par composition à gauche et à droite. Si le groupe est commutatif ces deux inverses seront égaux. Dans le cas général il doit exister deux éléments h_L et h_R de G tels que :

$$h_L \cdot k = e \text{ et } k \cdot h_R = e, \text{ où } e \text{ est l'élément neutre}$$

Remarque : Dans le cas où ils existent, ces éléments sont également notés respectivement g_L^{-1} et g_R^{-1}

Vérifions ces propriétés pour l'ensemble :

$$G = \{M \in \mathcal{M}_{2,2} \text{ telle que } M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \forall a \in \mathbb{R}^*, \forall b \in \mathbb{R}\} \quad (3.2)$$

1. loi de composition : Pour cet ensemble la loi de composition (interne) est la multiplication matricielle (qui n'est pas commutative). Soient M et N deux éléments quelconques de G , on a :

$$\begin{aligned} M \cdot N &= \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & ad + b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ N \cdot M &= \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca & cb + d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Or $ac = ca \in \mathbb{R}^*$ puisque $a \in \mathbb{R}^*$ et $c \in \mathbb{R}^*$. Et, de même, $ad + b \in \mathbb{R}$ et $cb + d \in \mathbb{R}$. Autrement dit :

$$\boxed{M \cdot N \in G \text{ et } N \cdot M \in G} \quad (3.4)$$

Et de plus $M \cdot N \neq N \cdot M$ donc la loi de composition interne est non-commutative.

2. associativité : Soient M, N et O trois éléments quelconques de G . Le produit matriciel étant associatif, on a directement :

$$(M \cdot N) \cdot O = \left[\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} f & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

D'où :

$$\boxed{(M \cdot N) \cdot O = M \cdot (N \cdot O)} \quad (3.5)$$

3. élément neutre : Existe-t-il un élément E de G tel que $\forall M \in G : M \cdot E = E \cdot M = M$. Soit N un élément de G . Pour la composition par la droite on a $M \cdot N = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & ad + b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc :

$$M \cdot N = M \Leftrightarrow N = \mathbb{I}d$$

Où $\mathbb{I}d$ est la matrice identité de la dimension correspondante.

Pour la composition par la gauche :

$$N \cdot M = M \Leftrightarrow N = \mathbb{I}d$$

Donc l'élément neutre existe et il vaut :

$$\boxed{E = \mathbb{I}d} \quad (3.6)$$

4. inverse : Soient M et N deux éléments de G , cherchons l'inverse à droite et l'inverse à gauche de M :

$$M \cdot N = E \Leftrightarrow M_R^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a & -b/a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$$

Et,

$$N \cdot M = E \Leftrightarrow M_L^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a & -b/a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$$

Autrement dit on a :

$$\boxed{M_R^{-1} = M_L^{-1} = M^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a & -b/a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G} \quad (3.7)$$

Ainsi, l'ensemble G considéré est bien un groupe de transformations qui transforme la droite des réels en une autre droite des réels, translatée et dilatée.

Définition 9 : Groupe de Lie [4]

Un groupe de Lie réel est une variété différentiable munie d'une structure de groupe, telle que les applications produit et inverse soient lisses.

Le groupe G , précédemment défini, est paramétré par deux réels. La variété à laquelle il est isomorphe est donc bidimensionnelle et homéomorphe à \mathbb{R}^2 . C'est donc bien une variété différentiable sauf pour $a = 0$. De plus, de manière générale, sur les variétés homéomorphes à \mathbb{R}^n la notion de "lisse" se traduit par "différentiable et sans trou". Ces deux propriétés doivent alors être vérifiées pour les applications de composition et d'inversion du groupe pour que la variété \mathbb{R}^2 munie de la structure de groupe définie par G soit un groupe de Lie.

Or les applications de multiplication et d'inverse de G sont différentiables et sans trou si $a > 0$ ou $a < 0$ (c.f. 3.3 et 3.7). Dans la suite c'est le cas $a > 0$ qui sera traité.

Un Groupe de Lie a ainsi été construit : le groupe de Lie des transformations affines de la droite des réels :

$$G = \{M \in \mathcal{M}_{2,2} \text{ telle que } M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}\} \quad (3.8)$$

A un groupe de Lie on associe toujours une algèbre de Lie. La section suivante est consacrée à sa définition et à son illustration pour le groupe G .

3.2 Algèbre de Lie associée à G

3.2.1 Approche mathématique

Définition 10 : Algèbre de Lie [18]

Une algèbre de Lie sur \mathbb{R} est un espace vectoriel \mathfrak{g} sur \mathbb{R} muni d'une application bilinéaire $(x, y) \mapsto [x, y]$, nommée crochet de Lie, de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ dans \mathfrak{g} qui vérifie les propriétés suivantes :

1. $\forall x \in \mathfrak{g}, [x, x] = 0$;
2. $\forall x, y, z \in \mathfrak{g}, [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$

Proposition 4 : Algèbre et espaces tangents [5]

Si G est un groupe de Lie et E son élément neutre, alors l'espace tangent en E à G , muni d'un crochet de Lie dérivant de l'expression locale de la loi interne de G , est une algèbre de Lie. C'est l'algèbre de Lie associée à G .

Remarque 12. Le crochet de Lie est encore appelé *commutateur*. Le groupe G est un groupe matriciel, sa loi interne est la multiplication matricielle et le crochet de Lie associé est le commutateur de matrices soit :

$$\boxed{[M, N] = MN - NM} \quad (3.9)$$

Notons L_N et R_N les opérateurs qui permettent d'effectuer respectivement la composition à gauche et à droite, définis à l'aide de la loi de composition interne \cdot sur G (soit ici le produit matriciel) par :

$$\begin{aligned} L_N &: G \rightarrow G \\ M &\mapsto L_N M = N \cdot M \\ R_N &: G \rightarrow G \\ M &\mapsto R_N M = M \cdot N \end{aligned}$$

Ces opérateurs permettent en particulier de ramener n'importe quel élément du groupe en l'identité E en prenant $N = M^{-1}$, puisque $L_{M^{-1}} M = M^{-1} M = E$ et de même $R_{M^{-1}} M = M M^{-1} = E$.

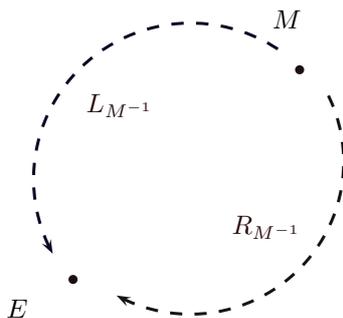


FIGURE 3.2 – Ramener M en l'identité de deux façons.

Remarque 13. [5]

L'application qui à un champ de vecteurs X associe par la gauche (resp. par la droite) sa valeur en l'élément neutre, identifie **canoniquement** l'ensemble des champs de vecteurs invariants à gauche (resp. à droite) avec l'espace tangent $\mathfrak{g} = T_E(G)$ en l'élément neutre.

Le fait que cette identification soit canonique permet de faire une autre remarque :

Remarque 14. Il n'existe qu'une unique algèbre de Lie associée à un groupe de Lie mais de part sa définition en tant qu'espace tangent en l'identité elle peut être construite en ramenant un élément du groupe en l'identité soit par composition par la gauche, soit par composition par la droite. Et ces deux écritures ne sont pas incompatibles,

il s'agit simplement de deux points de vue différents sur le même espace.

Dans la suite, lorsque l'on voudra faire le distinguo entre ces deux points de vue, on appellera par abus de langage "algèbre à gauche" (respectivement "algèbre à droite"), parfois notée \mathfrak{g}_L (resp. \mathfrak{g}_R), le fait de considérer l'algèbre comme l'espace tangent à un élément du groupe, ramené en l'identité de celui-ci par composition par la gauche (reps. par la droite).

Forts de ces définitions et propriétés, déterminons maintenant l'algèbre de Lie associée au groupe de transformations \mathbf{G} étudié.

Soit $\gamma(t)$ une courbe telle que $\gamma(0) = M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\dot{\gamma}(0) = \dot{M} = \begin{pmatrix} \dot{a} & \dot{b} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $\gamma(t)$ s'écrit $\begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $a(0) = a$ et $b(0) = b$ et $\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \dot{a}(t) & \dot{b}(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$\Gamma_L(t) = L_{M^{-1}}\gamma(t)$ et $\Gamma_R(t) = R_{M^{-1}}\gamma(t)$ sont alors respectivement les courbes images de $\gamma(t)$ une fois le point M ramené en l'identité par la gauche ou par la droite. On peut donc construire un plan tangent en l'identité par rapport à chacune de ces courbes. Les éléments de ces plans tangents formeront l'algèbre associée au groupe vu du point de vue de la composition par la gauche ou de la composition par la droite. Ces deux points de vue ont des significations physiques qui seront abordées plus loin. Tout d'abord, il s'agit d'exprimer l'algèbre comme l'espace tangent en l'identité, muni du commutateur de matrice présenté en (3.9) :

- Pour la composition par la gauche :

$$\begin{aligned} \Gamma_L(t) &= L_{M^{-1}}(\gamma(t)) \\ &= \begin{pmatrix} a(t) & b(t) - \frac{b}{a} \\ \frac{a}{0} & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Alors l'espace tangent en l'identité est donné par

$$\dot{\Gamma}_L(t)|_{t=0} = \begin{pmatrix} \frac{\dot{a}(0)}{\frac{a}{0}} & \frac{\dot{b}(0)}{\frac{a}{0}} \\ \frac{0}{0} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{a}\dot{\gamma}(0) = \frac{1}{a}\dot{M}$$

Or, $\dot{\Gamma}_L(t)|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(L_{M^{-1}}(\gamma(t))\right)|_{t=0} = dL_{M^{-1}}\dot{\gamma}(0) = dL_{M^{-1}}\dot{M}$, où on note $dL_{M^{-1}}$ l'opérateur qui permet de ramener en l'identité n'importe quel élément \dot{M} de l'espace tangent au groupe, du point de vue de la composition par la gauche. Et donc cet opérateur se définit comme :

$$\begin{aligned} dL_{M^{-1}} : T_M(G) &\rightarrow \mathfrak{g}_L \\ \dot{M} &\mapsto \Omega_L = dL_{M^{-1}}\dot{M} \stackrel{def}{=} M^{-1}\dot{M} = \frac{1}{a}\dot{M} \end{aligned}$$

Où \mathfrak{g}_L est l'algèbre "à gauche" associée à \mathbf{G} dont les éléments sont les matrices de la forme $\Omega_L = \begin{pmatrix} \dot{a} & \dot{b} \\ \frac{a}{0} & 0 \end{pmatrix}$.

- Pour la composition par la droite :

$$\begin{aligned} \Gamma_R(t) &= R_{M^{-1}}(\gamma(t)) \\ &= \begin{pmatrix} a(t) & b(t) - \frac{b}{a}a(t) \\ \frac{a}{0} & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Alors l'espace tangent en l'identité est donné par

$$\dot{\Gamma}_R(t)|_{t=0} = \begin{pmatrix} \frac{\dot{a}(0)}{\frac{a}{0}} & \dot{b}(0) - \frac{b}{a}\dot{a}(0) \\ \frac{0}{0} & 0 \end{pmatrix}$$

Or, $\dot{\Gamma}_R(t)|_{t=0} = \frac{d}{dt} \left(R_{M^{-1}}(\gamma(t)) \right)|_{t=0} = dR_{M^{-1}}(\dot{\gamma}(0)) = dR_{M^{-1}} \dot{M}$, où $dR_{M^{-1}}$ est l'opérateur qui permet de ramener en l'identité n'importe quel élément \dot{M} de l'espace tangent au groupe, du point de vue de la composition par la droite. Et cet opérateur est donc défini par :

$$dR_{M^{-1}} : T_M(G) \rightarrow \mathfrak{g}_R$$

$$\dot{M} \mapsto \Omega_R = dR_{M^{-1}} \dot{M} \stackrel{def}{=} \dot{M}M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\dot{a}(0)}{a} & \dot{b}(0) - \frac{b}{a}\dot{a}(0) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Où \mathfrak{g}_R est l'algèbre "à droite" associée à G dont les éléments sont les matrices de la forme $\Omega_R = \begin{pmatrix} \frac{\dot{a}}{a} & \dot{b} - \frac{b}{a}\dot{a} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3.2.2 Correspondances physiques

Si on considère que la droite de réels est un ensemble de particules de l'espace alors le groupe G agit sur elle en la dilatant et en la déplaçant avec une certaine vitesse instantanée d'un endroit à un autre de l'espace. On a :

$$\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=M} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \quad (3.10)$$

On peut alors observer les vitesses des particules de deux façons différentes, soit en se plaçant dans un repère fixe extérieur à la droite des réels que l'on nommera repère Spatial, soit en se mettant à la place de la particule en train de bouger i.e. en se plaçant dans le repère du Corps en mouvement (le corps en question se réduit ici à une particule en chaque point de la droite des réels).

- Dans le repère Spatial

On se place dans un repère fixe et on regarde une particule bouger avec la droite des réels au cours de la transformation. C'est la vitesse instantanée de cette particule vue depuis le repère Spatial que l'on cherche. On veut donc la vitesse instantanée au point $\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}$ à $\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ fixé. D'après (3.10) on a

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ 1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

Avec $M = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Et donc pour la vitesse instantanée

$$\begin{pmatrix} \dot{X}(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \dot{M} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\dot{M}M^{-1}}_{=\hat{\Omega}_S} \begin{pmatrix} X(t) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Et pour les physiciens, le $\hat{\Omega}_S$ ainsi défini est la matrice associée au vecteur de vitesse instantanée vue du repère spatial. Le lien avec la section précédente est que :

$$\boxed{\hat{\Omega}_S = \dot{M}M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\dot{a}}{a} & -\frac{b\dot{a}}{a} + \dot{b} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \Omega_R = dR_{M^{-1}} \dot{M}}$$

Alors les vitesses instantanées dans le repère spatial sont les éléments de l'algèbre vus par composition par la droite.

- Dans le repère du Corps

On se place sur la particule et on bouge avec elle. On voit alors l'espace environnant bouger. C'est la vitesse instantanée de cet espace environnant que l'on cherche. On veut donc la vitesse instantanée au point $\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ à $\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}$ fixé. D'après (3.10) on a

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ 1 \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}$$

Avec $M = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Et donc pour la vitesse instantanée

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} (M^{-1}) \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} = -M^{-1} \dot{M} M^{-1} \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} \quad 1 \quad = - \underbrace{M^{-1} \dot{M}}_{=\hat{\Omega}_C} \begin{pmatrix} x(t) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Et pour les physiciens, le $\hat{\Omega}_C$ ainsi défini est la matrice associée au vecteur de vitesse instantanée vue du corps. Le lien avec la section précédente est que :

$$\hat{\Omega}_C = M^{-1} \dot{M} = \begin{pmatrix} \dot{a} & \dot{b} \\ \dot{a} & \dot{a} \end{pmatrix} = \Omega_L = dL_{M^{-1}} \dot{M}$$

Alors les vitesses instantanées dans le repère du corps sont les éléments de l'algèbre vue par composition par la gauche.

Remarque 15. *Notations vectorielles*

Les éléments de l'algèbre sont les éléments de l'espace tangent en l'identité. Or, puisque pour une variété Riemannienne, l'espace tangent est isomorphe à un espace vectoriel, ils peuvent donc être vus, et c'est ce qui a permis de les déterminer, comme les vecteurs tangents aux trajectoires en l'identité. Le groupe G étant matriciel, les éléments de son algèbre le sont aussi mais on peut, par isomorphisme, associer à chaque élément de l'algèbre un vecteur de \mathbb{R}^2 ainsi défini :

Pour l'algèbre à gauche :

$$\hat{\Omega}_C = \begin{pmatrix} \dot{a} & \dot{b} \\ \dot{a} & \dot{a} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \vec{\Omega}_C = \begin{pmatrix} \Omega_{C_1} \\ \Omega_{C_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{a}/a \\ \dot{b}/a \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Pour l'algèbre à droite :

$$\hat{\Omega}_S = \begin{pmatrix} \dot{a} & -\frac{b\dot{a}}{a} + \dot{b} \\ \dot{a} & \dot{a} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \vec{\Omega}_S = \begin{pmatrix} \Omega_{S_1} \\ \Omega_{S_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{a}/a \\ -\frac{b}{a}\dot{a} + \dot{b} \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Et il en va de même pour les éléments \dot{M} de l'espace tangent au groupe en n'importe quel point M (qui ne soit pas forcément l'identité) de celui-ci, soit :

$$\dot{M} = \begin{pmatrix} \dot{a} & \dot{b} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \vec{\dot{M}} = \begin{pmatrix} \dot{a} \\ \dot{b} \end{pmatrix}$$

Avec ces notations vectorielles on peut écrire que :

$$\vec{\Omega}_C = \begin{pmatrix} \dot{a}/a \\ \dot{b}/a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix} \vec{\dot{M}}$$

$$\vec{\Omega}_S = \begin{pmatrix} \dot{a}/a \\ -\frac{b}{a}\dot{a} + \dot{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ -b/a & 1 \end{pmatrix} \vec{\dot{M}}$$

1. En effet $MM^{-1} = \text{Id}$ et donc $\frac{d}{dt} (MM^{-1}) = \dot{M}M^{-1} + MM^{-1}\dot{M} = 0$ d'où $\dot{M}^{-1} = -M^{-1}\dot{M}M^{-1}$

D'où, *en notation vectorielle*, les opérateurs permettant de passer de l'espace tangent à l'algèbre, par la gauche ou par la droite, seront des opérateurs matriciels et on aura :

$$dL_{\vec{M}^{-1}} = \begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix}$$

$$dR_{\vec{M}^{-1}} = \begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ -b/a & 1 \end{pmatrix}$$

Dans cette section a été définie ce qu'était l'algèbre de Lie associée à \mathbf{G} et la signification physique de ses éléments a été donnée. Il s'agit maintenant de déterminer précisément à quelle variété Riemannienne ce groupe de Lie est isomorphe.

3.3 Variété Riemannienne isomorphe à \mathbf{G} : le Demi-plan de Poincaré

On rappelle qu'un groupe de Lie est isomorphe à une variété Riemannienne dont chaque élément est isomorphe à un élément du groupe. Et on peut définir des trajectoire sur cette variété et donc des vitesses le long des trajectoires. Or, les variétés Riemanniennes étant homéomorphes à \mathbb{R}^n , cela implique que l'espace tangent en n'importe quel point de ces variétés soit un espace vectoriel. Et donc par isomorphisme, l'espace tangent en un élément du groupe de Lie est un espace vectoriel, et en particulier c'est le cas de son algèbre puisque nous l'avons définie comme l'espace tangent en l'identité du groupe.

Remarque 16. *Le fait de dire qu'un groupe de Lie est isomorphe à une variété Riemannienne signifie que ce sont deux représentations (deux visions) de la même chose. Il y a également un isomorphisme avec une surface immergée dans \mathbb{R}^3 . On a alors trois possibilités différentes de représenter la même chose, ce qui permettra d'illustrer de différentes façons les résultats obtenus.*

Or, qui dit groupe de Lie dit algèbre de Lie, et l'algèbre de Lie est aussi une variété Riemannienne sur laquelle on peut définir une métrique. La métrique la plus naturelle qui soit que l'on puisse lui associer est la métrique identité i.e. la métrique canonique de \mathbb{R}^2 . Notons cette métrique \mathbb{I}_c pour l'algèbre vue par composition par la gauche.

La suite sera consacrée à la recherche des trajectoires géodésiques sur le groupe (i.e. sur sa variété associée). Et pour les obtenir il faut un lagrangien (c.f. 2.3). On rappelle que sur une variété Riemannienne ce lagrangien se résume à l'énergie cinétique totale du système étudié. Or une énergie cinétique est une forme quadratique sur les vitesses. Elle peut donc en particulier s'écrire dans l'algèbre "à gauche" (espace des vitesses en l'identité), à l'aide du produit scalaire associé à la métrique. On remarque qu'alors on a :

$$2E_C = \langle \vec{\Omega}_C, \vec{\Omega}_C \rangle_{\mathbb{I}_c} = \vec{\Omega}_C^T \mathbb{I}_c \vec{\Omega}_C$$

où $\mathbb{I}_c = \mathbb{I}_d$ et son produit scalaire induit est le produit scalaire usuel dans \mathbb{R}^2 . D'où :

$$\boxed{2E_C = \Omega_{C_1}^2 + \Omega_{C_2}^2} \quad (3.13)$$

Remarque 17. *Si on munit l'algèbre "à gauche" d'une autre métrique que la métrique canonique alors on obtiendra une autre variété Riemannienne isomorphe au groupe de Lie. Le choix de la métrique canonique a été fait pour obtenir une expression la plus simple possible de l'énergie cinétique en fonction des éléments de \mathfrak{g}_L .*

Que cela implique-t-il pour la représentation du groupe en tant que variété Riemannienne ?

3.3.1 Métrique induite sur l'espace tangent

Rappelons qu'il existe un espace tangent en chaque élément d'un groupe de Lie, et qu'en particulier, on définit l'algèbre de Lie comme l'espace tangent en l'identité du groupe. Le fait d'avoir placé la métrique identité sur l'algèbre "à gauche" va induire une métrique sur l'espace tangent en chaque élément $M \in \mathbf{G}$. C'est ce qui va être développé ici.

Les relations $\vec{\Omega}_C = dL_{\vec{M}^{-1}} \dot{\vec{M}} = \begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix} \dot{\vec{M}}$ et $E_c = \vec{\Omega}_C \cdot \vec{\Omega}_C$, où \cdot est le produit scalaire usuel dans \mathbb{R}^2 tel que $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2, \vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{x}^T \vec{y}$, permettent d'écrire que :

$$\begin{aligned} E_c &= \left[\begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix} \dot{\vec{M}} \right] \cdot \left[\begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix} \dot{\vec{M}} \right] \\ &= \dot{\vec{M}}^T \begin{pmatrix} 1/a^2 & 0 \\ 0 & 1/a^2 \end{pmatrix} \dot{\vec{M}} = \langle \dot{\vec{M}}, \dot{\vec{M}} \rangle_{\mathcal{G}} \end{aligned}$$

où, $\mathcal{G} = \begin{pmatrix} 1/a^2 & 0 \\ 0 & 1/a^2 \end{pmatrix}$ est la métrique induite cherchée. Il est à noter que cette métrique dépend du point (i.e. de l'élément) M du groupe considéré et donc en toute rigueur elle devrait être notée $\mathcal{G}|_M$.

3.3.2 Tiré-arrière par la droite

Maintenant que la métrique sur l'espace tangent au groupe a été trouvée, il est possible d'en faire un tiré arrière (que les anglais appellent "pulling-back") pour la ramener en l'identité mais cette fois par la droite, et voir quelle sera alors la métrique induite sur l'algèbre vue par la droite. Or $\vec{\Omega}_S = dR_{\vec{M}^{-1}} \dot{\vec{M}}$ donc $\dot{\vec{M}} = (dR_{\vec{M}^{-1}})^{-1} \vec{\Omega}_S = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \vec{\Omega}_S$ et alors :

$$\begin{aligned} E_c &= \dot{\vec{M}}^T \mathcal{G} \dot{\vec{M}} = \vec{\Omega}_S^T \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}^T \mathcal{G} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \vec{\Omega}_S \\ &= \vec{\Omega}_S^T \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & b \\ a^2 & a^2 \\ b & 1 \\ a^2 & a^2 \end{pmatrix} \vec{\Omega}_S = \langle \Omega_S, \Omega_S \rangle_{\mathbb{I}_S} \end{aligned}$$

où $\mathbb{I}_S = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & b \\ a^2 & a^2 \\ b & 1 \\ a^2 & a^2 \end{pmatrix}$ est la métrique de l'algèbre de Lie vue par la droite. Il est à noter que cette métrique, contrairement à \mathbb{I}_C , dépend de l'élément M à partir du quel on a effectué le tiré-arrière.

Remarque 18. La transformation qui vient d'être faite en deux étapes pour passer de l'algèbre vue par la gauche à celle vue par la droite peut (et cela sera montré plus loin) être synthétisée en une seule étape à l'aide d'un opérateur, appelé opérateur d'action Adjointe par conjugaison, qui à chaque $\hat{\Omega}_C$ fait correspondre un $\hat{\Omega}_S$ et vice-versa. Si cet opérateur était une isométrie il conserverait les distances et, en particulier comme l'algèbre dite "à gauche" et celle dite "à droite" ne sont que deux visions du même espace (l'algèbre de Lie associée au groupe), la métrique devrait être identique des deux côtés. Or on constate que ce n'est pas le cas puisque $\mathbb{I}_C \neq \mathbb{I}_S$. Donc on sait d'ores-et-déjà que l'opérateur d'action Adjointe par conjugaison n'est pas une isométrie.

3.3.3 Le demi-plan de Poincaré

D'après ce qui vient d'être fait, en plaçant la métrique identité sur l'algèbre de Lie associée au groupe, lorsqu'on la considère par composition par la gauche, implique que, dans sa généralité, l'espace tangent au groupe de Lie a pour métrique $\mathcal{G} = \begin{pmatrix} 1/a^2 & 0 \\ 0 & 1/a^2 \end{pmatrix}$, avec $a > 0$ de part la définition de G . Or cette métrique est celle associée à la variété Riemannienne appelée le **demi-plan de Poincaré**, et qui est définie par :

$$\mathbb{H}^2 = \{z = ai + b, a > 0\} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ tq. } a > 0 \right\} \quad (3.14)$$

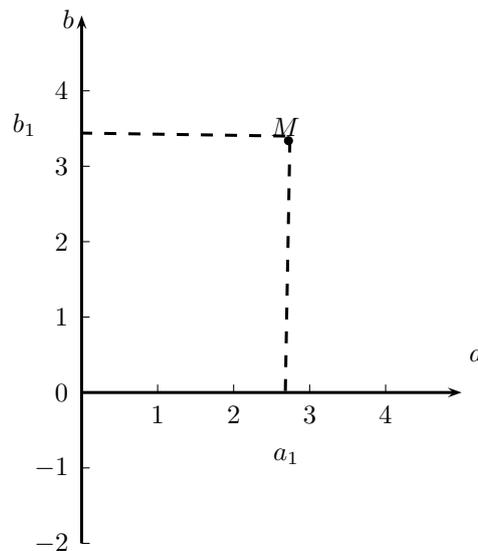


FIGURE 3.3 – Le demi-plan de Poincaré.

Le demi-plan de Poincaré est un exemple de géométrie non-euclidienne et plus particulièrement de géométrie hyperbolique. La géométrie non-euclidienne repose sur l'abolition du 5^{ème} postulat d'Euclide repris en ces termes par le mathématicien antique Proclus : « Par un point donné, on peut mener une et une seule parallèle à une droite donnée ». Cette forme du postulat est connue sous le nom de *postulat des parallèles*, et sous le nom de postulat de Playfair dans le monde Anglo-Saxon, qui dit que « deux droites parallèles ayant un point commun sont confondues ».

Quelques propriétés sur la variété Riemannienne demi-plan de Poincaré.

La notion de distance sur cette variété est donnée par la métrique Riemannienne suivante :

$$\text{Sous forme matricielle :} \quad \mathcal{G} = \begin{pmatrix} 1/a^2 & 0 \\ 0 & 1/a^2 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

$$\text{Sous forme d'élément de longueur infinitésimal :} \quad dS^2 = \frac{da^2 + db^2}{a^2} \quad (3.16)$$

Cette métrique permet d'introduire les notions de produit scalaire et de norme induits sur la variété \mathbb{H}^2 (d'après les définitions données à la section 2.1.1). Soient deux vecteurs $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ de \mathbb{H}^2 situés au point

$P = \begin{pmatrix} a_P \\ b_P \end{pmatrix}$. On définit alors leur produit scalaire sur \mathbb{H}^2 au point P comme étant :

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle_{\mathbb{H}^2} \Big|_P = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{a_P^2} = \frac{v_1 w_1 + v_2 w_2}{a_P^2} \quad (3.17)$$

Où le \cdot désigne, là encore, le produit scalaire usuel dans \mathbb{R}^2 .

La norme induite par ce produit scalaire au point P est alors :

$$\|\vec{v}\|_{\mathbb{H}^2} \Big|_P = \frac{\|\vec{v}\|_{\mathbb{R}^2}}{a_P} \quad (3.18)$$

D'autre part, sur cette variété \mathbb{H}^2 définie en (3.14) (c.f figure 3.3), les droites horizontales et les demi-cercles centrés sur l'axe des ordonnées \mathcal{O}_b forment les *Lignes Géodésiques* de l'espace [16]. Autrement dit, si deux points de l'espace ont même ordonnée b_0 , i.e. si deux points du groupe traduisent la droite des réels du même

coefficient b_0 , le plus court chemin pour relier ces deux points (i.e. la façon d'aller "tout droit" entre ces deux points) dans \mathbb{H}^2 est la ligne horizontale. Par contre, si ces deux points n'ont pas même ordonnée alors la ligne géodésique entre ces deux points sera le demi-cercle centré sur l'axe des ordonnées passant par ces deux points.

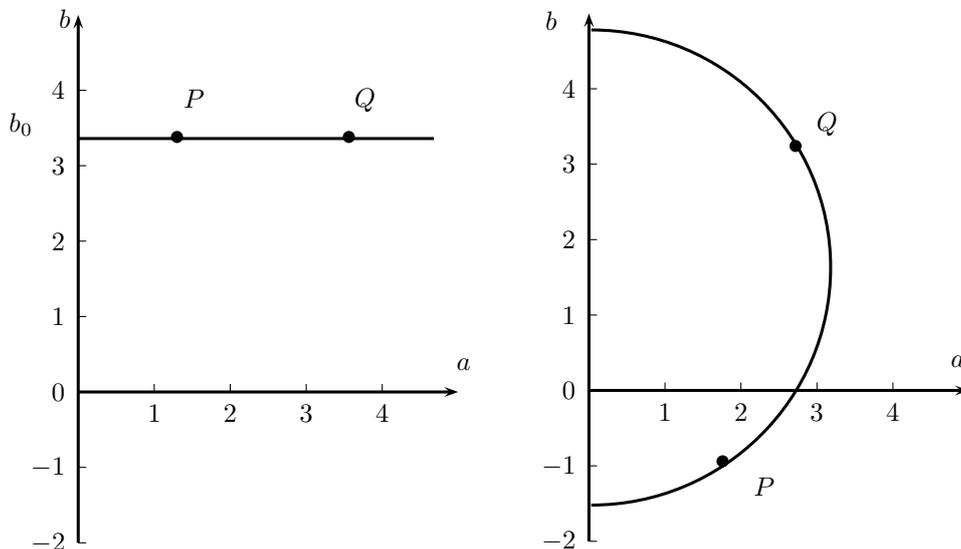


FIGURE 3.4 – Les lignes géodésiques sur \mathbb{H}^2 .

On définit donc l'ensemble de ces lignes géodésiques comme étant l'ensemble :

$$\mathcal{L} = \{\mathcal{H}(\eta), \eta \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathcal{C}(\kappa, r), \kappa \in \mathbb{R}, r > 0\} \quad (3.19)$$

Où $\mathcal{H}(\eta) = \{(a, \eta), a > 0\}$ est l'ensemble des droites horizontales de \mathbb{H}^2 et $\mathcal{C} = \{(a, b) \text{ tq. } a^2 + (b - \kappa)^2 = r^2, a > 0\}$ celui des demi-cercles de rayon r centrés sur l'axe \mathcal{O}_b .

Cette variété étant largement usitée on trouve facilement dans la littérature quelles sont ses géodésiques. Le but, dans la suite de cet exposé, sera de montrer que l'on peut retrouver la forme de ces courbes géodésiques sans pour cela avoir besoin de résoudre le système différentiel d'Euler-Lagrange.

Dans cette représentation du groupe \mathcal{G} par sa variété Riemannienne isomorphe \mathbb{H}^2 munie de la métrique \mathcal{G} , les points $\vec{M} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ du demi-plan \mathbb{H}^2 sont les représentations vectorielles des éléments matriciels $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de \mathcal{G} et il en va de même pour $\vec{M}, \vec{\Omega}_C$ et $\vec{\Omega}_S$ qui sont respectivement les représentations vectorielles des éléments \dot{M} de l'espace tangent à \mathcal{G} et, $\hat{\Omega}_C$ et $\hat{\Omega}_S$ de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} associée à \mathcal{G} , vue par composition à gauche respectivement à droite. Et l'identité $E = \mathbb{I}d$ de \mathcal{G} est représentée sur \mathbb{H}^2 par le point $\vec{e} = (1 \ 0)^T$.

3.3.4 Immersion dans \mathbb{R}^3

La seule variété dans laquelle tout un chacun soit habitué à mesurer des distances c'est son espace de vie \mathbb{R}^3 , dont la métrique est la métrique cartésienne identité de dimension trois $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ assimilée à la notation

$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Pour essayer de comprendre intuitivement comment la métrique de \mathbb{H}^2 se comporte, il serait donc naturel de se demander si on ne peut pas d'une façon ou d'une autre transformer tout ou partie de cette variété non-Euclidienne en éléments de \mathbb{R}^3 . C'est le mathématicien Beltrami en 1865 qui a le premier suspecté que certains morceaux d'espaces non-Euclidiens pouvaient être transformés par isométrie en surfaces bidimensionnelles de \mathbb{R}^3 .

Définition 11 : Isométrie

Une isométrie entre deux espaces métriques est une application qui conserve les distances entre ces deux espaces.

Proposition 5 : Préservation de la métrique

Une application f est une isométrie entre deux variétés Riemannienne si et seulement si le tiré-arrière par f de la métrique de la variété d'arrivée est la métrique de celle de départ.

Cette propriété est particulièrement intéressante puisque les géodésiques d'une variété ont été définies comme les courbes de plus court chemin sur celle-ci. Autrement dit, lors d'une transformation par isométrie l'image d'une géodésique est une géodésique et inversement. Alors, si on cherche les géodésiques d'une variété, on peut la transformer par isométries pour se ramener soit à une variété dont on connaît déjà les géodésiques, soit à une variété où elles semblent plus faciles à déterminer. Et alors, une fois qu'on aura les géodésiques de la variété image, il ne restera plus qu'à effectuer la ou les transformations isométriques inverses pour obtenir les géodésiques de la variété de départ.

Il a été montré [16] que le demi-plan de Poincaré pouvait être partiellement immergé dans \mathbb{R}^3 par isométrie. En effet cette immersion n'est possible que pour $a \geq 1$ car en ce qui concerne la bande verticale $[0; 1[\times \mathbb{R}$, l'espace \mathbb{R}^3 n'est pas assez grand pour la contenir! Voici donc l'isométrie \mathcal{F} présentée dans [16] permettant d'immerger $\mathbb{H}^2 \setminus \{[0; 1[\times \mathbb{R}\}$ dans \mathbb{R}^3 :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F} : \mathbb{H}^2 \setminus \{[0; 1[\times \mathbb{R}\} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\
 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &\mapsto \begin{cases} x = \frac{1}{a} \cos b \\ y = \frac{1}{a} \sin b \\ z = \ln(\sqrt{a^2 - 1} + a) - \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a} \end{cases} \tag{3.20}
 \end{aligned}$$

Il s'agit bien d'une surface bidimensionnelle de \mathbb{R}^3 dont voici la représentation :

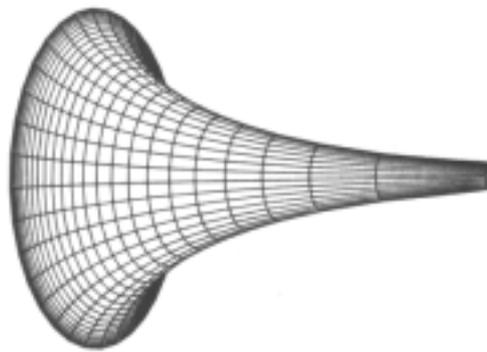


FIGURE 3.5 – La pseudo-sphère dans \mathbb{R}^3 .

Il est possible de s'assurer qu'il s'agit bien d'une isométrie en vérifiant la propriété 5 sur la conservation de la métrique. D'après (3.20) on a :

$$dx(a, b) = -\frac{\cos b}{a^2} da - \frac{\sin b}{a} db$$

Par un calcul analogue on obtient $dy(a, b)$ et $dz(a, b)$. Et alors le tiré-arrière par \mathcal{F} de la métrique canonique de \mathbb{R}^3 s'écrit :

$$ds^2 = dx^2(a, b) + dy^2(a, b) + dz^2(a, b) = \frac{da^2 + db^2}{a^2} = dS^2$$

Autrement dit, la pseudo-sphère dans \mathbb{R}^3 est une représentation isométrique de \mathbb{H}^2 . Alors, une fois les géodésiques de \mathbb{H}^2 déterminées, leur image par \mathcal{F} seront les géodésiques de la pseudo-sphère puisque cette

fonction d'immersion est une isométrie.

Pour en arriver là, il faut encore définir les outils nécessaires à l'écriture de l'équation d'Euler-Poincaré qui, rappelons-le, servira à obtenir les géodésiques recherchées.

La remarque 18 fait mention d'un opérateur d'action Adjointe par conjugaison servant à passer de l'algèbre "à gauche" à l'algèbre "à droite" et il y est souligné que, dans le cas d'étude considéré, cet opérateur n'est pas une isométrie. La section à venir sera consacrée à définir précisément cet opérateur et d'autres qui lui sont liés.

3.4 Opérateurs adjoints, co-adjoints et carte des algèbres

Il a été vu précédemment que l'on pouvait ramener n'importe quel point de l'espace tangent en l'identité et cela de deux façons différentes. En considérant le vecteur tangent \dot{M} à une courbe $\gamma(t)$ sur la variété passant par un point M , on dit que ramener le point M en l'identité c'est transformer la courbe $\gamma(t)$ passant par ce point en une courbe $\Gamma(t)$ passant par l'identité au même instant. L'image de \dot{M} , vecteur tangent à $\gamma(t)$ au point M , sera alors le vecteur tangent $\vec{\Omega}$ à $\Gamma(t)$ en l'identité, et on aura $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_C$ (resp. $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_S$) si on a ramené M en l'identité par composition par la gauche (resp. par la droite). En voici une illustration :

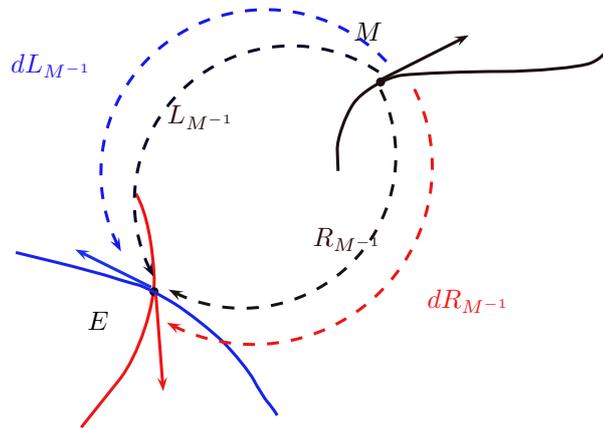


FIGURE 3.6 – Vecteurs de l'algèbre obtenus par composition par la gauche ou par la droite.

On peut résumer schématiquement ces transformations, sur ce que l'on appellera, par la suite, une *carte des algèbres*, comme ceci :

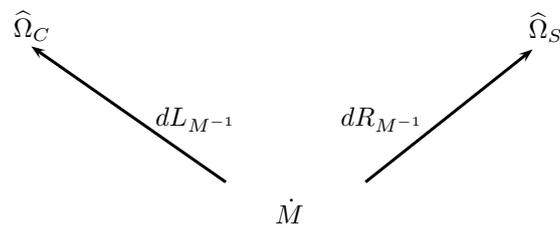


FIGURE 3.7 – Carte des algèbres : Opérateurs de passage de l'espace tangent à l'algèbre, par composition par la gauche et par la droite.

Dans la suite, cette carte va être complétée grâce à des opérateurs qui vont permettre de relier les algèbres entre elles et de les relier également à leur duales (par "les algèbres" on entend l'algèbre vue par la gauche ou par la droite). Au fur et à mesure, seront alors données les quantités sur lesquelles agissent ces opérateurs et leur correspondance physique.

Remarque 19. Les définitions données dans cette section proviennent de [5].

3.4.1 Opérateurs adjoints

Les premiers qui vont compléter la carte commencée à la figure 3.7 seront ceux que l'on appelle les *opérateurs adjoints*. Le premier d'entre eux, et qui va servir de base aux autres, est l'automorphisme de groupe aussi appelé opérateur ADjoint.

Automorphisme ou opérateur ADjoint

Il s'agit de l'action par conjugaison du groupe de Lie sur lui même. Autrement dit cet opérateur permet de "transporter" un élément N du groupe ailleurs sur celui-ci par conjugaison avec un élément $M \in G$ de référence.

Remarque 20. On appelle action par conjugaison le fait de composer à gauche et à droite par respectivement un élément et son inverse.

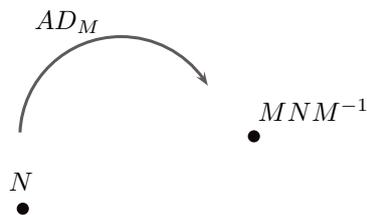


FIGURE 3.8 – Opérateur ADjoint.

Définition 12 : Opérateur ADjoint

$$\begin{aligned}
 AD : G \times G &\rightarrow G \\
 M, N &\mapsto AD_M N = MNM^{-1}
 \end{aligned}
 \tag{3.21}$$

Alors pour le groupe des transformations affines de la droite des réels G , cet opérateur s'écrit pour M et N deux éléments de G tels que $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\boxed{AD_M N = \begin{pmatrix} c & -cb + ad + b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}
 \tag{3.22}$$

Opérateur Adjoint

Si maintenant on considère une courbe $N(t)$ sur la variété passant par l'identité à $t = 0$. Son image par l'opérateur ADjoint sera alors la courbe $\gamma(t) = MN(t)M^{-1}$ passant par $AD_M N(0) = E$ à $t = 0$. De plus, puisque $N(0) = E$, le vecteur tangent $\dot{N}(0)$ à $N(t)$ en $t = 0$ sera un élément de l'algèbre de Lie que l'on pourra noter Ω . On définira l'image de Ω sur $\gamma(t) = AD_M N(t)$ à l'aide de l'opérateur d'action par conjugaison du groupe de Lie sur son algèbre, noté Ad et appelé *opérateur Adjoint*.

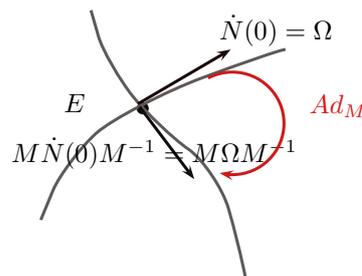


FIGURE 3.9 – Opérateur Adjoint.

Définition 13 : Opérateur Adjoint

Soit une courbe $N(t)$ sur le groupe de Lie, telle que $N(0) = E$. Alors $\dot{N}(0) = \Omega \in \mathfrak{g}$ et on a :

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left(Ad_M N(t) \right) = M \widehat{\Omega} M^{-1} \stackrel{def}{=} Ad_M \widehat{\Omega}$$

Et l'opérateur Adjoint d'action par conjugaison du groupe sur son algèbre est donc défini par :

$$\begin{aligned} Ad : G \times \mathfrak{g} &\rightarrow \mathfrak{g} \\ M, \widehat{\Omega} &\mapsto Ad_M \widehat{\Omega} = M \widehat{\Omega} M^{-1} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Soient $M \in G$ défini comme précédemment. Soit, pour l'algèbre à gauche, $\widehat{\Omega}_C = \begin{pmatrix} \frac{\dot{a}}{a} & \frac{\dot{b}}{a} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et, pour l'algèbre à droite, $\widehat{\Omega}_S = \begin{pmatrix} \frac{\dot{a}}{a} & -\frac{b}{a} \dot{a} + \dot{b} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors :

$$\begin{aligned} Ad_M \widehat{\Omega}_C &= \begin{pmatrix} \frac{1}{a} \dot{a} & -\frac{b}{a} \dot{a} + \dot{b} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \widehat{\Omega}_S \\ Ad_M \widehat{\Omega}_S &= \begin{pmatrix} \frac{1}{a} \dot{a} & -\frac{b}{a} \dot{a} - b \dot{a} + a \dot{b} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Ce qui en notation vectorielle donne :

$$\begin{aligned} Ad_{\vec{M}} \vec{\Omega}_C &= \begin{pmatrix} \frac{1}{a} \dot{a} \\ -\frac{b}{a} \dot{a} + \dot{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -b & a \end{pmatrix} \vec{\Omega}_C = \vec{\Omega}_S \\ Ad_{\vec{M}} \vec{\Omega}_S &= \begin{pmatrix} \frac{1}{a} \dot{a} \\ -\frac{b}{a} \dot{a} - b \dot{a} + a \dot{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -b & a \end{pmatrix} \vec{\Omega}_S \end{aligned}$$

Autrement dit, en notation vectorielle l'opérateur Adjoint est un opérateur matriciel et s'écrit :

$$Ad_{\vec{M}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -b & a \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

Sur le même modèle que (3.24) une autre forme de l'Adjoint est intéressante : celle qui permet d'avoir $\widehat{\Omega}_C$ à partir de $\widehat{\Omega}_S$:

$$Ad_{M^{-1}} \widehat{\Omega}_S = M^{-1} \widehat{\Omega}_S M = \begin{pmatrix} \dot{a}/a & \dot{b}/a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \widehat{\Omega}_C \quad (3.26)$$

Soit en notation vectorielle :

$$Ad_{\vec{M}^{-1}} \vec{\Omega}_S = \vec{\Omega}_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b/a & 1/a \end{pmatrix} \vec{\Omega}_S$$

Autrement dit, en notation vectorielle on a :

$$Ad_{\vec{M}^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b/a & 1/a \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

Remarque 21. Avec cet opérateur on peut compléter la carte, puisqu'il permet de changer de point de vue sur l'algèbre Lie i.e. d'aller de \mathfrak{g}_L dans \mathfrak{g}_R vice-et-versa. La carte des algèbres devient donc :

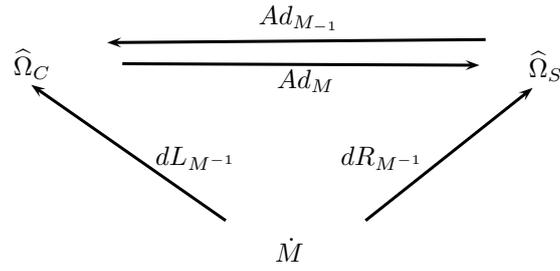


FIGURE 3.10 – Carte des algèbres : Ajout de l'opérateur de changement de point de vue dans l'algèbre.

Opérateur adjoint

On rappelle (c.f. Proposition 4) que l'algèbre de Lie a été définie comme étant l'espace tangent en l'identité d'un groupe de Lie, muni d'un crochet de Lie aussi appelé commutateur. Ce qui suit montre que le crochet de Lie est en fait l'expression de l'opérateur associé à l'action conjuguée de l'algèbre de Lie sur elle-même, appelé *opérateur adjoint* et noté ad .

Définition 14 : Opérateur adjoint

Soient $N(t)$ et $M(t)$ deux courbes sur un groupe de Lie passant toutes deux par l'identité à $t = 0$. Alors $\dot{N}(0) = \hat{\Omega} \in \mathfrak{g}$ et $\dot{M}(0) = \hat{\omega} \in \mathfrak{g}$ et on a :

$$\begin{aligned}
 ad_{\hat{\omega}} \hat{\Omega} &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left(Ad_M(t) \hat{\Omega} \right) \\
 &= \hat{\omega} \hat{\Omega} - \hat{\Omega} \hat{\omega} \\
 &= [\hat{\omega}, \hat{\Omega}]
 \end{aligned}$$

L'opérateur adjoint représente donc l'action par conjugaison de l'algèbre de Lie sur elle-même et est défini par :

$$\begin{aligned}
 ad : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} &\rightarrow \mathfrak{g} \\
 \hat{\Omega}, \hat{\xi} &\mapsto ad_{\hat{\Omega}} \hat{\xi} = [\hat{\Omega}, \hat{\xi}] = \hat{\Omega} \hat{\xi} - \hat{\xi} \hat{\Omega}
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

Voici son expression pour l'algèbre de Lie du groupe des transformations affines de la droite des réels. On vérifiera en même temps que, quelque soit le point de vue avec lequel on considère l'algèbre (par la gauche ou par la droite), le commutateur s'écrit de la même façon :

Pour l'algèbre vue par la gauche : soient $\hat{\Omega}_C = \begin{pmatrix} \dot{a}/a & \dot{b}/a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega_{C_1} & \Omega_{C_2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\hat{\xi}_C = \begin{pmatrix} \dot{c}/c & \dot{d}/c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_{C_1} & \xi_{C_2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ deux éléments de l'algèbre à gauche. Alors :

$$\boxed{ad_{\hat{\Omega}_C} \hat{\xi}_C = [\hat{\Omega}_C, \hat{\xi}_C] = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\dot{a}\dot{d} - \dot{c}\dot{b}}{ac} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_{C_1}\xi_{C_2} - \xi_{C_1}\Omega_{C_2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.29}$$

Ce qui en notation vectorielle se traduit par :

$$ad_{\vec{\Omega}_C} \vec{\xi}_C = [\vec{\Omega}_C, \vec{\xi}_C] = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\dot{a}\dot{d} - \dot{c}\dot{b}}{ac} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\dot{b}/a & \dot{a}/a \end{pmatrix} \vec{\xi}_C$$

Autrement dit (en notation vectorielle) :

$$ad_{\vec{\Omega}_C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\dot{b}/a & \dot{a}/a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\Omega_{C_2} & \Omega_{C_1} \end{pmatrix}$$

Et de même pour l'algèbre vue par la droite, où $\widehat{\Omega}_S = \begin{pmatrix} \dot{a} & -\frac{b\dot{a}}{a} + \dot{b} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega_{S_1} & \Omega_{S_2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ et $\widehat{\xi}_S = \begin{pmatrix} \dot{c} & -\frac{d\dot{c}}{c} + \dot{d} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_{S_1} & \xi_{S_2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ sont deux éléments de l'algèbre "à droite", alors :

$$\boxed{ad_{\widehat{\Omega}_S} \widehat{\xi}_S = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \frac{\dot{a}}{a} \left(-\frac{d}{c} \dot{c} + \dot{d} \right) - \frac{\dot{c}}{c} \left(-\frac{b}{a} \dot{a} + \dot{b} \right) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \Omega_{S_1} \xi_{S_2} - \xi_{S_1} \Omega_{S_2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}} \quad (3.30)$$

En notation vectorielle on obtient :

$$ad_{\vec{\Omega}_S} \vec{\xi}_S = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\frac{b}{a} \dot{a} + \dot{b} & \frac{\dot{a}}{a} \end{pmatrix} \vec{\xi}_S$$

Autrement dit, toujours en notation vectorielle :

$$ad_{\vec{\Omega}_S} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\frac{b}{a} \dot{a} + \dot{b} & \frac{\dot{a}}{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\Omega_{S_2} & \Omega_{S_1} \end{pmatrix}$$

Ainsi, dans tous les cas on a bien $\forall \Omega, \xi \in \mathfrak{g}$, en notation matricielle :

$$\boxed{ad_{\widehat{\Omega}} \widehat{\xi} = [\widehat{\Omega}, \widehat{\xi}] = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \Omega_1 \xi_2 - \xi_1 \Omega_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}} \quad (3.31)$$

Et en notation vectorielle :

$$ad_{\vec{\Omega}} \vec{\xi} = [\vec{\Omega}, \vec{\xi}] = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \Omega_1 \xi_2 - \xi_1 \Omega_2 & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\Omega_2 & \Omega_1 \end{pmatrix} \vec{\xi}$$

D'où on peut écrire, en notation vectorielle, l'opérateur adjoint comme étant l'opérateur matriciel :

$$\boxed{ad_{\vec{\Omega}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\Omega_2 & \Omega_1 \end{pmatrix}} \quad (3.32)$$

3.4.2 Opérateurs co-adjoints

Ces opérateurs vont permettre de travailler sur les éléments de l'algèbre duale de l'algèbre de Lie définie précédemment. A l'instar de l'algèbre qui, physiquement est l'espace des vitesses instantanées, l'algèbre duale est l'espace des moments.

Algèbre duale à gauche

D'un point de vue physique, les éléments de l'algèbre duale sont des *moments* et, en particulier pour l'algèbre duale "à gauche", on a par définition :

$$\boxed{\frac{\partial E_c}{\partial \widehat{\Omega}_C} = \widehat{\Pi}_C} \quad (3.33)$$

où, E_c est l'énergie cinétique du système et $\widehat{\Pi}_C$ est le moment associé à $\widehat{\Omega}_C$ qui est un élément de l'algèbre "à gauche". L'espace des moments est l'algèbre duale, notée \mathfrak{g}^* , associée à l'algèbre de Lie \mathfrak{g} .

Cette formule vient de l'écriture de l'énergie cinétique à l'aide du produit dual. En effet, on peut écrire cette énergie comme $(\widehat{\Pi}_C | \widehat{\Omega}_C)$, où $(\cdot | \cdot)$ est le produit dual défini grâce à l'opérateur trace tr par :

$$\begin{aligned} (\cdot | \cdot) : \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \widehat{\Pi}_C, \widehat{\Omega}_C &\mapsto (\widehat{\Pi}_C | \widehat{\Omega}_C) = tr(\widehat{\Pi}_C^T \widehat{\Omega}_C) \end{aligned} \quad (3.34)$$

D'autre part, de par la définition du lagrangien sur une variété Riemannienne donnée en (3.13) : $\mathbf{E}_c = \frac{1}{2} \vec{\Omega}_C^T \mathbb{I}_c \vec{\Omega}_C$ puisque l'on a placé la métrique identité sur l'algèbre "à gauche". On peut encore écrire cela sous forme matricielle : $\mathbf{E}_c = \frac{1}{2} \langle \hat{\Omega}_C | \hat{\Omega}_C \rangle$, où $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est le produit scalaire matriciel défini à l'aide de l'opérateur trace tr par

$$\langle \mathbf{A} | \mathbf{B} \rangle = tr(\mathbf{A}^T \mathbf{B}) \quad (3.35)$$

Et alors, d'après la définition de la dérivée directionnelle donnée en (5.2), pour toute direction $\widehat{\delta U}$ dans l'algèbre "à gauche" :

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{E}_c}{\partial \hat{\Omega}_C}, \widehat{\delta U} \right\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{E_c(\hat{\Omega}_C + \varepsilon \widehat{\delta U}) - E_c(\hat{\Omega}_C)}{\varepsilon}$$

Et on a

$$E_c(\hat{\Omega}_C + \varepsilon \widehat{\delta U}) = \frac{1}{2} \langle \hat{\Omega}_C + \varepsilon \widehat{\delta U} | \hat{\Omega}_C + \varepsilon \widehat{\delta U} \rangle = \frac{1}{2} (\hat{\Omega}_C + \varepsilon \widehat{\delta U})^T (\hat{\Omega}_C + \varepsilon \widehat{\delta U})$$

En développant cette expression et en la réintégrant dans l'écriture de la dérivée directionnelle on en arrive à :

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{E}_c}{\partial \hat{\Omega}_C}, \widehat{\delta U} \right\rangle = 2 \frac{1}{2} tr(\hat{\Omega}_C^T \widehat{\delta U}) = \langle \hat{\Omega}_C | \widehat{\delta U} \rangle$$

Et ainsi :

$$\boxed{\hat{\Pi}_C = \frac{\partial \mathbf{E}_c}{\partial \hat{\Omega}_C} = \hat{\Omega}_C} \quad (3.36)$$

Autrement dit, l'application α_M qui transforme l'algèbre "à gauche" en son algèbre duale est l'application identité ($\alpha_M : \hat{\Omega}_C \mapsto \hat{\Pi}_C = \hat{\Omega}_C$) et les éléments de l'algèbre duale "à gauche" ont la même forme que ceux de l'algèbre à gauche, bien que physiquement, une fois mis sous forme vectorielle, les premiers soient des moments et les seconds des vitesses instantanées.

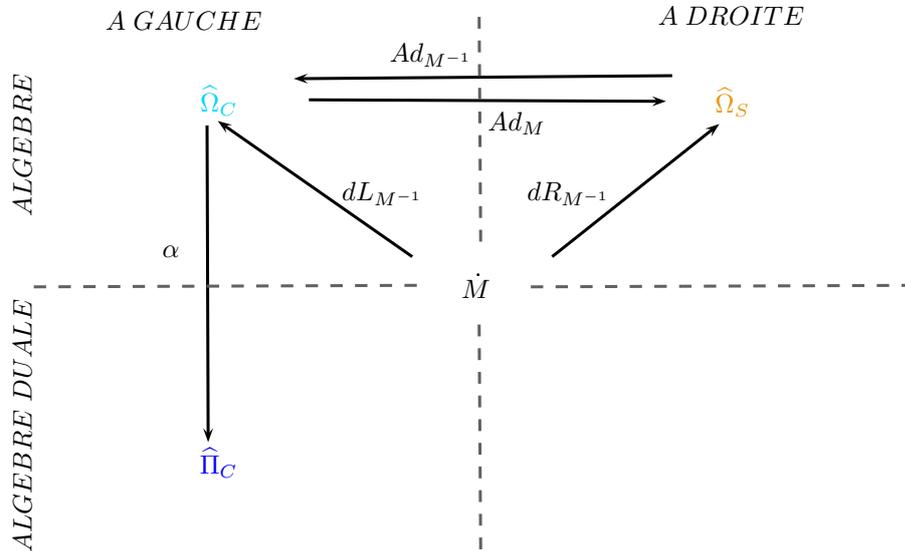


FIGURE 3.11 – Carte des algèbres : Ajout du passage de l'algèbre "à gauche" à son algèbre duale et vice-versa par l'opérateur α_M .

Par ailleurs, d'un point de vue physique, vitesses instantanées et moments sont reliés par $\vec{\Pi}_C = \mathbb{I}_C \vec{\Omega}_C$, où \mathbb{I}_C est la matrice d'inertie du système dans le repère du corps. Or ici, $\hat{\Pi}_C = \hat{\Omega}_C$ ce qui en notations vectorielles s'écrit $\vec{\Pi}_C = \vec{\Omega}_C$. Donc on a : $\mathbb{I}_C = \mathbb{I}_d$ et cette matrice d'inertie correspond à la métrique identité placée sur l'algèbre de Lie vue par la gauche.

Algèbre duale à droite

Tout comme précédemment on avait $E_c = \left(\hat{\Pi}_C \mid \hat{\Omega}_C \right)$, on a aussi pour l'algèbre "à droite" et son dual

$$E_c = \left(\hat{\Pi}_S \mid \hat{\Omega}_S \right), \text{ où } \hat{\Pi}_S \text{ est le moment associé à } \hat{\Omega}_S \in \mathfrak{g}_R. \text{ Et comme } \hat{\Omega}_C = Ad_{M^{-1}} \hat{\Omega}_S = M^{-1} \hat{\Omega}_S M$$

(c.f. carte des algèbres), avec $\hat{\Omega}_S = \begin{pmatrix} \Omega_{S_1} & \Omega_{S_2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$, on peut alors écrire que :

$$\begin{aligned} E_c &= \left(\hat{\Pi}_C \mid \hat{\Omega}_C \right) = \left(\hat{\Pi}_C \mid M^{-1} \hat{\Omega}_S M \right) \\ &= \left(\Pi_{C_1} + \frac{b}{a} \Pi_{C_2} \mid \Omega_{S_1} + \frac{\Pi_{C_2}}{a} \Omega_{S_2} \right) \\ &= \left(\begin{pmatrix} \Pi_{C_1} + \frac{b}{a} \Pi_{C_2} & \frac{\Pi_{C_2}}{a} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \mid \hat{\Omega}_S \right) = \left(\hat{\Pi}_S \mid \hat{\Omega}_S \right) \end{aligned}$$

D'où $\hat{\Pi}_S = \begin{pmatrix} \Pi_{C_1} + \frac{b}{a} \Pi_{C_2} & \frac{\Pi_{C_2}}{a} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$. Or, $\hat{\Pi}_C = \hat{\Omega}_C = \begin{pmatrix} \dot{a}/a & \dot{b}/a \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ donc :

$$\hat{\Pi}_S = \begin{pmatrix} \Omega_{C_1} + \frac{b}{a} \Omega_{C_2} & \frac{\Omega_{C_2}}{a} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\dot{a}}{a} + \frac{b\dot{b}}{a^2} & \frac{\dot{b}}{a^2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

Ce qui en notation vectorielle s'écrit :

$$\vec{\Pi}_S = \begin{pmatrix} \Omega_{C_1} + \frac{b}{a} \Omega_{C_2} \\ \frac{\Omega_{C_2}}{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\dot{a}}{a} + \frac{b\dot{b}}{a^2} \\ \frac{\dot{b}}{a^2} \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

De plus $\hat{\Omega}_C = M^{-1} \hat{\Omega}_S M$ donc $\Omega_{C_1} = \Omega_{S_1}$ et $\Omega_{C_2} = \frac{b}{a} \Omega_{S_1} + \frac{1}{a} \Omega_{S_2}$. Alors l'opérateur β_M qui transforme l'algèbre "à droite" en son algèbre duale est :

$$\begin{aligned} \beta_M : \mathfrak{g} &\rightarrow \mathfrak{g}^* \\ \hat{\Omega}_S &\mapsto \hat{\Pi}_S = \begin{pmatrix} \Omega_{S_1} \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) + \frac{b}{a^2} \Omega_{S_2} & \frac{b}{a^2} \Omega_{S_1} + \frac{1}{a^2} \Omega_{S_2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.39)$$

Complétons la carte avec ce nouvel opérateur de passage.

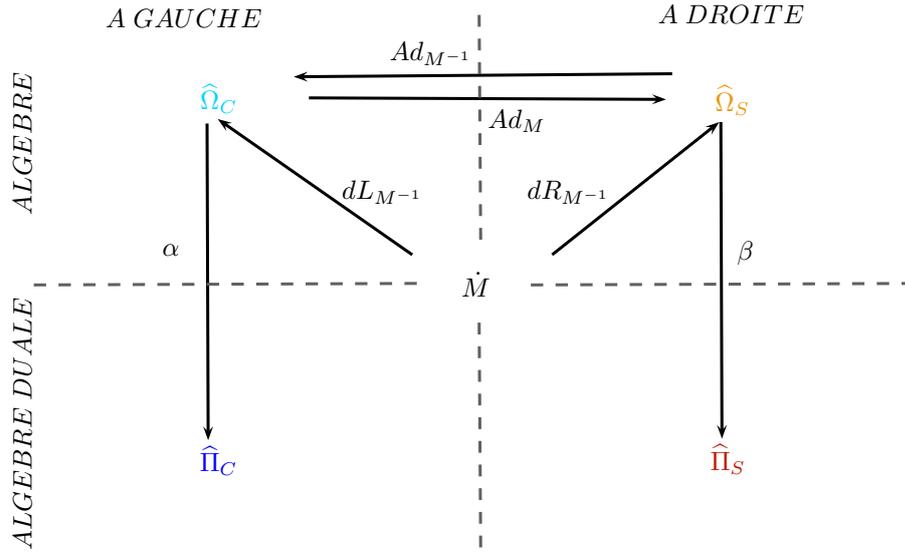


FIGURE 3.12 – Carte des algèbres : Ajout du passage de l’algèbre "à droite" à son algèbre duale et vice-versa par l’opérateur β_M .

Remarque 22. En notation vectorielle on a : $\vec{\Pi}_S = \begin{pmatrix} \Omega_{S_1}(1 + \frac{b^2}{a^2}) + \frac{b}{a^2}\Omega_{S_2} \\ \frac{b}{a^2}\Omega_{S_1} + \frac{1}{a^2}\Omega_{S_2} \end{pmatrix}$ Et, de même que pour l’algèbre duale à gauche, en notation vectorielle, on a $\boxed{\vec{\Pi}_S = \mathbb{I}_S \vec{\Omega}_S}$ avec

$$\mathbb{I}_S = \begin{pmatrix} 1 + \frac{b^2}{a^2} & \frac{b}{a^2} \\ \frac{b}{a^2} & \frac{1}{a^2} \end{pmatrix}$$

où \mathbb{I}_S est la matrice d’inertie du système dans le repère spatial et là encore cette matrice d’inertie correspond à la métrique que déterminée pour l’algèbre de Lie vue par la droite.

De même qu’il existe un opérateur permettant de changer de point de vue sur l’algèbre, il en existe un qui fait la même chose sur l’algèbre duale. Il est appelé opérateur co-Adjoint.

Opérateur co-Adjoint

L’opérateur co-Adjoint représente l’action conjuguée du groupe de Lie sur son algèbre duale. Il est défini comme suit :

Définition 15 : Opérateur co-Adjoint

L’opérateur co-Adjoint est l’opérateur $Ad^* : \mathcal{G} \times \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$, où \mathfrak{g}^* est l’algèbre duale de \mathfrak{g} , défini tel que, pour $M \in \mathcal{G}$, $\hat{\Omega} \in \mathfrak{g}$ et $\hat{\eta} \in \mathfrak{g}^*$ on ait :

$$\left(Ad_M^* \hat{\eta} \mid \hat{\Omega} \right) = \left(\hat{\eta} \mid Ad_M \hat{\Omega} \right)$$

où $(\cdot \mid \cdot)$ est le produit dual défini en (3.34)

Remarque 23. Quelque soit le point de vue d’observation d’où on se place pour examiner l’algèbre duale (par la gauche ou par la droite), ses éléments $\hat{\eta} \in \mathfrak{g}^*$ peuvent se mettre sous la forme $\hat{\eta} = \begin{pmatrix} \eta_1 & \eta_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Soient $M \in G$, $\widehat{\Omega} \in \mathfrak{g}$ et $\widehat{\eta} \in \mathfrak{g}^*$ définis comme précédemment. On a :

$$\begin{aligned} \left(Ad_M^* \widehat{\eta} \mid \widehat{\Omega} \right) &= \left(\widehat{\eta} \mid Ad_M \widehat{\Omega} \right) = \left(\widehat{\eta} \mid M \widehat{\Omega} M^{-1} \right) \\ &= (\eta_1 - b\eta_2)\Omega_1 + a\eta_2\Omega_2 \\ &= \left(\begin{pmatrix} \eta_1 - b\eta_2 & a\eta_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \widehat{\Omega} \right) \end{aligned}$$

Ainsi, l'opérateur co-Adjoint s'écrit :

$$\boxed{Ad_M^* \widehat{\eta} = \begin{pmatrix} \eta_1 - b\eta_2 & a\eta_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \quad (3.40)$$

Et par le même procédé on obtient :

$$\boxed{Ad_{M^{-1}}^* \widehat{\eta} = \begin{pmatrix} \eta_1 + \frac{b}{a}\eta_2 & \frac{\eta_2}{a} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \quad (3.41)$$

Soit, en notations vectorielles :

$$Ad_{\vec{M}}^* \vec{\eta} = \begin{pmatrix} \eta_1 - b\eta_2 \\ a\eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -b \\ 0 & a \end{pmatrix} \vec{\eta}$$

D'où $Ad_{\vec{M}}^* = \begin{pmatrix} 1 & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ qui est un opérateur matriciel. Et de même : $Ad_{\vec{M}^{-1}}^* = \begin{pmatrix} 1 & b/a \\ 0 & a \end{pmatrix}$

D'autre part, (3.40) et (3.41) permettent de relier l'algèbre duale "à gauche" à l'algèbre duale "à droite". En effet, puisque $\widehat{\Pi}_C = \widehat{\Omega}_C = \begin{pmatrix} \frac{a}{0} & \frac{b}{0} \end{pmatrix}$ et $\widehat{\Pi}_S = \begin{pmatrix} \frac{a}{a} + \frac{bb}{a^2} & \frac{b}{a^2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors :

$$\boxed{Ad_M^* \widehat{\Pi}_S = \widehat{\Pi}_C} \quad (3.42)$$

Et $\boxed{Ad_{M^{-1}}^* \widehat{\Pi}_C = \widehat{\Pi}_S} \quad (3.43)$

Ce qui en notation vectorielle s'écrit : $Ad_{\vec{M}}^* \vec{\Pi}_S = \vec{\Pi}_C$ et $Ad_{\vec{M}^{-1}}^* \vec{\Pi}_C = \vec{\Pi}_S$.

Les équations (3.42) et (3.43) permettent de compléter la carte comme ceci :

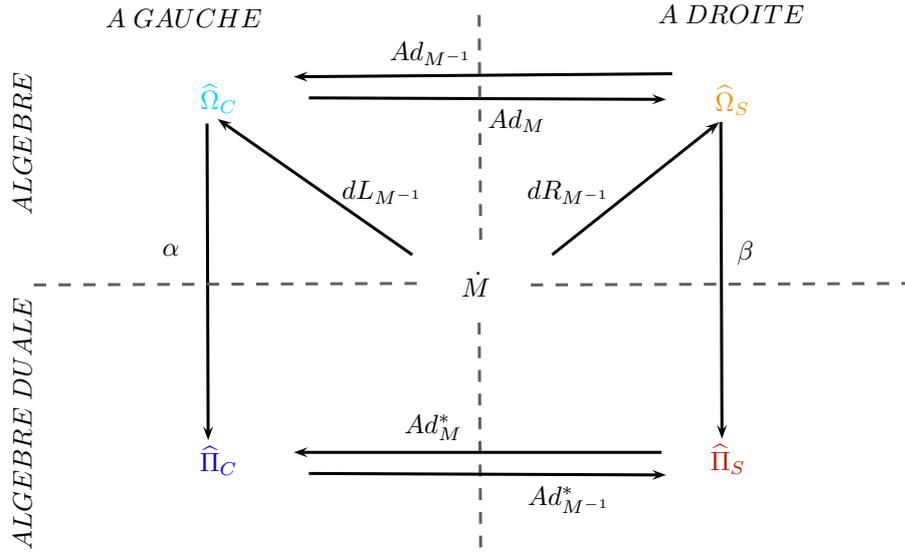


FIGURE 3.13 – Carte des algèbres : ajout du passage de l'algèbre duale "à gauche" à l'algèbre duale "à droite" et vice-versa.

Remarque 24. On peut encore compléter cette carte en remarquant que $\dot{M} \in T_M G$ et que donc il doit exister un $\mathbf{p} \in T_M^* G$ qui soit le moment associé à \dot{M} dans l'espace tangent à G en M . Ceci implique de construire trois opérateurs supplémentaires : un permettant de passer de $T_M G$ à $T_M^* G$ et deux autres ramenant les éléments de l'algèbre duale dans l'espace tangent dual, respectivement par la gauche et par la droite.

On commencera par ces deux derniers et, en particulier, par l'opérateur permettant d'emmener l'algèbre duale sur l'espace tangent dual en M par la gauche. Pour cela rappelons que le lagrangien de la variété s'écrit à l'aide du produit dual comme $(\hat{\Pi}_C | \hat{\Omega}_C)$ ce que l'on peut facilement réécrire à l'aide de la carte comme $(\hat{\Pi}_C | dL_{M^{-1}} \dot{M})$. D'où, par définition du produit dual, on aura :

$$(\hat{\Pi}_C | \hat{\Omega}_C) = ((dL_{M^{-1}})^* \hat{\Pi}_C | \dot{M})$$

Alors le moment \mathbf{p} associé à \dot{M} dans l'espace tangent dual en M s'écrira, du point de vue de l'algèbre duale "à gauche" : $\mathbf{p} = (dL_{M^{-1}})^* \hat{\Pi}_C$, où $(dL_{M^{-1}})^*$ est l'opérateur dual de $dL_{M^{-1}}$, que l'on notera par la suite $dL_{M^{-1}}^*$. Alors, en calculant $(\hat{\Pi}_C | dL_{M^{-1}} \dot{M}) = (\hat{\Pi}_C | M^{-1} \dot{M})$ on obtient :

$$\boxed{\mathbf{p} = (M^{-1})^T \hat{\Pi}_C} \quad (3.44)$$

D'où on définit l'opérateur dual de $dL_{M^{-1}}$ par :

$$\begin{aligned} dL_{M^{-1}}^* : \mathfrak{g}_L^* &\rightarrow T_M^* G \\ \hat{\Pi}_C &\mapsto \mathbf{p} = (M^{-1})^T \hat{\Pi}_C \end{aligned} \quad (3.45)$$

Ce qui en notation vectorielle s'écrira : $\vec{\mathbf{p}} = \frac{1}{a} \vec{\Pi}_C$, d'où $dL_{M^{-1}}^* = \begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix}$.

Et par le même procédé sur l'algèbre duale "à droite", on obtiendra que :

$$\mathbf{p} = \hat{\Pi}_S (M^{-1})^T \quad (3.46)$$

D'où on définit l'opérateur dual de $dR_{M^{-1}}$ par :

$$\begin{aligned}
 dR_{M^{-1}}^* : \mathfrak{g}_R^* &\rightarrow T_M^*G \\
 \hat{\Pi}_S &\mapsto p = \hat{\Pi}_S (M^{-1})^T
 \end{aligned}
 \tag{3.47}$$

Ce qui en notation vectorielle s'écrira : $\vec{p} = M^{-1} \vec{\Pi}_S$, d'où $dR_{\vec{M}^{-1}}^* = M^{-1}$.

On peut donc d'ores-et-déjà compléter la carte avec ses deux opérateurs.

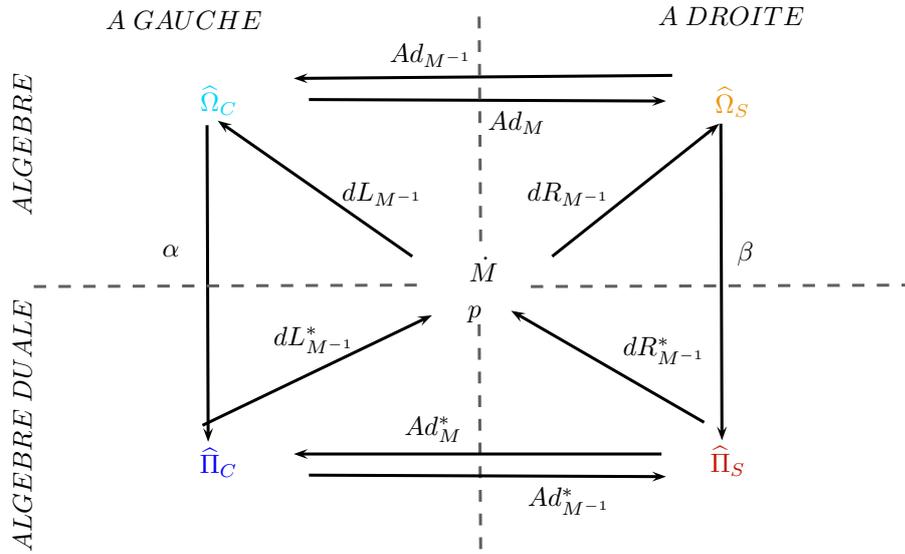


FIGURE 3.14 – Carte des algèbres : ajout du passage de l'algèbre duale à l'espace tangent dual.

Il ne manque plus maintenant que l'opérateur permettant de relier la vitesse \dot{M} dans l'espace tangent à son moment associé p dans l'espace tangent dual. Pour cela il suffit par exemple de prendre l'expression (3.44) de p et de se rappeler que $\hat{\Pi}_C = \hat{\Omega}_C = M^{-1} \dot{M}$ et alors on a :

$$p = \underbrace{(M^{-1})^T M^{-1}}_{\Sigma_M} \dot{M} = \Sigma_M \dot{M}
 \tag{3.48}$$

Ce qui en notation vectorielle s'écrit $\vec{p} = \frac{1}{a^2} \dot{M}$, d'où :

$$\Sigma_{\vec{M}} = \begin{pmatrix} 1/a^2 & 0 \\ 0 & 1/a^2 \end{pmatrix}
 \tag{3.49}$$

Voici donc la carte complète des algèbre du groupe de Lie \mathcal{G} .

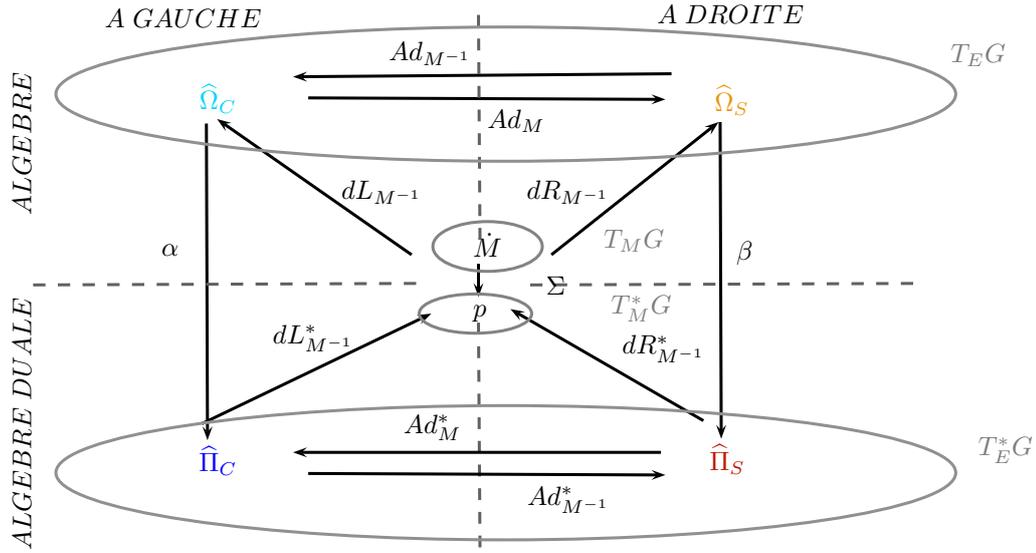


FIGURE 3.15 – Carte finale des algèbres.

Opérateur co-adjoint

De même qu'a été défini un commutateur sur l'algèbre de Lie, il est possible d'en définir un sur son algèbre duale. Ce commutateur sur l'algèbre duale peut également être défini à l'aide de l'opérateur exprimant l'action conjuguée de l'algèbre sur son dual. Cet opérateur s'appelle l'opérateur co-adjoint, il est noté ad^* et voici sa définition :

Définition 16 : Opérateur co-adjoint

L'opérateur co-adjoint est l'opérateur $ad^* : \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}^*$ défini tel que, pour $\hat{\eta} \in \mathfrak{g}^*$ et $\hat{\Omega}, \hat{\omega} \in \mathfrak{g}$ on ait :

$$\left(ad_{\hat{\Omega}}^* \hat{\eta} \mid \hat{\omega} \right) = \left(\hat{\eta} \mid ad_{\hat{\Omega}} \hat{\omega} \right) \quad (3.50)$$

où $\left(\cdot \mid \cdot \right)$ est le produit dual défini en (3.34).

Il s'agit maintenant de déterminer explicitement ce crochet grâce à (3.50) :

$$\begin{aligned} \left(ad_{\hat{\omega}}^* \hat{\eta} \mid \hat{\Omega} \right) &= \left(\hat{\eta} \mid ad_{\hat{\omega}} \hat{\Omega} \right) = \left(\hat{\eta} \mid \hat{\omega} \hat{\Omega} - \hat{\Omega} \hat{\omega} \right) \\ &= \eta_2 \omega_1 \Omega_2 - \eta_2 \omega_2 \Omega_1 \\ &= \left(\begin{pmatrix} -\eta_2 \omega_2 & \eta_2 \omega_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \hat{\Omega} \right) \end{aligned}$$

Autrement dit :

$$\begin{aligned} ad^* : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* &\rightarrow \mathfrak{g}^* \\ \hat{\omega}, \hat{\eta} &\mapsto ad_{\hat{\omega}}^* \hat{\eta} = \{ \hat{\omega}, \hat{\eta} \} = \begin{pmatrix} -\eta_2 \omega_2 & \eta_2 \omega_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.51)$$

Soit, en notation vectorielle : $ad_{\vec{\omega}}^* \vec{\eta} = \begin{pmatrix} -\eta_2 \omega_2 \\ \eta_2 \omega_1 \end{pmatrix}$.

Remarque 25. C'est à partir de la notation vectorielle de cet opérateur co-adjoint qu'est définie l'équation d'Euler-Poincaré. En effet, alors que l'équation d'Euler-Lagrange est définie sur le fibré tangent (union des espaces tangents en chacun des points) de la variété dont on cherche les géodésiques, l'équation d'Euler-Poincaré donne un système différentiel équivalent, définit, lui, sur l'algèbre duale du groupe de Lie associé à la variété.

3.5 Géodésiques et quantités conservées

On rappelle que le but de ce chapitre est de présenter un moyen d'obtenir les géodésiques d'une variété Riemannienne en s'abstrayant des problèmes de non-linéarités de paramétrage rencontrés lors de l'utilisation du théorème d'Euler-Lagrange.

On a vu précédemment que les variétés Riemanniennes présentant des symétries, et donc une invariance du lagrangien sous l'action d'un groupe de Lie, étaient isomorphes à ce groupe. D'autre part, à la fin du premier chapitre a été évoquée la conservation de la projection des vecteurs vitesses sur un champ de Killing le long des géodésiques. Ces deux notions sont en fait liées et c'est Poincaré qui fit cette liaison en formulant les théorèmes 6 et 7.

3.5.1 Équations d'Euler-Poincaré

Pour écrire les théorèmes de Poincaré il faut tout d'abord définir ce que l'on appelle l'équation de Poincaré et qui est une restriction de l'équation d'Euler-Lagrange à l'algèbre de Lie du groupe isomorphe à la variété étudiée. Tout ce qui précède dans ce chapitre a servi à présenter les outils nécessaires à l'appréhension de cette formule.

Définition 17 : Équation d'Euler-Poincaré

Soient $\widehat{\Omega}_C = M^{-1}\dot{M} \in \mathfrak{g}_L$ une matrice de l'algèbre de Lie invariante à gauche, $\vec{\Omega}_C$ sa notation vectorielle, et $\vec{\Pi}_C = \frac{\partial \vec{E}_C}{\partial \vec{\Omega}_C} \in \mathfrak{g}^*$ son élément dual associé. Alors l'équation de Euler-Poincaré est donnée par :

$$\boxed{\frac{d\vec{\Pi}_C}{dt} = ad_{\vec{\Omega}_C}^* \vec{\Pi}_C} \quad (3.52)$$

Cette équation décrit l'équation du mouvement co-adjoint sur l'algèbre de Lie duale. C'est-à-dire qu'elle décrit le mouvement en terme d'action par la gauche de l'algèbre de Lie sur son algèbre duale et cela pour un groupe de Lie tel que le lagrangien de la variété qui lui est isomorphe soit invariant sous l'action par la gauche de ce groupe.

Théorème 6 : Théorème 1 de Poincaré [5]

Une action $S(\widehat{\Omega}) = \int_a^b l(\widehat{\Omega}) dt$ qui est stationnaire i.e. $\delta S(\widehat{\Omega}) = 0$, pour un lagrangien $l : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$ invariant à gauche sous l'action d'un groupe de Lie, vérifie l'équation d'Euler-Poincaré sur \mathfrak{g}^* :

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta l}{\delta \widehat{\Omega}} = ad_{\widehat{\Omega}}^* \frac{\delta l}{\delta \widehat{\Omega}} \quad (3.53)$$

lorsque l'on astreint les variations du champ de vecteurs invariant à gauche $\widehat{\Omega} = M^{-1}\dot{M}(t) \in \mathfrak{g}$ à être de la forme $\delta \widehat{\Omega} = \dot{\widehat{\Gamma}} + ad_{\widehat{\Omega}} \widehat{\Gamma}$ où $\widehat{\Gamma}(t) \in \mathfrak{g}$ est une courbe infinitésimale sur l'algèbre de Lie invariante à gauche \mathfrak{g}_L qui s'annule aux bornes temporelles.

Remarque 26. La forme de la variation du champ de vecteurs invariant à gauche se retrouve en prenant pour celui-ci : $\widehat{\Omega} = M^{-1}\dot{M}$; et pour la courbe infinitésimale sur \mathfrak{g}_L : $\widehat{\Gamma}(t) = M^{-1}\delta M$. Alors la variation du premier s'écrit : $\delta \widehat{\Omega} = -\widehat{\Gamma}\widehat{\Omega} + M^{-1}\delta \dot{M}$; et la dérivation temporelle du second s'écrit : $\dot{\widehat{\Gamma}} = -\widehat{\Omega}\widehat{\Gamma} + M^{-1}\delta \dot{M}$. Ainsi, en prenant leur différence on obtient $\delta \widehat{\Omega} - \dot{\widehat{\Gamma}} = \widehat{\Omega}\widehat{\Gamma} - \widehat{\Gamma}\widehat{\Omega}$, soit : $\delta \widehat{\Omega} = \dot{\widehat{\Gamma}} + ad_{\widehat{\Omega}} \widehat{\Gamma}$.

Théorème 7 : Théorème 2 de Poincaré [5]

Si un lagrangien est invariant à gauche sous l'action d'un groupe de Lie alors les géodésiques de la variété vérifient (3.52) et les quantités conservées au cours du mouvement sont telles que

$$\frac{d\vec{\Pi}_S}{dt} = 0 \quad (3.54)$$

C'est grâce à ce deuxième théorème qu'il est possible, non seulement, d'écrire les géodésiques d'une variété Riemannienne non-pas à partir de son système de coordonnées mais à partir des quantités du mouvement, et en plus de déterminer explicitement quelles sont les quantités conservées le long des géodésiques (On rappelle que les conservations sont liées aux symétries de la variété et donc à l'invariance du lagrangien sous l'action du groupe). Ceci sera illustré dans la suite en poursuivant l'exemple de \mathbb{H}^2 et, au passage, il sera vérifié que le théorème 7 est un corollaire du théorème 6.

On rappelle que dans le cas étudié, le lagrangien sur la variété \mathbb{H}^2 s'écrit sous la seule forme d'une énergie cinétique comme $E_C = \vec{\Omega}_C^T \vec{\Omega}_C$, où $\vec{\Omega}_C \in \mathfrak{g}$ et son moment associé s'écrit dans l'algèbre duale $\vec{\Pi}_C = \frac{\partial E_C}{\partial \vec{\Omega}_C} = \vec{\Omega}_C$. Il s'agit tout d'abord de vérifier que ce lagrangien est invariant à gauche.

Soit $M(t) \in G$ alors $\hat{\Omega}_C = dL_{M^{-1}} \dot{M}$ et $E_C(M) = \hat{\Omega}_C^T \hat{\Omega}_C$. Si on transforme M en m par composition à gauche par un élément quelconque $N \in G$ indépendant du temps alors $m(t) = NM(t) \in G$ et $\hat{\omega}_C = dL_{m^{-1}} \dot{m} = M^{-1}N^{-1}(N\dot{M}) = \hat{\Omega}_C$ et alors $E_C(m) = E_C(M)$. Le lagrangien est donc bien invariant par action à gauche du groupe de Lie. De plus la propriété de conservation de l'énergie totale permet de dire que l'action définie à partir de ce lagrangien est stationnaire. Toutes les hypothèses sont donc présentes pour appliquer le théorème 6.

Puisque $\frac{\delta l}{\delta \hat{\Omega}} = \frac{\partial E_C}{\partial \hat{\Omega}} = \hat{\Pi}_C$ et que d'après le théorème 6 les géodésiques vérifient (3.53) alors on a bien que les géodésiques vérifient (3.52). D'ailleurs on peut le vérifier autrement : il suffit d'écrire (3.52) pour le cas étudié et de vérifier si le système différentiel ainsi obtenu (une fois écrit en terme de coordonnées) est bien le même que celui obtenu à partir de l'équation d'Euler-Lagrange (2.10). Voici pour le cas de \mathbb{H}^2 :

Tout d'abord, pour \mathfrak{g} , (3.52) s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{\Pi}_{C_1} &= -\Pi_{C_2} \Omega_{C_2} \\ \dot{\Pi}_{C_2} &= \Pi_{C_2} \Omega_{C_1} \end{cases}$$

Ces équations font apparaître $\hat{\Pi}_C$ et $\hat{\Omega}_C$ et sont donc écrites non pas en fonction des coordonnées mais en fonction des quantités du mouvement à savoir la vitesse et le moment. Ce système est donc bien l'expression du mouvement en terme d'action de l'algèbre à gauche sur son algèbre duale. Or grâce à la carte des algèbres on sait qu'il existe un opérateur qui les relie (en l'occurrence l'opérateur α_M identité). On peut donc ramener ces équations uniquement dans l'algèbre à gauche. Ainsi on obtient :

$$\boxed{\begin{cases} \dot{\Omega}_{C_1} &= -\Omega_{C_2}^2 \\ \dot{\Omega}_{C_2} &= \Omega_{C_2} \Omega_{C_1} \end{cases}} \quad (3.55)$$

C'est ce système qui permettra tout à l'heure de déterminer les équations des géodésiques sur la variété.

Il s'agit maintenant de vérifier que ce sont bien des équations différentielles vérifiées par les géodésiques, vues depuis l'algèbre i.e. l'espace tangent en l'identité.

En faisant appel au chapitre 1, on sait que le théorème d'Euler-Lagrange permet d'obtenir les équations différentielles vérifiées par les géodésiques d'un système lagrangien et que, plus précisément dans le cas d'une variété Riemannienne de dimension n représentée à l'aide d'un système de coordonnées $x_i, i = 1 \dots n$, ces équations étaient de la forme :

$$\ddot{x}_k + \dot{x}_i \dot{x}_j \Gamma_{ij}^k = 0 \quad (3.56)$$

où les Γ_{ij}^k sont les symboles de Christoffel associés à la métrique de la variété, définis par : $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{km} (g_{im,j} + g_{jm,i} - g_{ij,m})$, et où les g_{ij} sont les éléments de la matrice représentant la métrique de la variété et les g^{ij} les éléments de la matrice inverse. De plus, on rappelle la notation $g_{ij,m} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_m}$.

Or, au groupe des transformations affines de la droite des réels il a été précédemment associé une variété Riemannienne bidimensionnelle isomorphe, notée \mathbb{H}^2 , et constituée du demi-plan de Poincaré, représenté par le système de coordonnées (a, b) , et muni de la métrique symétrique $\mathcal{G} = \begin{pmatrix} 1/a^2 & 0 \\ 0 & 1/a^2 \end{pmatrix}$. Alors les coefficients de Christoffel associés sont :

$$\begin{aligned} \Gamma_{aa}^a &= -\frac{1}{a} \\ \Gamma_{ab}^b &= \Gamma_{ba}^b = -\frac{1}{a} \\ \Gamma_{bb}^a &= \frac{1}{a} \\ \Gamma_{aa}^b &= \Gamma_{ab}^a = \Gamma_{ba}^a = \Gamma_{bb}^b = 0 \end{aligned}$$

Et en conséquences les équations d'Euler-Lagrange vérifiées par les géodésiques sur cette variété sont :

$$\boxed{\begin{cases} \ddot{a} = \frac{\dot{a}^2 - \dot{b}^2}{a} \\ \ddot{b} = \frac{2\dot{a}\dot{b}}{a} \end{cases}} \quad (3.57)$$

Or on a par ailleurs $\vec{\Omega}_C = \frac{1}{a} \begin{pmatrix} \dot{a} \\ \dot{b} \end{pmatrix}$ d'où $\begin{pmatrix} \dot{a} \\ \dot{b} \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \Omega_{C_1} \\ \Omega_{C_2} \end{pmatrix}$. En dérivant cette dernière équation, en tenant compte de (3.57) et en remplaçant \dot{a} et \dot{b} respectivement par $a\Omega_{C_1}$ et $a\Omega_{C_2}$, on obtient :

$$\begin{cases} \dot{\Omega}_{C_1} = -\Omega_{C_2}^2 \\ \dot{\Omega}_{C_2} = \Omega_{C_2}\Omega_{C_1} \end{cases}$$

Autrement dit les équations d'Euler-Poincaré sont bien des équations vérifiées par les géodésiques, et entre les équations d'Euler-Lagrange et celles d'Euler-Poincaré, ce qui fait la différence c'est que les premières sont écrites sur tout l'espace tangent au groupe à l'aide du système de coordonnées alors que les secondes sont restreintes à l'algèbre vue par composition par la gauche et écrite en fonction de variables intrinsèques à la géométrie de la variété : les quantités du mouvement.

Dans la suite, la deuxième partie du théorème 7 sera vérifiée, à savoir que $\frac{d\vec{\Pi}_S}{dt} = \mathbf{0}$, et, à l'aide de cette équation les constantes du mouvement le long des géodésiques seront déterminées.

3.5.2 Quantités conservées le long des géodésiques

Projection de la vitesse sur un champ de Killing

On rappelle (cf. proposition 3) que l'une des constantes du mouvement est la projection du vecteur vitesse le long d'une géodésique sur un champ de Killing. Il s'agit de déterminer s'il existe sur la variété étudiée un champ de Killing, i.e. un champ de vecteurs qui conserve la métrique \mathcal{G} (c.f. Définition 7).

Sur \mathbb{H}^2 muni de la métrique de Poincaré et du système de coordonnées (a, b) , tous les champs de vecteurs possibles peuvent être engendrés par combinaison des deux champs $\frac{\partial}{\partial a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\frac{\partial}{\partial b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (ces champs de vecteurs sont orthogonaux mais pas normés au sens de la norme sur \mathbb{H}^2). On cherche alors s'il existe un champ de vecteurs $\vec{X} = f(a, b)\frac{\partial}{\partial a} + g(a, b)\frac{\partial}{\partial b}$ qui soit un champ de Killing i.e. tel que

$$\langle \nabla \mathcal{G}, \vec{X} \rangle = 0 \Leftrightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{G}(\vec{M} + \varepsilon \vec{X}) - \mathcal{G}(\vec{M})}{\varepsilon} = 0$$

Or, $\vec{M} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, d'où $\vec{M} + \varepsilon \vec{X} = \begin{pmatrix} a + \varepsilon f \\ b + \varepsilon g \end{pmatrix}$, et de plus sur \mathbb{H}^2 , $\mathcal{G} = \begin{pmatrix} 1/a^2 & 0 \\ 0 & 1/a^2 \end{pmatrix}$. Ainsi :

$$\mathcal{G}(\vec{M} + \varepsilon \vec{X}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{(a + \varepsilon f)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(a + \varepsilon f)^2} \end{pmatrix}$$

Alors, en mettant a^2 en facteur au dénominateur et en effectuant un développement limité de la forme $\frac{1}{1+x} = 1 - x + o(x)$, on obtient que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{G}(\vec{M} + \varepsilon \vec{X}) - \mathcal{G}(\vec{M})}{\varepsilon} = 0 \Leftrightarrow f = 0 \quad \forall g(a, b)$$

Alors tout champ de vecteurs construit à partir de $\frac{\partial}{\partial b}$ uniquement est un champ de vecteurs de Killing et donc en particulier $\frac{\partial}{\partial b}$ est un champ de vecteurs de Killing.

D'après la proposition 3, le long des géodésiques la projection du vecteur vitesse sur ce champ est constante. L'écriture de cette projection constante sert à déterminer l'expression de la quantité conservée associée :

$$\left\langle \dot{\vec{M}}, \frac{\partial}{\partial b} \right\rangle_{\mathbb{H}^2} = \boxed{\frac{\dot{b}}{a^2} = cste} \quad (3.58)$$

A quoi correspond cette conservation sur l'immersion dans \mathbb{R}^3 ?

Cette quantité est, comme on l'a vu précédemment, la projection d'un vecteur vitesse sur un champ de vecteurs "vertical" dans le demi-plan (a, b) i.e. de première composante constante sur chaque ligne de champ de vecteurs. Or, d'après la forme de \mathcal{F} permettant l'immersion (isométrique) de \mathbb{H}^2 dans \mathbb{R}^3 (c.f. 3.20), à première composante constante, la seconde composante fait office d'angle permettant la rotation autour de l'axe \mathcal{O}_z . Le champ de vecteurs de Killing est donc lié à la **symétrie de révolution autour de \mathcal{O}_z** de la pseudo-sphère (immersion de \mathbb{H}^2 dans \mathbb{R}^3).

Conservation de la quantité de mouvement

La section précédente a permis de montrer que les équations du mouvement dans l'algèbre duale i.e. la variation de la quantité de mouvement Π au cours du temps, étaient régies sur l'algèbre duale vue par la gauche par l'équation d'Euler-Poincaré (3.52) :

$$\frac{d\vec{\Pi}_C}{dt} = ad_{\vec{\Omega}_C}^* \vec{\Pi}_C \quad (3.59)$$

Voyons alors ce que cela induit sur le comportement de cette quantité de mouvement lorsqu'on se place sur l'algèbre duale cette fois vue par la droite i.e. déterminons ce que vaut $\frac{d\vec{\Pi}_S}{dt}$. D'après (3.38) on a :

$$\frac{d\vec{\Pi}_S}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{\Omega}_{C_1} + \frac{\dot{b}a - \dot{a}b}{a^2} \Omega_{C_2} + \frac{b}{a} \dot{\Omega}_{C_2} \\ \frac{\dot{\Omega}_{C_2} a - \dot{a} \Omega_{C_2}}{a^2} \end{pmatrix}$$

Et d'après (3.55) on sait que le long des géodésiques on a $\dot{\Omega}_{C_1} = -\Omega_{C_2}^2$ et $\dot{\Omega}_{C_2} = \Omega_{C_1} \Omega_{C_1}$. De plus (3.11) permet d'écrire que $\frac{\dot{a}}{a} = \Omega_{C_1}$ et $\frac{\dot{b}}{a} = \Omega_{C_2}$. En incorporant tout cela dans l'équation précédente on obtient :

$$\boxed{\frac{d\vec{\Pi}_S}{dt} = 0} \Leftrightarrow \vec{\Pi}_S = cste$$

Autrement dit, Π_S est une quantité conservée le long des géodésiques : c'est une constante du mouvement, ce qui termine d'illustrer le théorème 7 pour le groupe de Lie G .

Ainsi, $\vec{\Pi}_S = \begin{pmatrix} \frac{\dot{a}}{a} + \frac{b\dot{b}}{a^2} \\ \dot{b} \\ \frac{b}{a^2} \end{pmatrix} = cste$. On remarquera que la seconde composante de ce vecteur constant est la

quantité conservée trouvée par la projection du vecteur vitesse sur le champ de vecteurs de Killing (cf. (3.58)), qui on le rappelle est liée à la symétrie de révolution autour de l'axe O_z de l'immersion de \mathbb{H}^2 dans \mathbb{R}^3 . Or le théorème de Clairaut énonce que :

Théorème 8 : Théorème de Clairaut

Les géodésiques d'une surface de révolution sont des courbes telles que le produit de la distance à l'axe d'un point M de la courbe avec le cosinus de l'angle entre la courbe et la parallèle passant par M est constant ; la réciproque est malheureusement fautive.

Ce que Clairaut appelle "le produit de la distance à l'axe d'un point M de la courbe avec le cosinus de l'angle entre la courbe et la parallèle passant par M " peut être reformulé en terme de projection de la vitesse sur un champ de vecteurs. Autrement dit, les géodésiques sont des courbes pour lesquelles il existe au moins un champ de vecteurs tel que la projection de la vitesse sur ce champ (i.e. norme de la vitesse fois le cosinus de l'angle que fait celle-ci avec le champ) soit constante.

Au regard de la proposition 3 on sait que parmi ces champs sur lesquels les vecteurs vitesse des géodésiques se projettent de façon constante on trouve les champs de Killing. Et effectivement la seconde coordonnée de la constante du mouvement le long des géodésiques $\vec{\Pi}_S$ est bien le résultat de la projection de la vitesse sur l'unique champ de Killing $\frac{\partial}{\partial b}$. Mais qu'en est-il de la première composante constante de $\vec{\Pi}_S$? Avec le théorème de Clairaut on est en droit de se demander s'il n'existe pas un autre champ de vecteurs différent de celui que l'on a déjà étudié (qui ne serait donc pas un champ de Killing) qui, lorsque l'on projette dessus le vecteur vitesse le long d'une géodésique, donne une projection constante et égale à la première composante de $\vec{\Pi}_S$?

On cherche alors s'il existe un champ $\vec{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = Y_1 \frac{\partial}{\partial a} + Y_2 \frac{\partial}{\partial b}$ tel que la projection de la vitesse au point M sur ce champ soit constante et égale à Π_{S_1} soit :

$$\begin{aligned} \langle \vec{M}, \vec{Y} \rangle \Big|_{\mathbb{H}^2} &= \Pi_{S_1} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} Y_1 &= a \\ Y_2 &= b \end{cases} \end{aligned}$$

Alors un tel champ existe bien et il vaut $\vec{Y} = a \frac{\partial}{\partial a} + b \frac{\partial}{\partial b}$ et Π_{S_1} correspond à la projection constante de la vitesse le long d'une géodésique sur ce champ de vecteurs. Or s'il y a une quantité conservée il y a forcément une symétrie mais nous n'avons pas réussi à mettre en lumière de façon certaine à quelle type de symétrie sur l'immersion de \mathbb{H}^2 dans \mathbb{R}^3 cette conservation correspond.

Remarque 27. On a montré que $\frac{\partial}{\partial b}$ est un champ de vecteurs de Killing mais que ce n'était pas le cas pour $\frac{\partial}{\partial a}$. Or, et c'est une des propriétés des champs de Killing, seule une combinaison de vecteurs de Killing peut donner un champ de Killing. Une combinaison de ces deux champs n'est donc pas un champ de Killing et donc en particulier \vec{Y} n'est pas un champ de vecteurs de Killing.

3.5.3 Détermination des géodésiques à partir de l'équation d'Euler-Poincaré

Maintenant qu'on a déterminé les quantités conservées le long des géodésiques, à savoir les deux composantes de $\vec{\Pi}_S$, elles vont pouvoir servir à faciliter la résolution du système différentiel obtenu à partir de

l'équation d'Euler-Poincaré soit :

$$\begin{cases} \dot{\Omega}_{C_1} = -\Omega_{C_2}^2 \\ \dot{\Omega}_{C_2} = \Omega_{C_1}\Omega_{C_2} \end{cases} \quad (3.60)$$

Pour que le problème soit bien posé, on rajoute une condition initiale, i.e., on cherche les solutions de ce système de conditions initiales $\vec{\Omega}_C(\mathbf{0})$ passant par $M(\mathbf{0}) = (a_0, b_0)^T$ à $t = \mathbf{0}$, telles que $\vec{\Omega}_C(\mathbf{0}) = (\Omega_{10} \ \Omega_{20})^T$.

Or, grâce à la carte des algèbres on est en mesure d'explicitier $\vec{\Pi}_S$ en fonction de $\vec{\Omega}_C$, et puisque $\vec{\Pi}_S$ est constant le long des géodésiques, il est en particulier égale à sa valeur initiale d'où :

$$\vec{\Pi}_S = \begin{pmatrix} \Omega_{C_1}(t) + \frac{b}{a}\Omega_{C_2}(t) \\ \frac{\Omega_{C_2}(t)}{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega_{10} + \frac{b_0}{a_0}\Omega_{20} \\ \frac{\Omega_{20}}{a_0} \end{pmatrix} \quad (3.61)$$

Et les deux constantes du mouvement peuvent donc être écrites comme :

$$K_1 = \Omega_{10} + \frac{b_0}{a_0}\Omega_{20} = \Omega_{C_1}(t) + \frac{b}{a}\Omega_{C_2}(t) \quad (3.62)$$

$$K_2 = \frac{\Omega_{20}}{a_0} = \frac{\Omega_{C_2}(t)}{a} \quad (3.63)$$

D'autre part la propriété de conservation de l'énergie totale permet d'écrire que $\Omega_{C_1}^2(t) + \Omega_{C_2}^2 = 2E_0$ et on prendra pour simplifier $2E_0 = 1$. Alors les solutions $\vec{\Omega}_C(t)$ du système différentiel vivent sur le cercle unité du plan $(\Omega_{C_1}, \Omega_{C_2})$.

On peut alors paramétrer $\vec{\Omega}_C(t)$ à l'aide d'un angle $\Phi(t)$ tel que à $t = \mathbf{0}$ on ait $\Phi(\mathbf{0}) = \Phi_0$ et alors on a :

$$\begin{cases} \Omega_{C_1}(\phi) = \cos(\phi + \phi_0) \\ \Omega_{C_2}(\phi) = \sin(\phi + \phi_0) \end{cases} \quad (3.64)$$

et donc $\Omega_{10} = \cos \phi_0$ et $\Omega_{20} = \sin \phi_0$, d'où

$$\tan \phi_0 = \frac{\Omega_{20}}{\Omega_{10}} \quad (3.65)$$

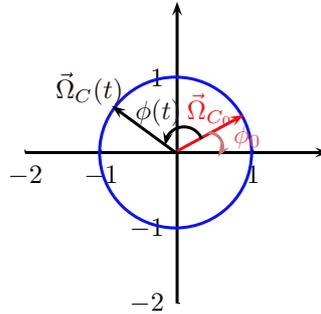


FIGURE 3.16 – Paramétrisation de l'orbite décrite par $\vec{\Omega}_C$ au cours du temps sur une géodésique.

Remarque 28. Trouver des géodésiques c'est se donner (θ_0, ϕ_0) et une direction. Cette direction c'est un vecteur de l'espace tangent qui la donne. Or, rappelons que les $\vec{\Omega}_C$ sont les vecteurs de l'espace tangent en l'identité du groupe, que l'on peut transporter n'importe où sur le fibré tangent grâce aux opérateurs présentés sur la carte des algèbres. De part la propriété d'invariance à gauche des éléments de l'algèbre "à gauche", les vecteurs ainsi transportés seront parallèles aux $\vec{\Omega}_C$ de départ. Et on peut alors considérer la condition initiale non pas sur l'espace tangent en M mais sur l'algèbre "à gauche". Et alors se donner un angle $\phi(t)$ c'est à chaque instant se donner un vecteur $\vec{\Omega}_C$ et donc une direction et une vitesse de parcours sur le groupe. Et en particulier, se donner ϕ_0 revient à se donner un vecteur $\vec{\Omega}_{C_0}$ autrement dit une direction et une vitesse initiale qui détermineront la géodésique empruntée.

De plus, avec les équations (3.62) et (3.63) on peut écrire :

$$a(t) = \frac{\Omega_{C_2}}{K_2} = \frac{\sin(\phi + \phi_0)}{K_2} \quad (3.66)$$

$$b(t) = \frac{K_1 - \Omega_{C_1}}{K_2} = \frac{K_1}{K_2} - \frac{\cos(\phi + \phi_0)}{K_2} \quad (3.67)$$

Remarque 29. Alors $M = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$ décrit un cercle de centre $(0, \frac{K_1}{K_2})$ et de rayon $\frac{1}{K_2}$.

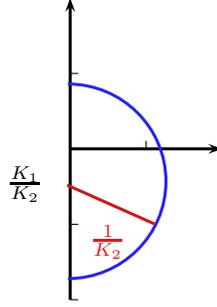


FIGURE 3.17 – Géodésique.

De plus pour K_1 infini on a une droite. On a donc bien retrouvé les lignes géodésiques de \mathbb{H}^2 .

Et en souvenant que $\frac{\dot{b}}{a} = \Omega_{C_2}$ et $\frac{\dot{a}}{a} = \Omega_{C_1}$ on obtient que :

$$\frac{\dot{a}}{a} = \dot{\phi} \frac{\cos(\phi + \phi_0)}{\sin(\phi + \phi_0)} = \Omega_{C_1} \quad (3.68)$$

$$\frac{\dot{b}}{a} = \dot{\phi} = \Omega_{C_2} = \sin(\phi + \phi_0) \quad (3.69)$$

D'où $\dot{\phi}_0 = \Omega_{20}$. Ceci sera, avec (3.65), la condition initiale de l'équation qu'il faut maintenant intégrer, à savoir :

$$\dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt} = \Omega_{C_2} = \sin(\phi + \phi_0) \quad (3.70)$$

Pour réaliser cette intégration on usera d'un changement de variable en posant $\psi = \phi + \phi_0$, qui est tel que $d\psi = d\phi$ et alors en procédant par séparation de variable sur les intégrales on se retrouvera à devoir résoudre l'équation intégrale suivante :

$$\int_{\phi_0}^{\phi + \phi_0} \frac{d\psi}{\sin \psi} = \int_0^t dt \quad (3.71)$$

dont une des solutions est :

$$\boxed{\psi(t) = \phi(t) + \phi_0 = 2 \arctan \left(\tan \left(\frac{\phi_0}{2} \right) e^t \right)} \quad (3.72)$$

Alors avec cette équation et en considérant l'écriture de $\vec{\Omega}_C$ en fonction de $\phi(t)$ donnée par les équations (3.64) les géodésiques de la variété isomorphe au groupe G ont été déterminées explicitement en fonction du temps sans avoir eu recours à un système de coordonnées.

Ceci illustre l'avantage (par rapport aux difficultés rencontrées en utilisant la théorie variationnelle purement analytique d'Euler et Lagrange), de l'utilisation de la théorie des groupes et des équations et théorèmes de Poincaré pour déterminer des géodésiques sur des variétés Riemanniennes présentant des symétries.

3.6 Exemple d'application : transformation de signaux basée sur la théorie de l'information

Dans cette section, les résultats précédemment obtenus vont être appliqués à des signaux dont on représentera les spectres comme des distributions probabilistes.

En se basant sur la théorie de la géométrie de l'information, on se place sur une variété constituée de densités de probabilité d'une même famille munie de la métrique de Fischer définie sur le système de coordonnées par :

$$J_{\theta}(u, v) = \sum_{i,j} u_i v_j E \left[-\frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \log p(x_i, \theta) \right] \quad (3.73)$$

où $E[f]$ est l'espérance de f définie par $E[f] = \int p(x, \theta) f dx$.

En particulier, on étudiera l'exemple de la variété associée à l'ensemble des densités gaussiennes paramétrées par (μ, σ) , noté $\{\mathcal{N}(\mu, \sigma \mathbb{I}d), \mu \in \mathbb{R}^{n-1}, \sigma \in \mathbb{R}^+\}$. Et on rappelle que la densité de probabilités d'une gaussienne s'écrit :

$$p(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (3.74)$$

On ne donnera pas le détail du calcul ici mais il se trouve que si l'on écrit la métrique de Fischer pour cette variété on trouve :

$$ds^2 = (d\sigma \quad d\mu) \begin{pmatrix} 2/\sigma^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1/\sigma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\sigma \\ d\mu \end{pmatrix} \quad (3.75)$$

Et en effectuant le changement de variable $\Sigma = \sqrt{2}d\sigma$ on obtient $ds^2 = 2 \left(\frac{d\Sigma^2 + d\mu^2}{\Sigma^2} \right)$ ce qui est le double de la métrique de Poincaré.

Or, même si l'opération qui double la métrique de Poincaré n'est pas une isométrie, le lagrangien à minimiser sera simplement multiplié par deux donc les géodésiques pour la variété des densités gaussiennes auront la même forme que celles du demi-plan de Poincaré.

On pourra alors se servir des résultats obtenus au cours de ce chapitre pour modéliser la transformation géodésique d'une gaussienne en une autre gaussienne. Ce résultat fut présenté lors de la soutenance sous forme d'une animation Matlab.

4 Conclusion

Comme exposé en introduction, étudier le résonateur d'un instrument amène, dès que l'on ne travaille plus sur de petites oscillations autour des positions d'équilibre, à devoir résoudre des systèmes fortement non-linéaires et compliqués. L'idée émise était alors de considérer ces résonateurs comme des éléments d'une variété, représentés par leurs caractéristiques (fréquences de résonance, amplitude, ...). Or, un résonateur, comme tout système physique, tend à minimiser son action. Cette minimisation, sur une variété Riemannienne revient à déterminer les géodésiques de celle-ci. Le moyen classique de déterminer de telles géodésiques est d'employer la théorie variationnelle. Un autre est l'utilisation de la géométrie différentielle et de la théorie des groupes.

Dans la première partie de cet exposé il a été tenté de mettre en lumière les difficultés rencontrées lors de la détermination des géodésiques d'une variété à l'aide des équations différentielles d'Euler-Lagrange. Ces difficultés étant extrêmement liées au système de coordonnées utilisé, comme illustré avec l'exemple de la sphère, on s'est ensuite interrogés quant à la possibilité de trouver une autre façon de représenter ces variétés pour tirer partie de leur propriétés géométriques et simplifier les équations.

C'est alors que l'on s'est appuyés sur la constatation que les variétés présentant des symétries étaient invariantes sous l'action d'un groupe : la sphère est invariante sous l'action du groupe des rotations et la pseudo-sphère l'est sous l'action du groupe des transformations affines. Le but de ce stage était donc d'arriver à y voir plus clair dans la géométrie différentielle et en particulier dans la théorie des groupes de Lie et ses applications pour la détermination des géodésiques d'une variété. Pour cela, toute la deuxième partie a été illustrée à l'aide de l'exemple de la pseudo-sphère. Alors, après avoir présenté ce qu'étaient les groupes et algèbres de Lie, ils ont été utilisés à travers le théorème d'Euler-Poincaré. Il est apparu que ce théorème permettait d'exprimer à la fois les équations différentielles à résoudre dans l'algèbre de Lie du groupe (ce qui permettait de les simplifier), et en même temps, les quantités conservées le long des géodésiques ce qui permet de résoudre le système différentiel sans avoir besoin d'un système de coordonnées (ce qui élimine les non-linéarités artificielles de paramétrage). La fin de cet exposé fut alors consacrée à la détermination des géodésiques de la pseudo-sphère et au traitement d'un autre exemple : celui de la transformation de densités gaussiennes, basé sur la théorie de la géométrisation de l'information.

Bien sûr rien de nouveau n'a été inventé au cours de ce stage, toutes ces théories ont déjà été établies, mais dans un formalisme souvent difficilement abordable. Nous espérons donc que ce rapport aura permis au lecteur d'y voir plus claire.

5 Annexes

5.1 Principe de moindre action pour une variété Riemannienne : équation géodésique

Le but de cet appendice est de développer les calculs qui ont permis d'obtenir le système différentiel vérifié par les géodésiques d'une variété Riemannienne (2.10).

5.1.1 Minimisation de la fonctionnelle énergie

Le principe de moindre Action pour une variété Riemannienne est la recherche de l'optimum de la fonctionnelle

$$J(\vec{\gamma}) = \int_{\vec{\gamma}} ds = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{\vec{\gamma}}^T \mathbf{g} \dot{\vec{\gamma}}} dt \quad (5.1)$$

La courbe optimum est celle qui vérifie (2.8). Notons $\vec{\gamma}_\varepsilon(t)$ la courbe ayant subi une variation de ε dans la direction $\delta\vec{\gamma}(t)$, soit : $\vec{\gamma}_\varepsilon(t) = \vec{\gamma}(t) + \varepsilon\delta\vec{\gamma}(t)$. Et d'après (2.9) on a :

$$\delta J(\gamma) = \langle \nabla J, \delta\vec{\gamma} \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{J(\vec{\gamma}_\varepsilon) - J(\vec{\gamma})}{\varepsilon} \quad (5.2)$$

Il s'agit tout d'abord de chercher à déterminer $J(\vec{\gamma}_\varepsilon) = J(\vec{\gamma} + \varepsilon\delta\vec{\gamma})$, qui, puisque la métrique \mathbf{g} dépend des $\mathbf{x}_i(t)$ et donc de $\vec{\gamma}(t)$ s'écrira :

$$J(\vec{\gamma}_\varepsilon) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(\dot{\gamma} + \varepsilon\delta\dot{\gamma})^T \mathbf{g}_\varepsilon (\dot{\gamma} + \varepsilon\delta\dot{\gamma})} dt$$

où \mathbf{g}_ε est la métrique induite par la perturbation de $\vec{\gamma}(t)$ d'un certain ε dans la direction $\delta\vec{\gamma}(t)$, notée $\vec{\gamma}_\varepsilon(t)$. Et alors $\mathbf{g}_\varepsilon = \mathbf{g} + \varepsilon\delta\mathbf{g} + \mathbf{o}(\varepsilon)$ où $\delta\mathbf{g}$ est défini à l'aide de la dérivation directionnelle par $\delta\mathbf{g} = \langle \nabla\mathbf{g}, \delta\vec{\gamma} \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathbf{g}_\varepsilon - \mathbf{g}}{\varepsilon}$.

Alors, en remplaçant dans (5.2), en se souvenant que $\dot{\mathbf{s}}^2 = \dot{\gamma}^T \mathbf{g} \dot{\gamma}$ et en factorisant par $\dot{\mathbf{s}}^2$ sous la racine on obtient que :

$$J(\vec{\gamma}_\varepsilon) = \int_{t_1}^{t_2} \dot{\mathbf{s}} \sqrt{1 + \frac{\varepsilon}{\dot{\mathbf{s}}^2} (\dot{\gamma}^T \mathbf{g} \delta\dot{\gamma} + \dot{\gamma}^T \delta\mathbf{g} \dot{\gamma} + \delta\dot{\gamma}^T \mathbf{g} \dot{\gamma}) + \mathbf{o}(\varepsilon)} dt$$

A présent, on effectue un développement limité de la forme $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \mathbf{o}(x)$ et on obtient :

$$J(\vec{\gamma}_\varepsilon) = J(\vec{\gamma}) + \frac{\varepsilon}{2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\dot{\mathbf{s}}^2} (\dot{\gamma}^T \mathbf{g} \delta\dot{\gamma} + \delta\dot{\gamma}^T \mathbf{g} \dot{\gamma} + \dot{\gamma}^T \delta\mathbf{g} \dot{\gamma} + \mathbf{o}(\varepsilon)) dt$$

De plus, puisque la métrique \mathbf{g} est symétrique on a $\dot{\gamma}^T \mathbf{g} \dot{\delta\gamma} + \delta\dot{\gamma}^T \mathbf{g} \dot{\gamma} = 2\dot{\gamma}^T \mathbf{g} \dot{\delta\gamma}$, d'où, en remplaçant dans (5.2) :

$$\delta J(\vec{\gamma}(t)) = \langle \nabla J, \delta\vec{\gamma} \rangle = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2\dot{s}} \left(2\dot{\gamma}^T \mathbf{g} \dot{\delta\gamma} + \dot{\gamma}^T \delta \mathbf{g} \dot{\gamma} \right) dt \quad (5.3)$$

On veut évaluer ceci pour une norme de la vitesse de parcours \dot{s} constante. Or on peut toujours re-paramétriser le temps de façon à avoir $\dot{s} = cste$ et en particulier on prendra ici $\dot{s} = 1$. Alors (5.3) devient :

$$\delta J(\vec{\gamma}(t)) = \int_{t_1}^{t_2} \dot{\gamma}^T \mathbf{g} \dot{\delta\gamma} dt + \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \dot{\gamma}^T \delta \mathbf{g} \dot{\gamma} dt \quad (5.4)$$

En opérant une intégration par parties sur la première intégrale :

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{\gamma}^T \mathbf{g} \dot{\delta\gamma} dt = [\dot{\gamma}^T \mathbf{g} \delta\gamma]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} (\dot{\gamma}^T \mathbf{g}) \delta\gamma dt$$

Le premier terme de cette égalité est nul si on choisit les bonnes conditions initiales. Dans la suite on se place dans ce cadre et en remplaçant dans (5.4) on obtient :

$$\delta J(\vec{\gamma}(t)) = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} \dot{\gamma}^T \delta \mathbf{g} \dot{\gamma} - \frac{d}{dt} (\dot{\gamma}^T \mathbf{g}) \delta\gamma \right) dt \quad (5.5)$$

5.1.2 Prise en compte du système de coordonnées

En exprimant (5.5) dans le système de coordonnées tel que $\vec{\gamma}(t) = (x_1(t) \dots x_i(t) \dots x_n(t))^T$ il va être possible de transcrire ce que signifie la condition $\delta J = 0$.

Pour ce faire il sera procédé par étapes et pour simplifier les écriture la notation de sommation d'Einstein sera employée. Tout d'abord, $\vec{\gamma}(t)$ étant une courbe vectorielle à n composantes, une fois écrite dans le système de coordonnées, on a :

$$\delta\vec{\gamma}_k = \delta x_k \quad (5.6)$$

Ensuite, d'après la définition de la dérivée directionnelle $\delta \mathbf{g} = \langle \nabla \mathbf{g}, \delta\vec{\gamma} \rangle$, ce qui d'après (5.6) peut s'écrire $\delta \mathbf{g} = \langle \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x_k}, \delta x_k \rangle$, d'où, puisque \mathbf{g} est symétrique, on a :

$$\delta \mathbf{g} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x_k} \delta x_k \quad (5.7)$$

Alors, en remplaçant dans (5.5) et sachant que l'on veut $\delta J(\vec{\gamma}(t)) = 0$, on obtient :

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} \dot{\gamma}^T \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x_k} \dot{\gamma} \delta x_k - (\ddot{\gamma}^T \mathbf{g} + \dot{\gamma}^T \dot{\mathbf{g}})_k \delta x_k \right) dt = 0 \quad (5.8)$$

Ce qui en notant g_{ij} les éléments de la métrique \mathbf{g} peut se réécrire :

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} \dot{x}_i \dot{x}_j \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \delta x_k - (\ddot{x}_m g_{mk} + \dot{x}_i (\dot{g})_{ik}) \right) \delta x_k dt = 0$$

Or $(\dot{g})_{ik} = \left(\frac{\partial g}{\partial x_j} \dot{x}_j \right)_{ik} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} \dot{x}_j$. De plus, de part la symétrie de \mathbf{g} , on a $\ddot{x}_m g_{mk} = \ddot{x}_k g_{km}$. Autrement dit, en notant $\frac{\partial g_{pq}}{\partial x_r} = g_{pq,r}$, la courbe $\vec{\gamma}(t)$ recherchée est celle qui vérifie :

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} \dot{x}_i \dot{x}_j g_{ij,k} - \ddot{x}_k g_{km} - \dot{x}_i g_{ik,j} \dot{x}_j \right) \delta x_k dt = 0 \quad \forall \delta x_k$$

Et ainsi le système différentiel vérifié par les géodésiques est donné par :

$$\frac{1}{2} \dot{x}_i \dot{x}_j g_{ij,k} - \ddot{x}_k g_{km} - \dot{x}_i g_{ik,j} \dot{x}_j = 0 \quad k = 1 \dots n \quad (5.9)$$

5.1.3 Réécriture à l'aide des Symboles de Christoffel

Le système (5.9) peut être ré-écrit, pour le rendre plus lisible, à l'aide des Symboles de Christoffel définis par :

Définition 18 : Symboles de Christoffel

Soient g^{ij} les éléments de la matrice inverse g^{-1} de la métrique g d'une variété. Ces éléments ont alors les mêmes propriétés de symétrie que g et de plus on a $g^{ij} g_{jk} = \delta_i^k$ où δ est le symbole de Kronecker. On définit alors les symboles de Christoffel comme étant :

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{km} (g_{im,j} + g_{jm,i} - g_{ij,m}) \quad (5.10)$$

Or, la métrique étant symétrique on a $g_{ik,j} = \frac{g_{ik,j} + g_{ki,i}}{2}$ et alors le dernière élément de (5.9) peut se réécrire avec un changement d'indice comme $\dot{x}_i g_{ik,j} \dot{x}_j = \frac{1}{2} (\dot{x}_j \dot{x}_i g_{kj,i} + \dot{x}_i \dot{x}_j g_{ki,j})$. En remplaçant dans (5.9), et en multipliant tout par -1 cela donne :

$$\ddot{x}_k g_{km} + \frac{1}{2} \dot{x}_i \dot{x}_j (g_{ki,j} + g_{kj,i} - g_{ij,k}) = 0 \quad k = 1 \dots n$$

Il ne reste plus alors qu'à multiplier l'équation précédente par g^{mk} et à échanger dans la deuxième partie de l'équation les indices m et k (ce qui ne change rien g^{-1} étant symétrique), et on pourra alors écrire :

$$\ddot{x}_k + \dot{x}_i \dot{x}_j \Gamma_{ij}^k = 0 \quad k = 1 \dots n \quad (5.11)$$

Ceci est l'écriture, à l'aide des symboles de Christoffel, du système différentiel vérifié par les géodésiques d'une variété Riemannienne. Si on peut le résoudre alors on obtient analytiquement les équations des courbes géodésiques de la variété.

5.2 Changement de variables pour intégrer le système différentiel dans l'exemple de la sphère

Il s'agit ici d'expliquer comment a été trouvé le changement de variable présenté en (2.19) pour obtenir (2.20). On procèdera par changements de variable successifs.

Tout d'abord posons $u = \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$, i.e. $\theta = \text{arccot } u$ et alors on a $d\theta = d(\text{arccot } u) = -\frac{1}{1+u^2} du$. Ainsi :

$$I = - \int \frac{C}{\sin(\text{arccot}(u)) \sqrt{[\sin(\text{arccot}(u))]^2 - C^2}} \times \frac{1}{1+u^2} du$$

Et en faisant appel à des souvenirs de formules trigonométriques, on peut se rappeler que $\sin(\text{arccot}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Alors en remplaçant dans l'équation précédente et en mettant tout sous la racine au dénominateur on obtient :

$$I = - \int \frac{C}{\sqrt{1-C^2-C^2u^2}} du$$

En posant maintenant $q^2 = 1 - C^2 > 0$ puisque $|C| < 1$, cela donne (en mettant q en facteur au dénominateur) :

$$I = - \int \frac{C}{q \sqrt{1 - \frac{C^2 u^2}{q^2}}} du$$

Puis par un deuxième changement de variable : $X = \frac{Cu}{q}$ i.e. $u = \frac{qX}{C}$, qui est tel que $du = \frac{q}{C} dX$ on a alors :

$$\begin{aligned} I &= \int - \frac{\mathcal{E}}{q \sqrt{1 - X^2}} \times \frac{q}{\mathcal{E}} dX \\ &= \arccos(X) + \underbrace{E}_{cste} \end{aligned}$$

Le changement de variable global effectué a donc été :

$$\boxed{X = \frac{C}{\sqrt{1 - C^2}} \cot \theta} \quad (5.12)$$

Bibliographie

- [1] A. V. Bolsinov, *Integrable geodesic flows on riemannian manifolds*, 2004.
- [2] Jean-Pierre Bourguignon, *Transport parallèle et connexions en géométrie et en physique*.
- [3] Robert Coquereau, *Espaces libres et connexions - une introduction aux géométries classiques et quantiques de la physique théorique*, 2002.
- [4] Yves de Cornulier, *Groupes et algèbres de lie*, www.normalesup.org/~cornulier/liee.pdf.
- [5] Darryl D. Holm, *Geometric mechanics, part ii : Rotating, translating and rolling*, 2008.
- [6] Bahram Houchmandzadeh, *Variétés différentielles et champs de tenseurs.*, 2005.
- [7] Robert T. Jantzen, *Geodesics on the torus and other surfaces of revolution clarified using undergraduate physics tricks with bonus : Nonrelativistic and relativistic kepler problems*, 2010.
- [8] S.G. Kajejev, *Geometry of the motion of ideal fluids and rigid bodies*, 2009.
- [9] Vladimir I. Arnold Boris A. Khesin, *Topological methods in hydrodynamics*, 1998.
- [10] Vincent Magnenet, *Synthèse sur les groupes de lie*, 2005.
- [11] Thierry Masson, *Géométrie différentielle, groupes et algèbres de lie, fibrés et connexions*, 2010.
- [12] Jerrold E. Marsden Tudor S. Ratiu, *Introduction to mechanics and symetry- a basic exposive of classical mechanical systems*, 1998.
- [13] David Roze, *Simulation de la propagation donde non linéaire par les séries de volterra*, Thèse de doctorat, Université de Paris VI, Paris, 2010.
- [14] Benedict Wirth Leah Bar Martin Rumpf Guillermo Sapiro, *Goedesics in shape space via variational time discretization*, 2009.
- [15] Prof. Léonard Todjihounde, *Géométrie hyperbolique*.
- [16] Andrejs Treibergs, *The hyperbolic plane and its immersions into \mathbb{R}^3* , 2003.
- [17] Emmanuel Volte, *Exposé : Rotations planes. notion d'angle*.
- [18] Wikipedia, *Algèbre de lie*, http://fr.wikipedia.org/wiki/Alg%C3%A8bre_de_Lie.
- [19] ———, *Connexion affine*, www.fr.wikipedia.org/wiki/Connexion_affine.
- [20] ———, *Projection stéréographique*, http://fr.wikipedia.org/wiki/Projection_st%C3%A9r%C3%A9ographique.
- [21] ———, *Variétés riemanniennes*, http://fr.wikipedia.org/wiki/Vari%C3%A9t%C3%A9_riemannienne.