

TRANSPORT NON LINÉAIRE DISSIPATIF D'ONDES PLANES
pour la synthèse sonore d'instruments de type cuivre :
RÉSOLUTION en système entrée-sortie
PAR LES SÉRIES DE VOLTERRA

GDR ONDES - INSTITUT HENRI POINCARÉ
11, RUE PIERRE ET MARIE CURIE, PARIS

PRÉSENTÉ PAR

THOMAS HÉLIE

UMR 9912 - ÉQUIPE ANALYSE-SYNTÈSE
IRCAM, CENTRE GEORGES POMPIDOU, PARIS

MARDI 17 MAI 2005

Travail réalisé en collaboration avec Martin Hasler



A1- L'IRCAM : Institut de Recherche et Coordination Acoustique/Musique [UMR CNRS 9912]



<http://www.ircam.fr>



Création : en *1971* par *Pierre Boulez*

Vocation : interaction entre

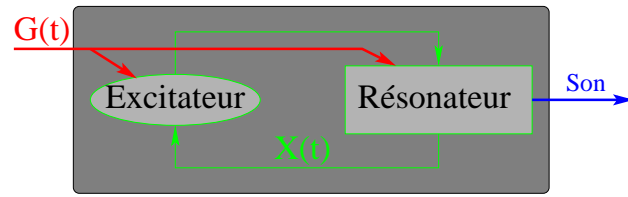
- *recherche* scientifique (son & musique)
- *développement* technologique
- *création musicale* contemporaine

Équipe Analyse-Synthèse :

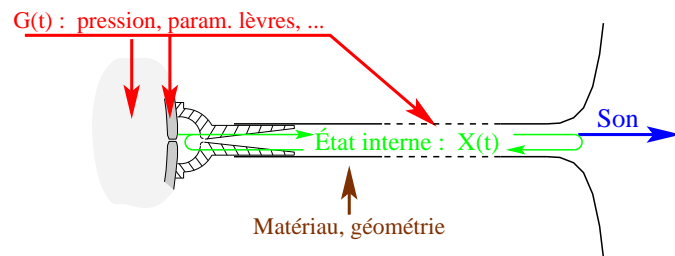
- *modèles de synthèse*
- procédés d'*analyse* des sons
- outils de *transformation* des sons

A2- Modèles physiques : Objectifs - Intérêts

Modèles en syst. E/S :



Cas du cuivre :



Exemple sonore : modèle simplifié contrôlé en temps-réel



Objectifs :

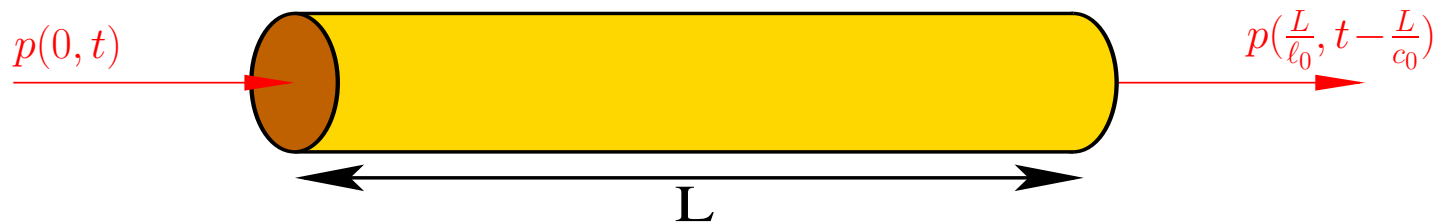
- 1- *Modélisation* réaliste pour la *simulation* en temps réel
- 2- *Prédiction* et *optimisation* du fonctionnement des instruments (*matériau, forme*)
- 3- *Inversion entrée/sortie* : trouver $G(t)$ fournissant un *son* cible

Intérêts :

- 1- Instruments *virtuels* et *naturels* (attaques, transitoires, «canards», etc...)
- 2- *Aide à la lutherie*
- 3- *Capture* des bons gestes de *contrôle* et de *l'interprétation musicale*

B- EDP non linéaire : équation de transport NL amorti

Propagation acoustique d'une onde plane progressive $p(\ell, \tau)$:



Modèle : **EDP NL** avec contrôle frontière $p(0, \tau)$ [Menguy, Gilbert 2000]

$$\partial_\ell p(\ell, \tau) = \underbrace{p(\ell, \tau) \partial_\tau p(\ell, \tau)}_{\text{Non-linéarité}} - \underbrace{\alpha_0 \partial_\tau^{\frac{1}{2}} p(\ell, \tau)}_{\text{pertes visco-thermiques}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \tau = t - z/c_0 \\ \ell \propto z \end{cases}$$

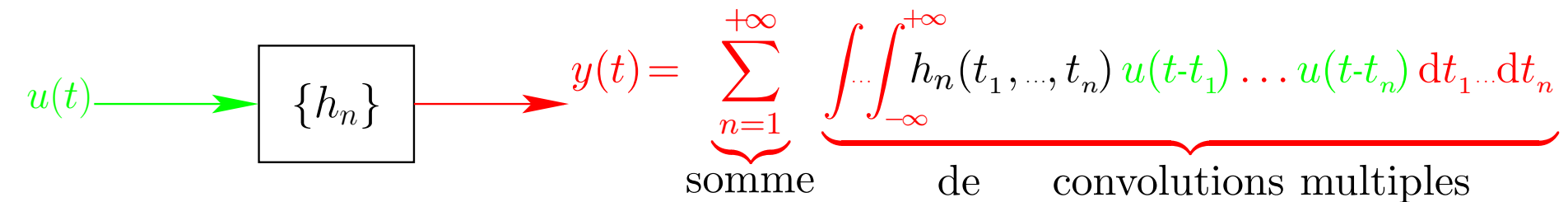
Validité : $|p| < 160$ dB SPL **VS** 110 dB pour ppgt° lin.

But : Représenter le tube par un **sys. dyn. entrée/sortie (S)**

Application : **brillance du son** des cuivres aux nuances **fortissimo**

C1- SÉRIES DE VOLTERRA : Définitions

Série de Volterra de noyaux $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$: système (S)



Convergence : $|u(t)| < \rho$ rayon de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \|h_n\|_1 x^n$

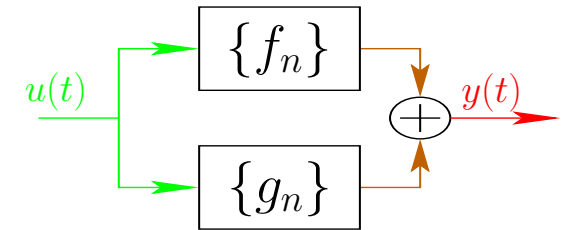
Causalité de (S) : $h_n(t_1, \dots, t_n)$ est nul pour $t_k < 0$

Transf. de Laplace de h_n : $H_n(s_1, \dots, s_n)$ ($\Re(s_k) > 0$, causal stable)

C2- SÉRIES DE VOLTERRA : interconnexion de systèmes

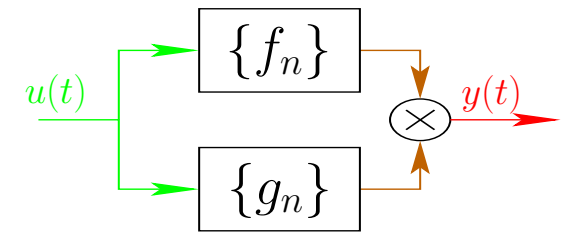
SOMME de 2 systèmes : $\rho_h = \min(\rho_f, \rho_g)$

$$H_n(s_1, \dots, s_n) = F_n(s_1, \dots, s_n) + G_n(s_1, \dots, s_n)$$



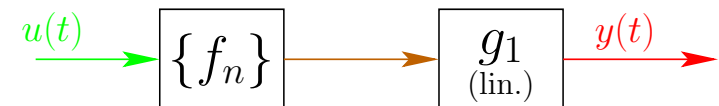
PRODUIT de 2 systèmes : $\rho_h = \min(\rho_f, \rho_g)$

$$H_n(s_1, \dots, s_n) = \sum_{p=1}^{n-1} F_p(s_1, \dots, s_p) G_{n-p}(s_{p+1}, \dots, s_n)$$



CASCADE (Volterra+linéaire) : $\rho_h = \rho_f$

$$H_n(s_1, \dots, s_n) = F_n(s_1, \dots, s_n) G_1(s_1 + \dots + s_n)$$



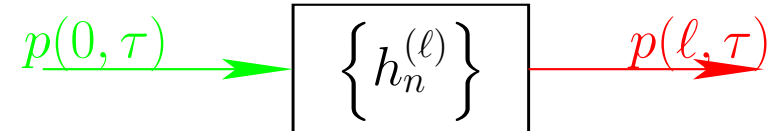
D1- NOYAUX de (S) : Éq. satisfaite par les noyaux

Éq. de Menguy & Gilbert :

$$\partial_\ell p + \alpha_0 \partial_\tau^{\frac{1}{2}} p = p \partial_\tau p$$

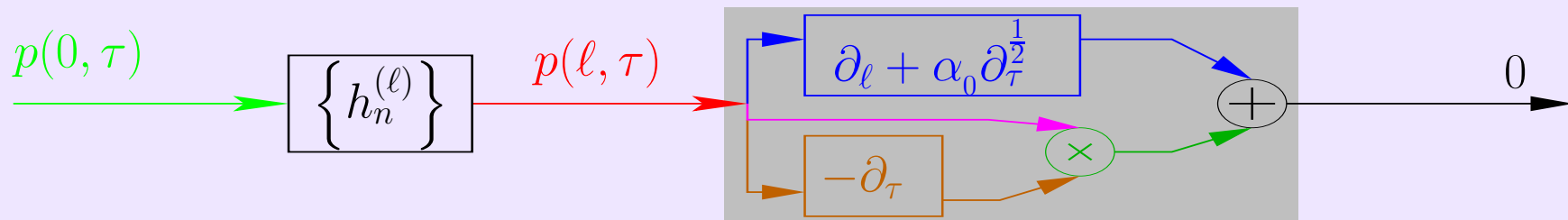
(ℓ : var. spatiale, τ : var. temporelle)

Syst. de Volterra :



(ℓ : paramètres des noyaux)

Équation satisfaite par les noyaux $H_n^{(\ell)}(s_1, \dots, s_n)$:



$$\begin{aligned} \partial_\ell H_n^{(\ell)}(s_1, \dots, s_n) + \alpha_0 \sqrt{s_1 + \dots + s_n} H_n^{(\ell)}(s_1, \dots, s_n) \\ = \sum_{p=1}^{n-1} \left[(s_1 + \dots + s_p) \underbrace{H_p^{(\ell)}(s_1, \dots, s_p) H_{n-p}^{(\ell)}(s_{p+1}, \dots, s_n)}_{\text{ordres} < n} \right] \end{aligned}$$

D2- NOYAUX de (S) : Éq. satisfaite par les noyaux

Équation Differentielle Ordinaire : $\forall n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \partial_\ell H_n^{(\ell)}(s_1, \dots, s_n) + \alpha_0 \sqrt{s_1 + \dots + s_n} H_n^{(\ell)}(s_1, \dots, s_n) \\ = \sum_{p=1}^{n-1} (s_1 + \dots + s_p) \underbrace{H_p^{(\ell)}(s_1, \dots, s_p) H_{n-p}^{(\ell)}(s_{p+1}, \dots, s_n)}_{\text{ordres} < n} \end{aligned}$$

(ℓ : variable, s_p : paramètres)

Conditions aux limites : $\ell = 0 \implies \boxed{p(0, \tau) \rightarrow \{h_n^{(\ell)}\} \xrightarrow{p(\ell, \tau)} \equiv \text{Identité}}$

$$H_1^{(0)}(s_1) = 1 \quad \text{and} \quad H_n^{(0)}(s_1, \dots, s_n) = 0, \quad \forall n \geq 2$$

Comparaisons :

Cas	Système NL	Résolution (noyaux de Volterra)
<i>classique</i>	E.D.O. NL	<i>Algébrique</i>
<i>présent</i>	E.D.P. NL	E.D.O. <i>Linéaire</i>

D3- NOYAUX DE (S) : ordres 1 et 2

$$\left. \begin{array}{l} \underline{\mathbf{n=1}} : \partial_\ell H_1^{(\ell)}(s_1) + \alpha_0 \sqrt{s_1} H_1^{(\ell)}(s_1) = 0 \\ H_1^{(0)}(s_1) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow H_1^{(\ell)}(s_1) = e^{-\alpha_0 \ell \sqrt{s_1}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \underline{\mathbf{n=2}} : \partial_\ell H_2^{(\ell)}(s_1, s_2) + \alpha_0 \sqrt{s_1 + s_2} H_2^{(\ell)}(s_1, s_2) = s_1 e^{-\alpha_0 (\sqrt{s_1} + \sqrt{s_2}) \ell} \\ H_2^{(0)}(s_1, s_2) = 0 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow H_2^{(\ell)}(s_1, s_2) = \frac{s_1}{\alpha_0} \frac{e^{-\alpha_0 \ell \sqrt{s_1 + s_2}} - e^{-\alpha_0 \ell (\sqrt{s_1} + \sqrt{s_2})}}{\sqrt{s_1} + \sqrt{s_2} - \sqrt{s_1 + s_2}}$$

D4- NOYAUX DE (S) : ordres supérieurs

Solution ($\forall n$) :

$$H_n^{(\ell)}(s_1, \dots, s_n) = \sum_{\phi \in \mathbf{S}^n} Q_\phi(s_1, \dots, s_n) e^{-\alpha_0 \ell \phi[s_1, \dots, s_n]},$$

où $\mathbf{S}^1 = \{\sqrt{\cdot}\}$ et $\mathbf{S}^n = \{\oplus, \odot\}^{n-1}$ ($\forall n \geq 2$)

avec la *convention*

$$\begin{cases} A \oplus B = \sqrt{A + B} \\ A \odot B = \sqrt{A} + \sqrt{B} \end{cases}$$

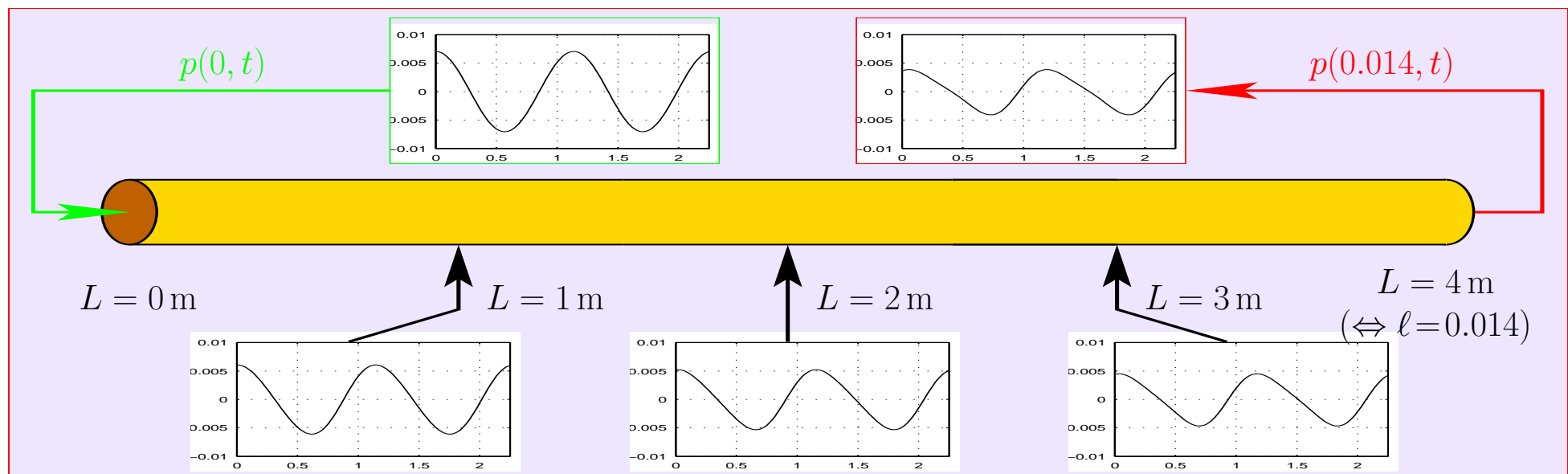
Les fonctions $(Q_\phi(s_1, \dots, s_n))_{\phi \in \cup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{S}^n}$ sont :

1. *bien-définies* par récurrence (analytiquement),
2. *indépendantes* de ℓ ,
3. *frac. rationnelles* de racines carrées de sommes de $(s_k)_{1 \leq k \leq n}$.

E1- SIMULATION TEMPORELLE : cas des signaux périodiques

$$u(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\omega\tau} \longrightarrow \{h_n\} \longrightarrow y(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k e^{ik\omega\tau}$$

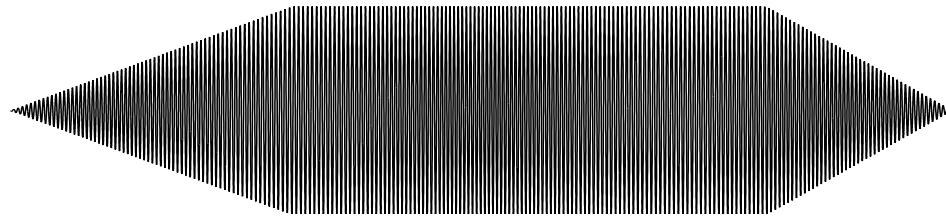
avec $d_k = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{\substack{k_1, \dots, k_n = -\infty \\ k_1 + \dots + k_n = k}} c_{k_1} \dots c_{k_n} H_n(ik_1\omega, \dots, ik_n\omega).$



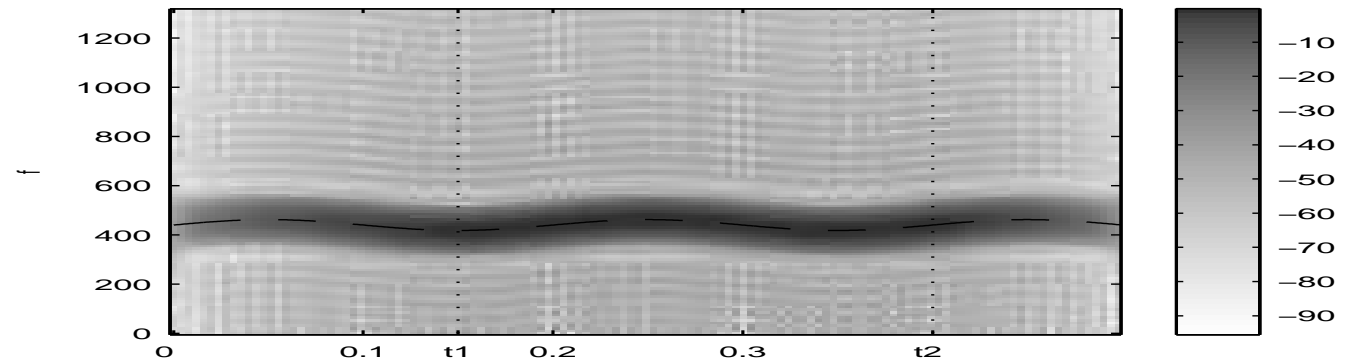
$f = 440\text{ Hz}$, $a \equiv 154\text{ dB SPL}$, $R_0 = 5.6\text{ mm}$, et constantes physiques typiques.

E2- SIMULATION TEMPORELLE : signaux non stationnaires ($f_{moy} = 440$ Hz, $a_{max} \equiv 154$ dB SPL, $R_0 = 5.6$ mm)

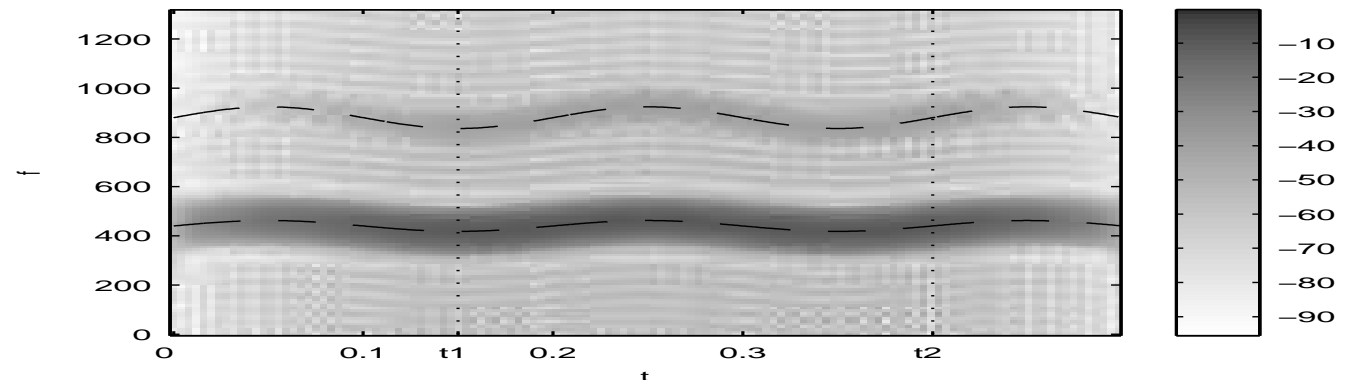
signal d'entrée :



spectro. de l'entrée :

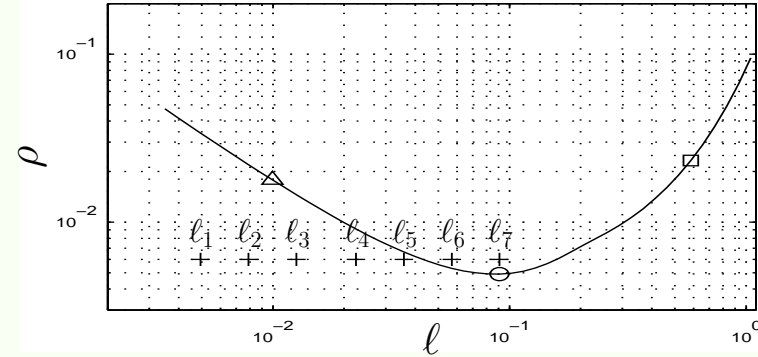
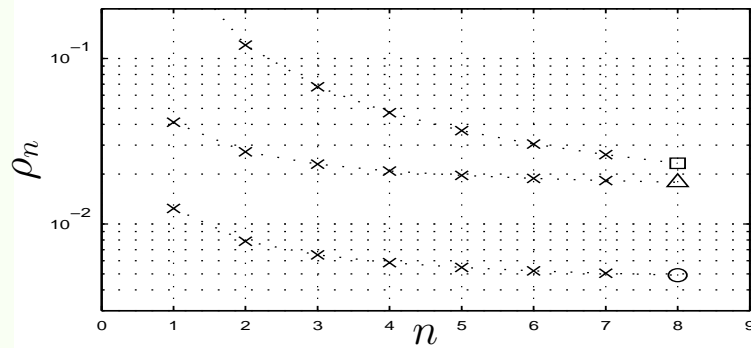


spectro. de la sortie :

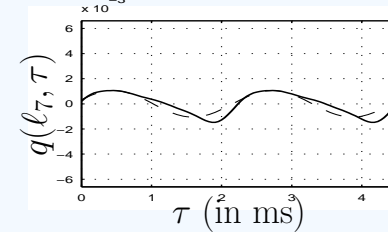
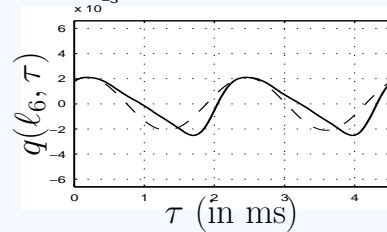
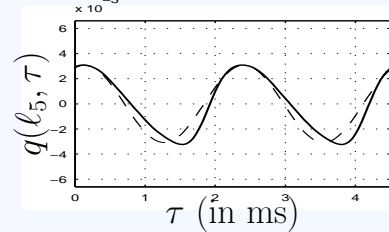
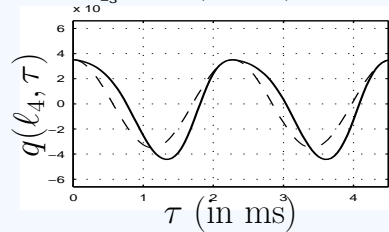
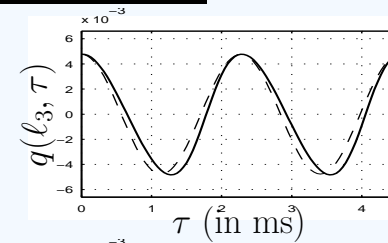
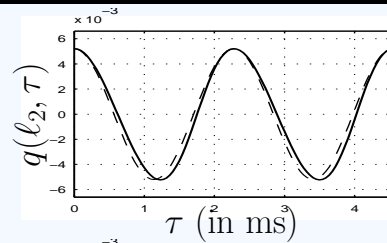
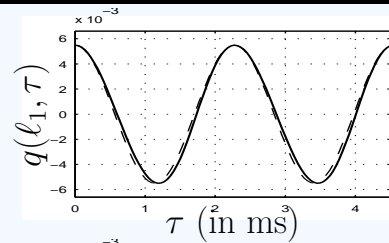
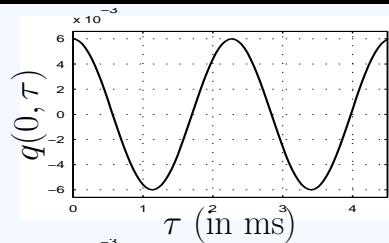


E3- SIMULATION : Convergence et troncature (N=4)

Rayon de convergence estimé par $\rho_n = |H_n(i\omega, \dots, i\omega)/H_{n+1}(i\omega, \dots, i\omega)|$, $n \rightarrow +\infty$:



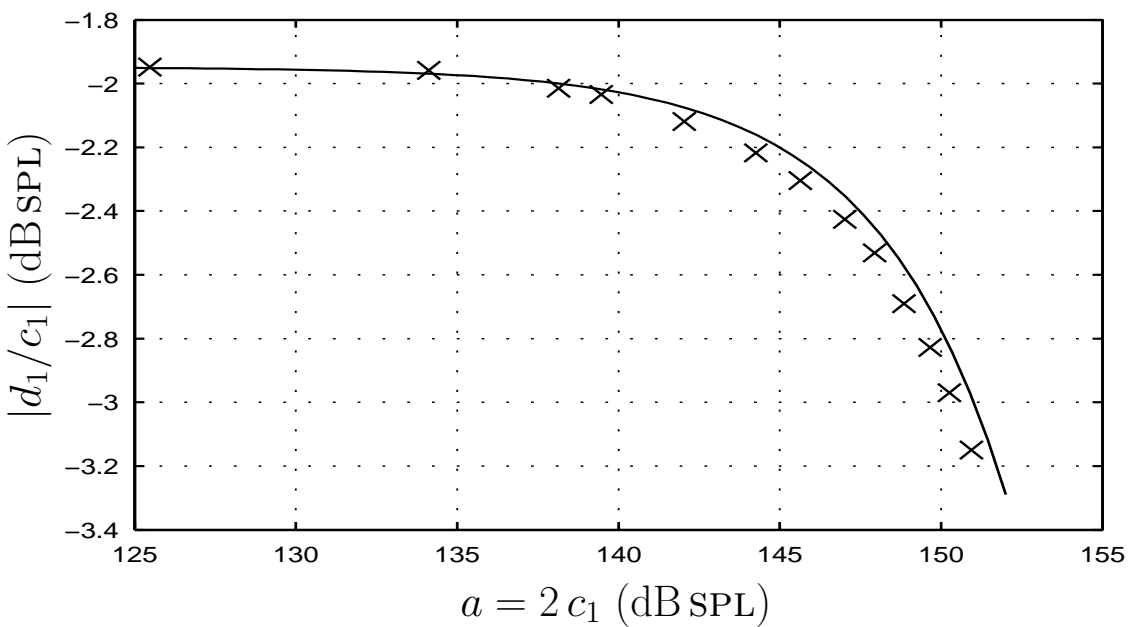
Simulations pour les longueurs $l = 0, l_1, \dots, l_7$ (0m à 26m) :



E4- Confrontation aux données expérimentales

Ratio des amplitudes du fondamental sortie/entrée $|d_1/c_1|$:

($F = 2$ kHz, $R_0 = 29$ mm, $L = 4.98$ m, [Menguy, Gilbert])



E- Conclusion

[IEEE NDES 2003], [International Journal of Control 2004]

Résolution d'EDP faiblement non linéaires par les séries de Volterra :

Cas	Système NL	Résolution (noyaux de Volterra)
<i>classique</i>	E.D.O. NL	<i>Algébrique</i>
<i>présent</i>	E.D.P. NL	E.D.O. ou E.D.P. <i>Linéaire</i>

- Nouvelle méthode :
- Alternative à la *méthode par perturbation*,
- *Outil de décomposition hamonique* efficace,
(e.g. *solution exacte* de l'équilibrage harmonique)
- En pratique, conserver les *premiers noyaux* suffit.

Travaux actuels et perspectives :

- Approx. en *Représentation Diffusive* de $H_1(s_1) = e^{-\alpha_0 \ell \sqrt{s_1}}$, H_2 , etc [Matignon]
- Identif. de *réalisations temporelles faible coût* (appli. en temps-réel) [Rugh]
- Extension aux *systèmes de dim. infinie* : entrée= $u(\vec{x}, t)$