

Résolution d'une équation des ondes faiblement non linéaire par les séries de Volterra et décomposition modale

Thomas Hélie

Ircam - CNRS - STMS UMR 9912, 1 place Igor Stravinsky, 75004 Paris, France, courriel : Thomas.Helie@ircam.fr

Introduction

Dans cet article, la résolution d'une équation des ondes faiblement non linéaire grâce à une représentation en séries de Volterra est présentée. Le problème considéré est décrit par une équation de Westervelt pour un fluide dissipatif incluant des sources de forces volumiques et des conditions aux bords de type Neumann pour la pression.

Dans un premier temps, l'équation de Westervelt dissipative est révisée: le modèle d'amortissement communément admis est en fait à l'origine de composantes divergentes. Un examen de l'établissement du modèle permet de déceler un problème d'inconsistance d'ordre dans les approximations utilisées. Une correction est proposée, qui redonne le comportement attendu.

Puis, après avoir introduit les séries de Volterra, la méthode de résolution est présentée. Elle transforme le problème non linéaire en une suite de problèmes linéaires. Chacun est résolu par décomposition modale. Le premier noyau de la série résout le problème linéarisé. Les suivants expriment les contributions non linéaires pour des ordres de non-linéarité de plus en plus élevés. La décomposition modale des noyaux apporte des interprétations physiques: chaque déformée spatiale est associée à une dynamique non linéaire que l'on exhibe.

Enfin des calculs analytiques menés jusqu'à l'ordre 2 (et qui peuvent être poursuivis) permettent d'identifier une réalisation temporelle constituée de filtres linéaires, de somme et de produits instantanés. Un atout majeur d'une telle réalisation est de traiter indifféremment tout type d'excitation f (périodique, quasi-périodique, stationnaire, transitoire, etc).

Problème posé

Equation de Westervelt d'ondes amorties

Le problème considéré est la propagation non linéaire d'ondes planes de direction \vec{e}_x dans un fluide dissipatif en domaine borné ($x \in [0, X]$) qui contient des sources de forces volumiques représentées par un potentiel $\Phi(x, t)$. Les conditions aux bords considérées ici sont de type Neumann pour la pression (parois rigides idéales).

Lorsque la pression n'excède pas de trop forts niveaux (de l'ordre de 160dB SPL pour l'air), l'équation de Westervelt fournit un modèle satisfaisant de ce problème. Une version de cette équation pour un fluide dissipatif, initialement établie dans le cas *sans perte* (cf. [1] et [2, (14.4.16)-(14.4.17)]) est donnée par [3, chap. 3, (46)]

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 + \frac{\delta}{c^4}\partial_t^3\right)p + \frac{\beta}{\rho c^4}\partial_t^2(p^2) = -\Phi, \quad \forall(x, t) \in]0, X[\times \mathbb{R}^+, \quad (1)$$

où $\Delta = \partial_x^2$ est le laplacien, ρ est la densité, c est la célérité, δ est le coefficient de diffusion, et β le coefficient de la non-linéarité (cf. [3, chap. 3, § 5]). Les conditions initiales sont nulles et les conditions aux bords sont décrites par

$$\partial_x p(x, t) = 0, \quad \forall(x, t) \in \{0, X\} \times \mathbb{R}^+. \quad (2)$$

Enfin, le potentiel considéré est celui d'une force $f(t)\vec{e}_x$ distribuée spatialement, et de la forme

$$\Phi(x, t) = \phi(x) f(t), \quad \forall(x, t) \in]0, X[\times \mathbb{R}^+. \quad (3)$$

Révision de l'équation

Une étude du comportement linéaire ($\beta = 0$) de (1) montre que le terme d'amortissement $\frac{\delta}{c^4}\partial_t^3 p$ ne donne pas le phénomène escompté: une décomposition modale permet d'exhiber les fonctions de transfert de chaque mode qui présentent deux pôles à partie réelle négative et un troisième réel positif. Ce dernier est à l'origine d'une croissance exponentielle non oscillante portée par chaque déformée modale. Ce phénomène disparaît lorsque le coefficient de diffusion δ est nul.

A la connaissance de l'auteur, ce paradoxe n'est ni référencé, ni résolu. Cependant, l'examen de l'établissement de (1) a permis d'identifier une inconsistance dans les ordres d'approximations des développements limités utilisés [3, p.52-53]: l'opérateur original $\frac{\delta}{c^4}\partial_t^3 \Delta$ ne doit pas être remplacé par $\frac{1}{c^4}\partial_t^3$ à l'aide de l'identité $\Delta = \frac{1}{c^2}\partial_t^2$. Cette dernière identité est valable pour une propagation linéaire conservative, ce qui n'est pas consistant avec l'ordre d'approximation recherché. Ainsi, (1) est remplacée par

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 + \frac{\delta}{c^2}\partial_t\partial_x^2\right)p + \frac{\beta}{\rho c^4}\partial_t^2(p^2) = -\Phi. \quad (4)$$

Dans ce cas, les modes sont associés à deux pôles à partie réelle négative, ce qui rétablit bien un comportement de type amorti.

Modèle adimensionnel

Une version adimensionnelle de ce problème est obtenue pour le changement de variable $(\tilde{x}, \tilde{t}) = (x/X, ct/X)$. En omettant le tilde afin de ne pas surcharger les notations, le problème se réécrit

$$\left(\partial_x^2 - \partial_t^2 + \alpha\partial_t\partial_x^2\right)p + \varepsilon\partial_t^2(p^2) = -\phi f, \quad \forall(x, t) \in]0, 1[\times \mathbb{R}^+, \quad (5)$$

$$p(x, t) = 0, \quad \forall(x, t) \in]0, 1[\times \{0\}, \quad (6)$$

$$\partial_x p(x, t) = 0, \quad \forall(x, t) \in \{0, 1\} \times \mathbb{R}^+ \quad (7)$$

avec $\alpha = \delta/(cX)$ et $\varepsilon = \beta/(\rho c^2)$.

Ce problème est résolu dans ce qui suit, par une représentation en *séries de Volterra*.

Introduction aux séries de Volterra

Definitions and notations

Un système est décrit par une série de Volterra de noyaux $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ pour des entrées $|u(t)| < \rho$ si la sortie $y(t)$ est donnée par la somme de convolutions multiples

$$y(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) u(t - \tau_1) \dots u(t - \tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n, \quad (8)$$

où ρ est le rayon de convergence de la *fonction caractéristique*

$$\varphi_h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \|h_n\|_1 x^n, \quad (9)$$

et $\|h_n\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |h_n(\tau_1, \dots, \tau_n)| d\tau_1 \dots d\tau_n$ est la norme L^1 de h_n .

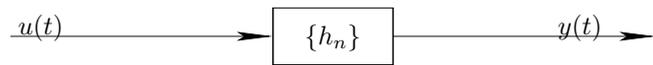


Figure 1: Système représenté par une série de Volterra de noyaux $\{h_n\}$

Pour des systèmes causaux, les noyaux h_n sont nuls pour $\tau_k < 0$. Leur transformée de Laplace mono-latérale [4, (29.1.2)] est notée par des lettres capitales d'imprimerie $H_n(s_1, \dots, s_n)$. Pour des systèmes causaux stables, les noyaux H_n sont analytiques pour $s_k \in \mathbb{C}_+ = \{s \in \mathbb{C} | \Re(s) > 0\}$.

Remarque : les séries de Volterra englobent les systèmes décrits par : (a) des filtres linéaires ($h_n = 0$ pour $n \geq 2$) ; (b) des fonctions non linéaires instantanées $y = h(u)$ nulles en zéro qui admettent un développement en séries entières $h(u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n u^n$; (c) leurs multiples combinaisons (somme, produit, cascade) comme indiqué ci-dessous dans les *lois d'interconnexion*.

Lois d'interconnexion

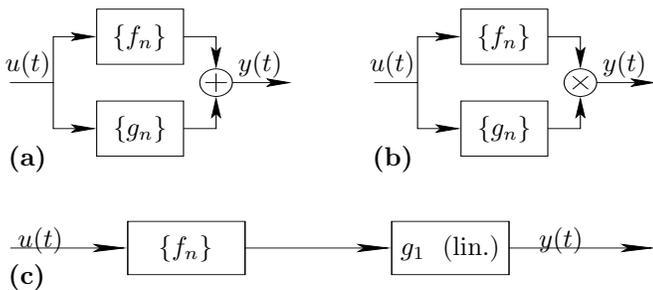


Figure 2: Somme (a), produit (b), et cascade (c) de systèmes

Les noyaux $\{H_n\}$ des systèmes présentés dans les figures 2a, 2b, et 2c sont données par (cf. [5, p. 34-35]),

respectivement,

$$H_n(s_1, \dots, s_n) = F_n(s_1, \dots, s_n) + G_n(s_1, \dots, s_n), \quad (10)$$

$$H_n(s_1, \dots, s_n) = \sum_{p=1}^{n-1} F_p(s_1, \dots, s_p) G_{n-p}(s_{p+1}, \dots, s_n), \quad (11)$$

$$H_n(s_1, \dots, s_n) = F_n(s_1, \dots, s_n) G_1(s_1 + \dots + s_n) \quad (12)$$

Les rayons de convergence sont tels que $\rho_h \geq \min(\rho_f, \rho_g)$ pour les cas (a,b) et $\rho_h \geq \rho_f$ pour le cas (c).

Noyaux solution

Equation satisfaite par les noyaux

Pour une distribution spatiale ϕ donnée, le problème (5-7) décrit un ensemble de systèmes dynamiques non linéaires paramétrés par x , d'entrée $f(t)$ et de sortie $p(x, t)$. La coordonnée x représente ici le lieu d'observation de la pression p . Soient $\{h_n^{(x)}\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ les noyaux de Volterra paramétrés par x , représentant ces systèmes.

L'équation (5) peut être représentée sous la forme du schéma-bloc donné en figure 3. Les lois d'interconnexion

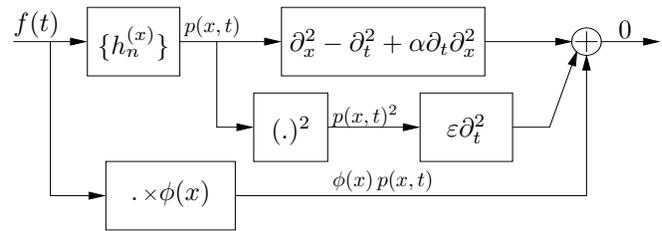


Figure 3: Système annulateur de $\{h_n\}$

(10-12) permettent d'exprimer les noyaux de Volterra du système défini par le schéma-bloc :

- **branche haute :** dans le domaine de Laplace, l'opérateur $\partial_x^2 - \partial_t^2 + \alpha \partial_t \partial_x^2$ devient $(1 + \alpha s) \partial_x^2 - s^2$ (on rappelle que les conditions initiales sont nulles). Ainsi, d'après (12), la concaténation de $\{h_n^{(x)}\}$ avec cet opérateur définit les noyaux

$$(1 + \alpha(s_1 + \dots + s_n)) \partial_x^2 H_n^{(x)}(s_1, \dots, s_n) - (s_1 + \dots + s_n)^2 H_n^{(x)}(s_1, \dots, s_n) \quad (13)$$

L'opérateur spatial ∂_x^2 s'applique en effet directement sur les noyaux puisqu'il commute avec les opérateurs temporels (sous les hypothèses standard du *théorème de convergence dominée*).

- **branche centrale :** d'après (11), la concaténation de $\{h_n^{(x)}\}$ et d'une mise au carré définit les noyaux

$$\sum_{p=1}^{n-1} H_p^{(x)}(s_1, \dots, s_p) H_{n-p}^{(x)}(s_{p+1}, \dots, s_n),$$

et la concaténation de ce système avec l'opérateur

$\varepsilon \partial_x^2$ défini, d'après (12),

$$\varepsilon (s_1 + \dots + s_n)^2 \sum_{p=1}^{n-1} H_p^{(x)}(s_1, \dots, s_n) H_{n-p}^{(x)}(s_{p+1}, \dots, s_n). \quad (14)$$

Il est remarquable que le premier noyau donné par (14) est nul puisque la somme est vide pour $n = 1$, et qu'à un ordre n donné, seul des noyaux H_p d'ordre $p \leq n - 1$ sont impliqués.

- **branche basse :** le système dynamique défini par cette branche n'est en fait qu'un simple gain $\phi(x)$. Les noyaux de Volterra de ce système linéaire sont donc, dans le domaine de Laplace, $\phi(x)$ pour l'ordre $n = 1$ et 0 pour les ordres $n \geq 2$.

La loi (10) permet finalement de définir les noyaux du système complet, qui a tous ses noyaux nuls. Ceci conduit à l'équation, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x, s_{1,n}) \in]0, 1[\times \mathbb{C}_+^n$,

$$\partial_x^2 H_n^{(x)}(s_{1,n}) - [\Gamma(\overline{s_{1,n}})]^2 H_n^{(x)}(s_{1,n}) = -E_n^{(x)}(s_{1,n}), \quad (15)$$

avec les définitions

$$[\Gamma(s)]^2 = \frac{s^2}{1 + \alpha s}, \quad \forall s \in \mathbb{C}_+, \quad (16)$$

$$E_1^{(x)}(s_1) = \phi(x) \quad \text{pour } n = 1, \quad (17)$$

$$E_n^{(x)}(s_{1,n}) = \varepsilon [\Gamma(\overline{s_{1,n}})]^2 \sum_{p=1}^{n-1} H_p^{(x)}(s_{1,p}) H_{n-p}^{(x)}(s_{p+1,n}) \quad \text{pour } n \geq 2, \quad (18)$$

et où les notations $s_{p,q} = (s_p, \dots, s_q)$ et $\overline{s_{p,q}} = s_p + \dots + s_q$ avec $(p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et $p \leq q$ sont utilisées pour alléger l'écriture. Enfin, les conditions aux bords décrivent que la sortie du système $\{\partial_x H_n^{(x)}\}$ est nulle pour $x \in \{0, 1\}$ de sorte que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\partial_x H_n^{(x)}(s_{1,n}) = 0 \quad \forall (x, s_{1,n}) \in \{0, 1\} \times \mathbb{C}_+^n. \quad (19)$$

La résolution du problème (5-7) revient donc à résoudre (15-19). En théorie, cette résolution doit être menée pour $n \in \mathbb{N}^*$. De tels calculs peuvent être menés (voir [6] pour le cas d'une équation de Burgers modifiée). De plus, la convergence doit être prouvée. Mais, du point de vue de la physique, la prise en compte des deux premiers ordres $n = 1$ et $n = 2$ est déjà satisfaisante pour de nombreuses applications, d'autant que l'ordre 2 est aussi l'ordre auquel l'équation de Westervelt est valide.

Pour chaque ordre n , l'équation (15) est une équation différentielle ordinaire *linéaire* sur H_n pour la variable x et où E_n représente un second membre explicite. En effet, E_1 est donné et pour $n \geq 2$, E_n ne fait intervenir que des noyaux déjà calculés (H_p avec $p \leq n - 1$). Plusieurs méthodes de résolutions sont donc disponibles.

Le choix est fait ici d'utiliser une décomposition sur la base hilbertienne de $L^2(]0, 1[_x)$ constituée par les fonctions propres du laplacien pour le problème aux limites (*cf.* par exemple [7]). Ce choix a un intérêt physique puisqu'il

a une interprétation modale : chaque composante d'un noyau d'ordre n engendrera la dynamique non linéaire d'ordre n portée par la déformée modale e_k . En particulier, ceci montre que la superposition des dynamiques de déformées modales garde un sens pour le problème non linéaire.

Décomposition modale

La décomposition des noyaux sur une base orthonormée $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de $L^2(]0, 1[_x)$ s'écrit

$$H_n^{(x)} \underset{L^2}{=} \sum_{k \in \mathbb{N}} H_{n,k} e_k(x), \quad (20)$$

$$H_{n,k} = \left\langle H_n^{(x)}, e_k \right\rangle, \quad (21)$$

où le produit scalaire est donné par

$$\langle f, g \rangle = \int_{]0, 1[_x} f(x) g(x) dx. \quad (22)$$

Ici, la base orthonormée de fonctions propres $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est décrite par

$$e_k(x) = \xi_k \cos(k\pi x), \quad \forall x \in]0, 1[, \quad (23)$$

où les coefficients de normalisation sont $\xi_0 = 1$ et $\xi_k = \sqrt{2}$ pour $k \geq 1$. Ces fonctions propres du laplacien vérifient, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\partial_x^2 e_k = -(\pi k)^2 e_k. \quad (24)$$

de sorte que, d'après (15),

$$H_{n,k}(s_{1,n}) = \frac{1}{P_k(\overline{s_{1,n}})} E_{n,k}(s_{1,n}), \quad \forall s_{1,n} \in \mathbb{C}_+^n, \quad (25)$$

$$\text{avec } P_k(s) = [\Gamma(s)]^2 + (\pi k)^2, \quad \forall s \in \mathbb{C}_+. \quad (26)$$

Noyau d'ordre 1. D'après (17) et (25), le noyau d'ordre 1 est donné par (20) pour $n = 1$ avec

$$H_{1,k}(s_1) = \frac{\langle \phi, e_k \rangle}{P_k(s_1)} = \frac{\phi_k}{P_k(s_1)}, \quad \forall s_1 \in \mathbb{C}_+. \quad (27)$$

La fonction de transfert $H_1^{(x)}(s_1)$ représente le système linéarisé ($\varepsilon = 0$) pour qui les seuls modes k excités sont ceux de la distribution spatiale $\phi(x)$. Les pôles de la fonction de transfert $H_{1,k}$ de chaque déformée modale sont les zéros de P_k , eux-mêmes racines de $s^2 + \alpha(\pi k)^2 s + \alpha(\pi k)^2$. Les résultats rassemblés dans le tableau 1 montrent que tous les modes sont amortis à l'exception de $k = 0$ qui à un comportement *intégrateur* dû aux conditions aux bords de type Neumann. L'étude de ce système linéaire est standard.

Noyau d'ordre 2. La fonction $\frac{E_2^{(x)}(s_{1,2})}{\varepsilon [\Gamma(\overline{s_{1,n}})]^2}$ s'écrit (*cf.* (18)),

$$H_1^{(x)}(s_1) H_1^{(x)}(s_2) = \sum_{(k_1, k_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} H_{1,k_1}(s_1) H_{1,k_2}(s_2) e_{k_1}(x) e_{k_2}(x). \quad (28)$$

k	0	1	$(\pi\alpha)^{-1}$	$+\infty$
pôles	0	$-a_k \pm i\omega_k$ ($a_k > 0$)		$\in \mathbb{R}^{-*}$
comportement	$\int_0^t \cdot dt$	oscillant amorti		évanescent

Table 1: Pôles et comportement de chaque déformée modale

(k_1, k_2)	$e_{k_1} e_{k_2} =$
$0 = k_1 = k_2$	e_0
$0 \neq k_1 = k_2$	$e_0 + \frac{1}{\sqrt{2}} e_{2k_2}$
$0 = k_1 < k_2$	e_{k_2}
$0 \neq k_1 < k_2$	$\frac{1}{\sqrt{2}} e_{k_2+k_1} + \frac{1}{\sqrt{2}} e_{k_2-k_1}$

Table 2: Produit de deux fonctions propres $e_{k_1} e_{k_2}$ (avec la convention $0 \leq k_1 \leq k_2$)

Les produits $e_{k_1} e_{k_2}$ se décomposent sur les fonctions propres comme indiqué dans le tableau 2 de sorte que

$$H_{2,k}(s_{1,2}) = \varepsilon \frac{[\Gamma(\overline{s_{1,2}})]^2}{P_k(\overline{s_{1,2}})} Q_{2,k}(s_{1,2}), \quad (29)$$

$$Q_{2,0}(s_{1,2}) = \sum_{p \in \mathbb{N}} H_{1,p}(s_1) H_{1,p}(s_2), \quad (30)$$

$$Q_{2,k}(s_{1,2}) = H_{1,0}(s_1) H_{1,k}(s_2) + H_{1,k}(s_1) H_{1,0}(s_2) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{(k_1, k_2) \in \mathbb{I}_k} H_{1,k_1}(s_1) H_{1,k_2}(s_2), \text{ si } k \in \mathbb{N}^*, (31)$$

où $\mathbb{I}_k = \{(k_1, k_2) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \mid k_1 + k_2 = k \text{ ou } |k_1 - k_2| = k\}$ (cf. fig. 4). Pour $k = 0$, il est important de remarquer

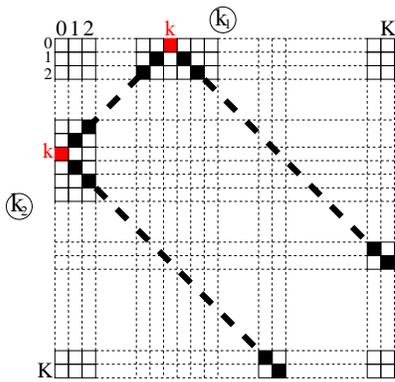


Figure 4: Conformément à (31), le poids 1 est attribué sur les 2 coins, et $1/\sqrt{2}$ sur les diagonales noires (décrites par \mathbb{I}_k).

que $\frac{[\Gamma(\overline{s_{1,2}})]^2}{P_k(\overline{s_{1,2}})} = 1$, ce qui signifie qu'il n'y a pas de comportement intégrateur supplémentaire engendré par la non-linéarité du système.

Noyaux d'ordres supérieurs. La poursuite des calculs permet d'exhiber une récurrence construite à partir d'arbres, de manière assez analogue au travail mené dans [6]. Ces résultats ne sont pas développés ici.

Réalisation temporelle

En cascasant le produit des sorties des systèmes linéaires $A_1(s_1)$, $B_1(s_1)$ avec un système $C_1(s_1)$, on définit un système dont le seul noyau non nul, d'ordre 2, est donné par $A_1(s_1)B_1(s_2)C_1(\overline{s_{1,2}})$. Par identification sur (29-31), on déduit la structure en filtres linéaires, sommes et produits instantanés, qui construit la dynamique $p_k(t)$ de la déformée e_k (cf. fig. 5 pour une version avec $k \leq K$).

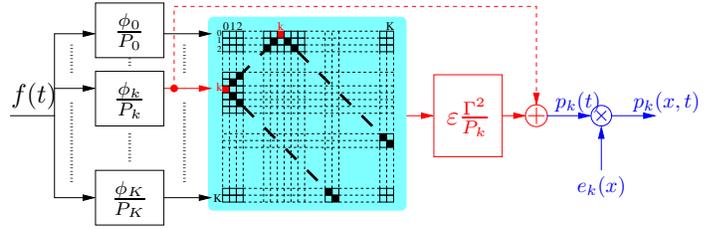


Figure 5: Réalisation temporelle de la dynamique non linéaire d'un mode $k \geq 1$ jusqu'à l'ordre 2. La flèche en pointillé est la contribution du noyau d'ordre 1).

Conclusion et perspectives

Une méthode de résolution d'une équation de Westervelt par les séries de Volterra a permis d'aboutir à une structure réalisable dans le domaine temporel. Cette structure est pilotée par $f(t)$. Elle construit les dynamiques non linéaires de chaque déformée modale, générée par f . D'un point de vue théorique, le calcul des noyaux d'ordres supérieurs à deux, la caractérisation du domaine de convergence, et une estimation de l'erreur de troncature sont encore à étudier. Du point de vue applicatif, la mise en oeuvre numérique de la structure reste à implanter.

References

- [1] P. J. Westervelt. Parametric acoustic array. J. Acoust. Soc. Am. (35) (1963) 535-537
- [2] P. M. Morse and K. U. Ingard. Theoretical acoustics. McGraw-Hill (1968)
- [3] M. F. Hamilton and D. T. Blackstock. Nonlinear acoustics. Elsevier Academic Press (1998)
- [4] M. Abramowitz and I. Stegun. Handbook of mathematical functions. Dover (1970)
- [5] M. Hasler. Phénomènes non linéaires. École Polytechnique Fédérale de Lausanne (1999)
- [6] Th. Hélie et M. Hasler. Volterra series for solving weakly non-linear partial differential equations: application to a dissipative Burgers' equation. International Journal of Control (77) (2004), 1071-1082
- [7] H. Brézis. Analyse fonctionnelle, théorie et applications. Dunod (1999)

Note: ce travail entre dans le cadre du projet GIP/ANR CONSONNES.