**Ondes découplées et ondes progressives pour les problèmes mono-dimensionnels d'acoustique linéaire**

Thomas Hélie

*Ircam - CNRS - STMS UMR 9912, 1 place Igor Stravinsky, 75004 Paris, France, courriel : Thomas.Helie@ircam.fr*

# Introduction

La simulation numérique temporelle d'un tube acoustique nécessite de définir des ondes respectant le principe de causalité, en particulier pour les applications en temps réel. Ces ondes progressives sont bien connues dans le cadre d'une propagation sans pertes pour les ondes planes et sphériques. Dans le cas de tubes courbes, des définitions d'ondes progressives couplées sont encore connues, *e.g.* dans la thèse d'Eric Ducasse [1]. Mais même si elles sont mathématiquement bien posées, ces ondes ne correspondent pas à une généralisation des ondes sphériques découplées : pour un profil de tube conique, leur définition ne reconduit pas à des ondes découplées.

La première partie de cet article est consacrée à la mise en évidence systématique d'ondes découplées et d'ondes progressives. Les cas simples des ondes planes et sphériques sont illustrés ainsi que le cas d'ondes cylindriques et d'ondes mono-dimensionnelles dans des guides à symétrie axiale ou pavillons. Dans une seconde partie, après avoir rappelé et appliqué le changement d'état de type *ondes planes* aux guides à symétrie axiale, d'autres changements d'état acoustiques sont définis. Des extensions naturelles des ondes sphériques qui restent de type progressives pour des géométries non coniques sont proposées. En particulier, une définition conduit à des ondes avec un couplage symétrique qui est fonction de la courbure. Enfin, ces états acoustiques sont utilisés dans le cas de guides incluant des pertes visco-thermiques, modélisés par une équation de Webster-Lokshin. Le dernier changement d'état à couplage symétrique a été utilisé pour la simulation temporelle de pavillons. Ce travail est détaillé dans [2]. De plus, il a permis d'aboutir à une application fonctionnant en temps réel qui simule un résonateur d'un instrument de musique de type cuivre [3].

# Problèmes conservatifs mono-dimensionnels standard

## Généralités

Pour un problème d'acoustique linéaire dans un fluide idéal et sans source, l'équation d'Euler et l'équation de la conservation de la masse prennent la forme [4, p15]

$$\begin{aligned} \partial_t \vec{v} + \frac{1}{\rho}\vec{\mathrm{grad}} p &= 0, & (1)\\ \partial_t p + \rho c^2 \mathrm{div}\vec{v} &= 0, & (2)\end{aligned}$$

où $\rho$ est la densité $\rho$ et $c$ la célérité. L'équation des ondes associée est donnée par $\rho\mathrm{div}(1) - \partial_t(2)/c^2$, c'est-à-dire,

$$\Delta p - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 p = 0. \tag{3}$$

De tels problèmes sont conservatifs: la densité d'énergie acoustique $e(\vec{x},t)$, l'énergie $E(t)$ contenue dans un volume $\Omega$ et sa variation sont données par

$$e(\vec{x},t) = \frac{1}{2}\rho\vec{v}.\vec{v} + \frac{1}{2\rho c^2}p^2 \tag{4}$$

$$E(t) = \int_\Omega e(\vec{x},t)\mathrm{d}\omega, \tag{5}$$

$$\begin{aligned} E'(t) &= \int_\Omega\Big(\rho\vec{v}\partial_t\vec{v} + \frac{p\partial_t p}{\rho c^2}\Big)\mathrm{d}\omega = -\int_\Omega\Big(\vec{v}.\vec{\mathrm{grad}}p + p\,\mathrm{div}\vec{v}\Big)\mathrm{d}\omega\\ &= -\int_\Omega \mathrm{div}\big(p\,\vec{v}\big)\mathrm{d}\omega = -\int_{\partial\Omega} p\,\vec{v}.\mathrm{d}\vec{S}, \end{aligned}\tag{6}$$

où $\partial\Omega$ est le bord de $\Omega$ et $\mathrm{d}\vec{S}$ est le vecteur de surface élémentaire pointant vers l'extérieur.

## Recherche d'ondes planes découplées

Le cas d'ondes planes se propageant dans une direction $u_x$ correspond à $\vec{v} = v\,\vec{u}_x$, $\vec{\mathrm{grad}}p = \partial_x p\,\vec{u}_x$, $\mathrm{div}\vec{v} = \partial_x v$ de sorte que (1) et (2) se récrivent sous la forme

$$\partial_x X_p + M_p\partial_t X_p = 0, \tag{7}$$

où le vecteur d'état $X_p$ et la matrice $M_p$ sont donnés par

$$\begin{aligned} X_p &= [p, v]^t, & (8)\\ M_p &= \begin{bmatrix} 0 & \rho \\ \frac{1}{\rho c^2} & 0 \end{bmatrix} & (9)\end{aligned}$$

Rechercher les ondes découplées revient à déterminer un changement d'état qui diagonalise $M_p$ en $D_p$. Les deux valeurs propres de $M_p$ sont $\lambda^+ = 1/c$ et $\lambda^- = -1/c$. Elles sont associées aux vecteurs propres de la forme $e^+ = \alpha[1, 1/(\rho c)]^t$ et $e^- = \beta[1, -1/(\rho c)]^t$ où $\alpha$ et $\beta$ sont non nuls. Le choix $\alpha = \beta = 1$ conduit à la définition d'ondes homogènes à $p$ ($\alpha$ et $\beta$ sont sans dimension) et dont la somme vaudra $p$ ($\alpha$ et $\beta$ valent 1). Dans ce cas, la matrice de passage $P_p$ et son inverse $P_p^{-1}$ sont

$$\begin{aligned} P_p &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{\rho c} & \frac{-1}{\rho c} \end{bmatrix}, & (10)\\ P_p^{-1} &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & \rho c \\ 1 & -\rho c \end{bmatrix}. & (11)\end{aligned}$$

L'état $Y_p = [p^+, p^-]$ est donné par $Y_p = P_p^{-1}X_p$. La matrice diagonale est $D_p = P_p^{-1}M_pP_p = \mathrm{diag}(1/c, -1/c)$.

Les *ondes découplées* sont solution de l'équation de transport $\partial_x Y_p + D_p \partial_t Y_p = 0$. Elles ont donc aussi la propriété d'*ondes progressives* et $Y_p(x,t) = [p^+(x-ct), p^-(x+ct)]^t$.

La densité d'énergie et l'énergie contenue dans un cylindre $\Omega = [0,L] \times S$ de section $S$ sont

$$e = X_p^t M_E X_p = Y_p^t\, P_p^t M_E P_p\, Y_p = \frac{(p^+)^2 + (p^-)^2}{\rho c^2} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} E'(t) &= S\big(p(x=0,t)v(x=0,t) - p(x=L,t)v(x=L,t)\big) \\ &= \frac{S}{\rho c}\Big[p^+(-ct)^2 - p^+(L-ct)^2 - p^-(ct)^2 + p^-(L+ct)^2\Big] \quad (13) \end{aligned}$$

avec $M_E = (1/2)\,\mathrm{diag}\big(1/(\rho c^2), \rho\big)$.

## Cas des ondes cylindriques

Les ondes cylindriques se propageant dans une direction radiale $\vec{u}_r$ correspondent à $\vec{v} = v\,\vec{u}_r$, $\vec{\mathrm{grad}} p = \partial_r p\,\vec{u}_r$, $\mathrm{div}\vec{v} = (1/r)\partial_r\big(r\,v\big)$ de sorte que (1) et (2) se récrivent

$$\begin{aligned} \partial_r X_c + M_c \partial_t X_c &= 0, && (14) \\ X_c &= [p, rv]^t, && (15) \\ M_c &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{\rho}{r} \\ \frac{r}{\rho c^2} & 0 \end{bmatrix}. && (16) \end{aligned}$$

La diagonalisation de $M_c$ n'entraîne pas celle du système (14) car $P_c$ est fonction de $r$ et ne commute pas avec $\partial_r$. En effet, l'état $Y_c$ tel que $X_c = P_c Y_c$ est solution de

$$\partial_r Y_c + P_c^{-1}\left(P_c' + M_c P_c \partial_t\right) Y_c = 0, \quad (17)$$

où $P_c'$ est la dérivée de $P_c$ par rapport à $r$. Ce système n'a pas de solution: il est diagonal si et seulement si $P_c^{-1} P_c'$ et $P_c^{-1} M_c P_c$ sont diagonales, ce qui conduit à $P_c = 0$.

Cependant, un état en *ondes découplées* peut être recherché en considérant $P_c$ dans la classe des opérateurs temporels linéaires qui commutent avec $\partial_t$. En notant $\widehat{Y_c}(r,s)$ la transformée de Laplace (bilatérale) de $Y_c(r,t)$ pour la variable temporelle, le problème se ramène à déterminer $\widehat{P_c}(r,s)$ qui diagonalise

$$\widehat{D_c} = \widehat{P_c}^{-1}\left(\partial_r \widehat{P_c} + s\, M_c \widehat{P_c}\right), \quad (18)$$

qui définit le changement d'état $\widehat{P_c}\,\widehat{Y_c} = \widehat{X_c}$ et le système

$$\partial_r \widehat{Y_c} + \widehat{D_c}\widehat{Y_c} = 0. \quad (19)$$

La variable complexe $s$ est celle de Laplace (le cas particulier d'une analyse fréquentielle correspond à prendre $s = i\omega = 2i\pi f$). Imposer que l'anti-diagonale de $\widehat{D_c}$ soit nulle conduit à résoudre deux équations différentielles en $r$ et aboutit à une solution $\widehat{P_c}(r,s)$ de la forme

$$\begin{aligned} \widehat{P_c}(r,s) &= \begin{bmatrix} \widehat{\alpha}(r,s) & \widehat{\beta}(r,s) \\ \frac{r\widehat{\alpha}(r,s)}{\rho c}\widehat{G_a}(r,s) & \frac{r\widehat{\beta}(r,s)}{\rho c}\widehat{G_b}(r,s) \end{bmatrix} && (20) \\ \widehat{G_a}(r,s) &= -\frac{\widehat{a}(s)\, I_1(\frac{sr}{c}) - K_1(\frac{sr}{c})}{\widehat{a}(s)\, I_0(\frac{sr}{c}) + K_0(\frac{sr}{c})} && (21) \end{aligned}$$

avec $\widehat{P_c}\,\widehat{Y_c} = \widehat{X_c}$, où $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$, $\widehat{a}$ et $\widehat{b}$ sont des fonctions arbitraires et $I_n$ et $K_n$ sont les fonctions de Bessel modifiées [5, § 9.6]. Le choix $\widehat{a}(s) = \nu$ avec $\nu \to +\infty$ et $\widehat{b}(s) = 0$ conduit aux expressions plus légères $G_\infty(r,s) = -I_1(\frac{sr}{c})/I_0(\frac{sr}{c})$ et $G_0(r,s) = K_1(\frac{sr}{c})/K_0(\frac{sr}{c})$.

**Ondes progressives découplées.** Ce changement d'état s'obtient naturellement pour $\widehat{D_c} = \mathrm{diag}\big(s/c, -s/c\big)$. Ceci conduit à $\widehat{\alpha}(r,s) = \big(\widehat{a_1}(s)\exp(2\frac{sr}{c}) + \widehat{a_2}(s)\big)/r$ et $\widehat{\beta}(r,s) = \big(\widehat{b_1}(s) + \widehat{b_2}(s)\exp(-2\frac{sr}{c})\big)/r$ où $\widehat{a_1}$, $\widehat{a_2}$, $\widehat{b_1}$ et $\widehat{b_2}$ sont arbitraires. Il est donc possible de définir de telles ondes au prix d'un changement d'état compliqué. Même pour des expressions simplifiées, par exemple pour $(a_1, a_2, b_1, b_2) = (0,1,1,0)$,

$$\widehat{P_c}(r,s) = \begin{bmatrix} 1/r & 1/r \\ \frac{1}{\rho c}\widehat{G_0}(r,s) & \frac{1}{\rho c}\widehat{G_\infty}(r,s) \end{bmatrix} \quad (22)$$

ne correspond pas à des opérateurs intégro-différentiels de dimension finie. Leur étude n'est pas menée ici.

## Cas des ondes sphériques

Les ondes sphériques se propageant dans une direction radiale $\vec{u}_r$ correspondent à $\vec{v} = v\,\vec{u}_r$ $\vec{\mathrm{grad}} p = \partial_r p\,\vec{u}_r$, $\mathrm{div}\vec{v} = (1/r^2)\partial_r\big(r^2\,v\big)$ de sorte que (1) et (2) se récrivent

$$\begin{aligned} \partial_r X_s + M_s \partial_t X_s &= 0, && (23) \\ X_s &= [p, r^2 v]^t, && (24) \\ M_s &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{\rho}{r^2} \\ \frac{r^2}{\rho c^2} & 0 \end{bmatrix} && (25) \end{aligned}$$

Comme dans le cas précédent, les ondes découplées ne peuvent être trouvées que si $P_s$ est un opérateur temporel. Le problème à résoudre est similaire à (17)-(18) où $Y_c$, $D_c$, $P_c$ et $M_c$ sont remplacés par $Y_s$, $D_s$, $P_s$ et $M_s$, respectivement. La solution générale $\widehat{P_s}$ est donnée par

$$\begin{aligned} \widehat{P_s}(r,s) &= \begin{bmatrix} \widehat{\alpha}(r,s) & \widehat{\beta}(r,s) \\ \frac{r^2\widehat{\alpha}(r,s)}{\rho c}\widehat{H_a}(r,s) & \frac{r^2\widehat{\beta}(r,s)}{\rho c}\widehat{H_b}(r,s) \end{bmatrix}, && (26) \\ \widehat{H_a}(r,s) &= \frac{(\frac{c}{sr} - 1) + \widehat{a}(s)(\frac{c}{sr} + 1)\mathrm{e}^{-2\frac{sr}{c}}}{1 + \widehat{a}(s)\mathrm{e}^{-2\frac{sr}{c}}}, && (27) \end{aligned}$$

avec $\widehat{P_s}\,\widehat{Y_s} = \widehat{X_s}$ et où $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$, $\widehat{a}$ et $\widehat{b}$ sont arbitraires.

Dans le cas général, les opérateurs impliqués sont de type *intégro-différentiel* (fractions rationnelles en $s$), *retard* ($\exp(-2sr/c)$) et du type de $\widehat{\alpha}$ et $\widehat{\beta}$. Le cas particulier $\widehat{a}(s) = \nu \to +\infty$ et $\widehat{b}(s) = 0$ conduit à des opérateurs sans retard puisque $\widehat{H_\infty}(r,s) = \frac{c}{sr} + 1$ et $\widehat{H_0}(r,s) = \frac{c}{sr} - 1$, et $\widehat{D_s}$ est donnée par

$$\widehat{D_s}(r,s) = \mathrm{diag}\left(\frac{s}{c} + \frac{1}{r} + \frac{\partial_r \widehat{\alpha}(r,s)}{\widehat{\alpha}(r,s)}\,,\, -\frac{s}{c} + \frac{1}{r} + \frac{\partial_r \widehat{\beta}(r,s)}{\widehat{\beta}(r,s)}\right). \quad (28)$$

**Ondes sphériques progressives découplées.** La matrice diagonale $\widehat{D_s} = \mathrm{diag}\big(s/c, -s/c\big)$ est obtenue pour $\widehat{\alpha}(r,s) = \widehat{\beta}(r,s) = 1/r$ de sorte que

$$\begin{aligned} \widehat{P_s}(r,s) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & \frac{1}{r} \\ \frac{1}{\rho c}\Big(\frac{c}{s} + r\Big) & \frac{1}{\rho c}\Big(\frac{c}{s} - r\Big) \end{bmatrix}, && (29) \\ \widehat{P_s}^{-1}(r,s) &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -\frac{c}{s} + r & \frac{\rho c}{r} \\ \frac{c}{s} + r & -\frac{\rho c}{r} \end{bmatrix}. && (30) \end{aligned}$$

Dans le domaine temporel, les ondes progressives sont

$$Y_s(r,t) = [\psi^+(t-r/c), \psi^-(t+r/c)]^t. \quad (31)$$

Le changement d'état défini par (29) est donné par

$$p(r,t) = \frac{1}{r}\psi^+(t-r/c) + \frac{1}{r}\psi^-(t+r/c) \quad (32)$$

$$r^2 v(r,t) = \frac{1}{\rho}\int_{-\infty}^{t} \big(\psi^+(\tau - r/c) + \psi^-(\tau + r/c)\big)\,\mathrm{d}\tau + \frac{r}{\rho c}\big(\psi^+(\tau - r/c) + \psi^-(\tau + r/c)\big) \quad (33)$$

et le changement inverse (30) par

$$\psi^+(t-\frac{r}{c}) = \frac{r\,p(r,\tau) - c\int_{-\infty}^{t} p(r,\tau)\mathrm{d}\tau + \rho c\, r\, v(r,t)}{2} \quad (34)$$

$$\psi^-(t+\frac{r}{c}) = \frac{r\,p(r,\tau) + c\int_{-\infty}^{t} p(r,\tau)\mathrm{d}\tau - \rho c\, r\, v(r,t)}{2} \quad (35)$$

Ces résultats retrouvent la définition standard des *ondes sphériques progressives découplées.*

# Equation des pavillons

## Recherche d'ondes découplées

Les ondes dans un guide axi-symétrique de rayon variable $R(\ell)$ avec des parois rigides idéales satisfont en première approximation l'équation des pavillons, dite aussi *de Webster*,

$$\partial_\ell^2 p(\ell,t) + \frac{2R'(\ell)}{R(\ell)}\partial_\ell p(\ell,t) - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 p(\ell,t) = 0, \quad (36)$$

où $\ell$ est l'*abscisse curvligne* qui mesure la longueur de la paroi. La validité de cette équation est conditionnée par une hypothèse de quasi-sphéricité des isobares près des parois [6, 7]. Ce modèle peut être remis sous la forme conservative $\partial_\ell X_w + M_w \partial_t X_w = 0$ avec

$$X_w(\ell,t) = [p(\ell,t)\,,\, R(\ell)^2 v(\ell,t)]^t \quad (37)$$

$$M_w(\ell) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\rho}{R(\ell)^2} \\ \frac{R(\ell)^2}{\rho c^2} & 0 \end{bmatrix}, \quad (38)$$

$$E'(t) = \pi\big(R(0)^2 p(0,t)v(0,t) - R(L)^2 p(L,t)v(L,t)\big) \quad (39)$$

Le cas d'un tube droit ($R(\ell) = R(0)$) redonne les équations obtenues pour les ondes planes ($\ell = x$). Celui d'un tube conique ($R(\ell) = \varepsilon\ell$) redonne les équations obtenues pour les ondes sphériques ($\ell = r$).

La recherche d'ondes découplées revient à écrire que $\widehat{D_w} = \widehat{P_w}^{-1}\left(\partial_\ell \widehat{P_w} + s\, M_w \widehat{P_w}\right)$ est diagonale. En mettant la matrice de passage $P_w$ sous la forme

$$\widehat{P_w} = \begin{bmatrix} \frac{\widehat{\alpha}}{R} & \frac{\widehat{\beta}}{R} \\ \frac{R\widehat{\alpha}}{\rho c}\widehat{\lambda} & \frac{R\widehat{\beta}}{\rho c}\widehat{\mu} \end{bmatrix}, \quad (40)$$

paramétrée par les fonctions de $(\ell, s)$, $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$, $\widehat{\lambda}$ et $\widehat{\mu}$, ce problème conduit à résoudre les équations

$$\frac{1}{\widehat{\lambda} - \widehat{\mu}}\frac{\widehat{\beta}}{\widehat{\alpha}}\left[(1-\widehat{\mu}^2)\frac{s}{c} + 2\frac{R'}{R}\widehat{\mu} + \partial_\ell\widehat{\mu}\right] = 0, \quad (41)$$

$$\frac{1}{\widehat{\mu} - \widehat{\lambda}}\frac{\widehat{\alpha}}{\widehat{\beta}}\left[(1-\widehat{\lambda}^2)\frac{s}{c} + 2\frac{R'}{R}\widehat{\lambda} + \partial_\ell\widehat{\lambda}\right] = 0, \quad (42)$$

qui sont symétriques si les rôles de $(\widehat{\alpha}, \widehat{\lambda})$ et de $(\widehat{\beta}, \widehat{\mu})$ sont échangés.

Ces équations (qui expriment que l'anti-diagonale de $\widehat{D_w}$ est nulle) n'ont pas de solutions explicites en général. Bien que de telles solutions existent cependant pour des profils $R(\ell)$ particuliers, cet aspect n'est pas approfondi ici. Dans ce qui suit, des *changements d'état* qui permettent de traiter le cas de profils arbitraires sont rappelés (extension des *ondes planes*) et proposés (extension des *ondes sphériques*).

## Changement d'état de type ondes planes

L'application du changement d'état (10) est utilisée communément pour l'équation des pavillons, *e.g.* [1]. L'état *onde plane* est $Y_p = P_p^{-1} X_p = P_p^{-1}\mathrm{diag}(1, 1/R^2) X_w$ de sorte que $X_w = P_{wp} Y_p$ avec $P_{wp}(\ell) = \mathrm{diag}(1, R(\ell)^2)\, P_p$. Le changement d'état conduit donc à la matrice $\widehat{D_{wp}} = \widehat{P_{wp}}^{-1}\left(\partial_\ell \widehat{P_{wp}} + s\, M_w \widehat{P_{wp}}\right)$ donnée par

$$D_{wp} = \frac{s}{c}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \frac{R'}{R}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (43)$$

où la première matrice, diagonale, fait apparaître le transport et la seconde est à l'origine d'un couplage. Ainsi, le système dans le domaine temporel s'écrit

$$\Big(\partial_\ell + \frac{1}{c}\partial_t\Big)p^+ = \frac{R'}{R}(p^- - p^+), \quad (44)$$

$$\Big(\partial_\ell - \frac{1}{c}\partial_t\Big)p^- = \frac{R'}{R}(p^+ - p^-). \quad (45)$$

Pour éviter les variations d'amplitudes pour de grandes variations de section, il est parfois préférable d'utiliser des ondes homogènes à $\psi$ (cf. (32)) obtenues pour $P_{wp}(\ell)/R(\ell)$ et gouvernées par

$$\Big(\partial_\ell + \frac{1}{c}\partial_t\Big)\psi^+ = \frac{R'}{R}\psi^-, \quad (46)$$

$$\Big(\partial_\ell - \frac{1}{c}\partial_t\Big)\psi^- = \frac{R'}{R}\psi^+. \quad (47)$$

Ces deux systèmes définissent bien des extensions des ondes planes progressives découplées: pour un tube droit ($R(\ell) = R(0)$) le découplage est retrouvé. En revanche, ils ne correspondent pas à une extension des ondes sphériques puisque pour un cône ($R(\ell) = \varepsilon\,\ell$), le couplage ne disparaît pas ($R'(\ell)/R(\ell) = 1/\ell \neq 0$).

## Extensions du changement d'état de type ondes sphériques

De nombreuses extensions d'ondes sphériques découplées sont possibles. En effet, dans le cas d'un cône décrit par $R(\ell) = \varepsilon\,\ell$, la coordonnée sphérique radiale $r$ correspond à la fois à $\ell$ et à $R/R'$. De telles substitutions de $r$ peuvent être utilisées pour étendre de plusieurs manières $\widehat{P_s}(r,s)$, $\widehat{X_s}(r,s)$ ou $\widehat{Y_s}(r,s)$ et en déduire des changements d'état distincts. Ainsi, le choix d'extension $\widehat{Y_s}(\ell,s) = \widehat{P_s}^{-1}(\ell,s)\widehat{X_s}(\ell,s) =$

$\widehat{P_s}^{-1}(\ell,s)\mathrm{diag}(1,\frac{\ell^2}{R(\ell)^2})\widehat{X_w}(\ell,s)$ conduit à définir $\widehat{P_{ws_1}} = \mathrm{diag}(1,\frac{R(\ell)^2}{\ell^2})\widehat{P_s}^{-1}(\ell,s)$ et aboutit à

$$D_{ws_1} = \frac{s}{c}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \left(\frac{R'}{R} - \frac{1}{\ell}\right)\begin{bmatrix} 1+\frac{c}{\ell s} & -\left(1-\frac{c}{\ell s}\right) \\ -\left(1+\frac{c}{\ell s}\right) & 1-\frac{c}{\ell s} \end{bmatrix}. \quad (48)$$

Les ondes correspondantes sont bien progressives. Elles sont découplées dans le cas des ondes sphériques mais pas celui des ondes planes puisque $\frac{R'}{R} - \frac{1}{\ell}$ est nul pour un tube conique et non nul pour un tube droit.

Une extension plus intéressante est obtenue à nouveau pour une définition d'ondes homogènes à $\psi$ et de somme $Rp$, avec la substitution $r = R(\ell)/R'(\ell)$. Cette subsitution a l'avantage d'étendre en tout point la signification de $r$ comme étant celle d'une *distance du point courant à l'apex du cône local tangent au tube*. Elle permet d'écrire, d'après (31)-(32), que $[1,1]\,\widehat{Y_s}(\frac{R(\ell)}{R'(\ell)},s) = \frac{R(\ell)}{R'(\ell)}p(\ell,s) = [1,1]\,\frac{1}{R'(\ell)})\widehat{Y_w}(\ell,s)$, que $\widehat{X_s}(\frac{R(\ell)}{R'(\ell)},s) = \mathrm{diag}\big(1,\frac{1}{R'(\ell)^2}\big)\widehat{X_w}(\ell,s)$ de sorte que $\widehat{P_{ws_2}}(\ell,s) = \mathrm{diag}\big(1,R'(\ell)^2\big)\widehat{P_s}\big(\frac{R(\ell)}{R'(\ell)},s\big)\frac{1}{R'(\ell)}$ aboutit à

$$\widehat{D_{ws_2}} = \frac{s}{c}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \frac{c}{2s}\frac{R''}{R}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (49)$$

Le système dans le domaine temporel s'écrit

$$\left(\partial_\ell + \frac{1}{c}\partial_t\right)\psi^+(\ell,t) = \frac{c\,R''(\ell)}{2\,R(\ell)}\int_{-\infty}^{t}\big(\psi^+(\ell,\tau)+\psi^-(\ell,\tau)\big)\mathrm{d}\tau, \quad (50)$$

$$\left(\partial_\ell - \frac{1}{c}\partial_t\right)\psi^-(\ell,t) = -\frac{c\,R''(\ell)}{2\,R(\ell)}\int_{-\infty}^{t}\big(\psi^+(\ell,\tau)+\psi^-(\ell,\tau)\big)\mathrm{d}\tau \quad (51)$$

Ces ondes étendent à la fois les *ondes planes et sphériques découplées*. Elles font intervenir la courbure $R''/R$.

# Pavillons avec pertes

La prise en compte de pertes visco-thermiques aux parois conduit à l'*équation de Webster-Lokshin* [6, 7]

$$\partial_\ell^2 p + \frac{2R'}{R}\partial_\ell p - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 p - \epsilon\partial_t^{\frac{3}{2}} p = 0, \quad (52)$$

où $\partial_t^{\frac{3}{2}}$ représente une dérivée fractionnaire d'ordre 3/2 et $\epsilon(\ell) \geq 0$ est le coefficient de pertes. L'existence et unicité de solutions fortes a été étudiée dans [8]. Les changements d'état de type *ondes planes et ondes sphériques étendues* définissent ici encore des *ondes progressives*. Cette propriété qui respecte le principe de causalité a permis de construire des simulations de (52) dans le domaine temporel. Une étude pour le changement d'état $P_{wp}/R$ peut être trouvée dans [6] et un travail approfondi pour $P_{ws_2}$ et détaillé dans [2] a permis d'aboutir à une application de résonateur de type cuivre fonctionnant en temps réel [3].

Pour le changement $P_{wp}/R$, (46)-(47) deviennent

$$\left(\partial_\ell + \frac{1}{c}\partial_t\right)\psi^+ = \frac{R'}{R}\psi^- - \frac{\epsilon}{\sqrt{c}}\partial_t^{\frac{1}{2}}\left(\psi^+ + \psi^-\right), \quad (53)$$

$$\left(\partial_\ell - \frac{1}{c}\partial_t\right)\psi^- = \frac{R'}{R}\psi^+ + \frac{\epsilon}{\sqrt{c}}\partial_t^{\frac{1}{2}}\left(\psi^+ + \psi^-\right). \quad (54)$$

De même pour $P_{ws_2}$, le terme $\frac{\epsilon}{\sqrt{c}}\partial_t^{\frac{1}{2}}\big(\psi^+ + \psi^-\big)$ est retranché au second membre de (50) et est ajouté à celui de (51).

Pour une courbure $\frac{R''(\ell)}{R(\ell)}$ et un coefficient de pertes $\epsilon(\ell)$ constants, le changement d'état $P_{ws_2}$ permet une résolution en *modules bi-portes symétriques* : les fonctions de transmission et de réflexion sont identiques pour les *ondes aller* et *retour*. En revanche, la stabilité de ces ondes sphériques étendues n'est assurée que pour des courbures positives ou nulles. Ceci empêche de traiter numériquement les courbures négatives. Au contraire, les ondes planes étendues assurent la stabilité numérique mais ne donnent pas lieu à des quadripôles symétriques ce qui alourdit les calculs et leur coût.

# Conclusion et perspectives

La diagonalisation de systèmes d'équations a permis d'exhiber des définitions d'ondes découplées et progressives. Certains opérateurs temporels linéaires impliqués dans les changements d'état ne sont pas intégro-différentiels de dimension finie. Une perspective de recherche est la détermination d'espaces de signaux pour lesquels de tels opérateurs sont bien définis. Une autre concerne la simulation de tels opérateurs: les ondes progressives découplées étant peu coûteuses à simuler, l'enjeu est de pouvoir les reconvertir en l'état original.

# References


[1] E. Ducasse. Modélisation et simulation dans le domaine temporel d'instruments à vent à anche simple en situation de jeu. Thèse ENSAM (2001)

[2] Th. Hélie et D. Matingnon. Diffusive representations for the analysis and simulation of flared acoustic pipes with visco-thermal losses. Math. Models and Methods in Applied Sciences **16** (2006), 503-536

[3] Th. Hélie, D. Matignon et R. Mignot. Criterion design for optimizing low-cost approximations of infinite dimensional systems: towards efficient real-time simulation. IFAC Control Appli. of Optim. (2006)

[4] A. D. Pierce. Acoustics: an introduction to its physical principles and applications. McGraw-Hill (1981)

[5] M. Abramowitz and I. Stegun. Handbook of mathematical functions. Dover (1970)

[6] Th. Hélie. Modélisation physique d'instruments de musique en systèmes dynamiques et inversion. Thèse, Université Paris-Sud (2002)

[7] Th. Hélie. Unidimensional models of acoustic propagation in axisymmetric waveguides. J. Acoust. Soc. Amer. **114** (2003), 2633-2647

[8] H. Haddar, Th. Hélie et D. Matignon. A Webster-Lokshin model for waves with viscothermal losses and impedance boundary conditions: strong solutions. Conf. Math. Num. Aspect of Wave Prpg. (2003) 66-71



**Note :** ce travail entre dans le cadre du projet GIP/ANR CONSONNES.