

# 10ème Congrès Français d'Acoustique

Lyon, 12-16 Avril 2010

## Représentation géométrique optimale de la perce de cuivres pour le calcul d'impédance d'entrée et de transmittance, et pour l'aide à la lutherie

Thomas Hélie, Thomas Hézard, Rémi Mignot

CNRS UMR 9912 - IRCAM, 1 place Igor Stravinsky, F-75004 Paris,

{thomas.helie,thomas.hezard,remi.mignot}@ircam.fr

Dans cet article, nous nous intéressons à représenter efficacement l'acoustique de tubes à symétrie axiale ayant une perce  $C^1$ , c'est-à-dire, continue et à dérivée continue. Pour ce faire, nous nous appuyons sur un modèle 1D proche de l'équation des pavillons mais plus raffiné (l'équation dite de "Webster-Lokshin" à abscisse curviligne) ainsi que des modèles simplifiés d'embouchure et de rayonnement à calotte sphérique pour les pavillons. Le modèle de propagation inclut l'effet des pertes visco-thermiques sous l'hypothèse des tubes acoustiques larges (impédance de paroi équivalente de Cremer). De plus, il repose sur des approximations sur la géométrie des isobares plus faibles (quasi-sphéricité au voisinage de la paroi) que les approximations usuelles (ondes planes ou sphériques). Une résolution exacte du modèle de propagation est possible lorsque ses coefficients ( $\Upsilon$  quantifiant l'évasement du profil et  $\varepsilon$  quantifiant les pertes) sont constants. Les profils géométriques admissibles définissent des tronçons. Le profil complet est réalisé par leur concaténation en imposant que leur jonction soit de régularité  $C^1$ . Si la longueur totale est fixée, un tel profil de  $N$  tronçons possède exactement  $2N + 1$  paramètres libres ( $N$  paramètres  $\Upsilon$ ,  $N - 1$  longueurs, et 2 coefficients libres). Un algorithme qui optimise ces paramètres pour tout profil donné a été construit. Il permet d'obtenir des descriptions fidèles d'une perce cible, préservant la régularité  $C^1$ , par un nombre réduit de tronçons (comparativement aux représentations en tubes droits ou coniques). Un formalisme classique en matrices de transfert permet de fournir l'impédance d'entrée et la transmittance de l'instrument. Ce travail est présenté de la façon suivante. Après quelques rappels historiques, nous présentons le modèle acoustique. Puis, nous introduisons une famille de profils paramétrés permettant la résolution exacte des matrices de transfert acoustiques. Nous construisons un algorithme pour estimer les paramètres correspondant à un profil cible. Enfin, nous testons cet algorithme et reconstruisons les impédances d'entrée. Nous comparons ces résultats à des mesures et à ceux obtenus par d'autres méthodes (concaténation de tubes droits, coniques, ou intégration numérique spatiale du modèle original).

## 1 Sur les équations des pavillons

### 1.1 Historique abrégé et contexte

**Modèle 1D et géométrie** Le premier modèle de tube acoustique à dépendance mono-spatiale fut établi par Lagrange [1] et Bernoulli [2]. Cette équation dite "de Webster" [3], abondamment étudiée [4], repose sur des hypothèses qui ont été périodiquement révisées.

Ainsi, pour assurer l'orthogonalité des fronts d'ondes à la paroi, Lambert [5] et Weibel [6] réfutent l'hypothèse initiale d'ondes planes et postulent leur sphéricité. La quasi-sphéricité est validée expérimentalement dans les pavillons aux basses fréquences par Benade et Janson [7]. Puis, Putland [8] montre qu'une propagation à dépendance mono-spatiale ne peut être gouvernée que par une équation de Webster, pour "une certaine coordonnée", et que les ondes planes, cylindriques ou sphériques seules peuvent respecter une telle propriété.

Malgré cette restriction, des raffinements de modèles 1D ont encore été recherchés car ils permettent des calculs d'impédance aisés et la plage fréquentielle non perturbée par les modes transverses reste intéressante pour bon nombre d'instruments à vent. Ainsi, [9] suppose des fronts d'ondes en ellipsoïdes. Dans [10], un modèle exact

est établi dans la carte des isobares, à partir duquel une équation de Webster est obtenue en supposant uniquement la quasi-sphéricité des isobares au voisinage de la paroi (hypothèse retenue dans cet article).

**Pertes visco-thermiques** Un autre raffinement est la modélisation des pertes visco-thermiques aux parois. Kirchhoff introduit l'effet de conduction thermique et étend la théorie de Stokes. Il fournit de premières solutions simples dans l'espace libre et dans un tube. Il donne la formule de dispersion générale exacte pour un cylindre lorsque le problème est à symétrie de révolution [11] (en l'absence de symétrie, une version exacte généralisée est établie dans [12, éq. (56)]).

Certaines simplifications sont aussi proposées. Ainsi, la théorie de Zwicker et Kosten (cf. e.g. [13, p210]) est établie en séparant les effets de couches limites visqueuses et thermiques dans les équations de départ. Les conditions de validité de cette théorie sont données dans [14, 15] qui exhibent un lien plus direct avec l'équation de dispersion de Kirchhoff. De plus, Cremer établit l'admittance équivalente d'un écran plan réfléchissant des ondes planes pour un angle d'incidence donné [16]. Ce résultat coïncide avec celui de Kirchhoff pour un guide à

section rectangulaire large (épaisseur des couches limites faibles devant les longueurs du rectangle).

Pour ces simplifications, les équations de propagation incluent un terme avec une dérivée temporelle fractionnaire (voir l'équation de Lokshin [17, 18] et aussi [19]). Des solutions exactes de l'équation de Lokshin ont été données par Matignon [20, 21] et mettent en lumière un effet de mémoire longue. La prise en compte de pertes dans l'équation des pavillons établie dans [10] fait apparaître un terme similaire.

**Contexte et approche** Le modèle considéré ici repose sur l'hypothèse de quasi-sphéricité des isobares au voisinage de parois à admittance de Cremer. Les étapes pour son établissement sont données ci-dessous.

## 1.2 Equation des ondes et isobares

Dans le système de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ , les isobares d'un problème à symétrie d'axe (Oz) ont des descriptions paramétriques (localement au moins) de la forme  $r = f(s, u, t)$ ,  $z = g(s, u, t)$  et  $\theta \in [0, 2\pi[$ , où  $s$  indexe une isobare,  $u$  est une coordonnée libre. Puisque le niveau de pression ne dépend spatialement que de  $s$ , la carte dynamique  $(f, g)$  satisfait l'équation implicite

$$\exists p \mid P(z = f(s, u, t), r = g(s, u, t), t) = p(s, t).$$

En exploitant cette équation et le changement de coordonnées  $(z, r, t) \rightarrow (s, u, t)$ , l'équation des ondes  $(\partial_z^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \partial_r^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2)P(z, r, t) = 0$  se réécrit exactement

$$\left(\alpha(s, u, t)\partial_s^2 + \beta(s, u, t)\partial_s + \gamma(s, u, t)\partial_s\partial_t + \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right)p(s, t) = 0, \quad (1)$$

où  $\alpha, \beta, \gamma$  sont des expressions (détaillées dans [22, 10]) de  $f, g$  et leurs dérivées jusqu'à l'ordre 2 en  $s, u, t$ .

En appliquant la dérivation  $\partial_u^k$  pour  $k = 1, 2, 3$  à cette dernière équation, on trouve que, pour tout  $s, u, t$ ,

$$\begin{pmatrix} \partial_u\alpha & \partial_u\beta & \partial_u\gamma \\ \partial_u^2\alpha & \partial_u^2\beta & \partial_u^2\gamma \\ \partial_u^3\alpha & \partial_u^3\beta & \partial_u^3\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_s^2 p \\ \partial_s p \\ \partial_s\partial_t p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La nullité du déterminant de la matrice  $3 \times 3$  fournit donc une condition nécessaire, purement géométrique, pour que la carte isobare corresponde à une propagation.

Dans le cas statique ( $\partial_t f = \partial_t g = 0$ ), une étude similaire montre que les seules cartes admissibles correspondent aux cas connus : ondes planes, cylindriques, sphériques, cartes modales associées à un nombre d'onde  $k_0$  réel (oscillation infinie) ou bien imaginaire pur (onde exponentielle non oscillante). Dans le cas modal, on déduit de l'équation isobare l'invariant géométrique

$$\partial_s \ln \left( g^2 \frac{(\partial_s f)^2 + (\partial_s g)^2}{(\partial_u f)^2 + (\partial_u g)^2} \right) + 2 \left( (\partial_s f)^2 + (\partial_s g)^2 \right) s k_0^2 = 0,$$

si on choisit l'index  $s$  égal au niveau de la déformée modale (voir [10] pour plus de détails). Ainsi, aucune carte statique ne peut porter une propagation 1D non modale si le tube n'est ni droit, ni conique.

## 1.3 Approximation 1D pour paroi idéale

Une paroi idéalement immobile et rigide appartient aux lignes de champ de pression (cf. [22, p33] pour les cas dégénérés). En choisissant  $u$  orthogonale à  $s$ , il existe donc  $(f, g)$  et  $w$  tels que  $f(s, u = w, t) = F(s)$ ,  $g(s, u = w, t) = R(s)$  où  $F, R$  est une paramétrisation de la paroi. En évaluant (1) en  $u = w$ , on trouve les coefficients exacts  $\alpha(s, w, t) = 1/(F'(s)^2 + R'(s)^2)$ ,  $\beta(s, w, t) = 0$  et

$$\frac{\gamma(s, w, t)}{\alpha(s, w, t)} = \frac{d}{ds} \left( \ln \left| \frac{R(s)}{F'(s)} \right| \right) + \partial_s \ln |\partial_u g(s, u = w, t)|. \quad (2)$$

La seule information géométrique manquante pour obtenir un modèle 1D via (1) est donc le second terme de (2) qui met en jeu une dérivée d'ordre 1 en  $u$  (variation de la ligne de champ lorsqu'on s'éloigne de la paroi).

Pour assurer la compatibilité avec des isobares (i) planes dans les tubes droits, (ii) sphériques dans les cônes, (iii) orthogonales à la paroi, (iv) quasi-sphériques dans les pavillons [7], (v) sans les supposer figées, on retient l'hypothèse suivante : à la paroi, une isobare s'éloigne lentement de son approximation sphérique tangente. Plus précisément, en notant  $\zeta(s, u, t)$  l'écart relatif (cf. [22]), on a  $\partial_u^k \zeta(s, u = w, t) = 0$  pour  $k = 0$  (contact) et  $k = 1$  (tangence). En supposant la validité pour  $k = 2$  (éloignement plus lent qu'une parabole), on obtient que  $\frac{\gamma(s, w, t)}{\alpha(s, w, t)} = 2 \frac{R'(s)}{R(s)}$ . Ceci conduit à l'équation de Webster

$$\left( \partial_\ell^2 + 2 \frac{R'(\ell)}{R(\ell)} \partial_\ell - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right) p(\ell, t) = 0, \quad (3)$$

si  $s = \ell$  est l'abscisse curviligne mesurant la longueur sur la paroi ( $\alpha(s, u = w, t) = 1$ ).

## 1.4 Paroi à admittance de Cremer

En présence de pertes visco-thermiques, l'orthogonalité des isobares à la paroi n'est plus valide. Si les couches limites sont d'épaisseur faible devant  $R(\ell)$  et le rayon de courbure de ce profil, cette perturbation peut être estimée en approchant l'action de la paroi par son admittance de Cremer [16]. L'hypothèse de coïncidence locale à l'ordre 2 de l'isobare et sa sphère tangente conduit à une version perturbée de (3) donnée par [22, 10]

$$\left( \partial_\ell^2 + 2 \frac{R'(\ell)}{R(\ell)} \partial_\ell - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \frac{2\varepsilon(\ell)}{c^{\frac{3}{2}}} \partial_t^{\frac{3}{2}} \right) p(\ell, t) = 0, \quad (4)$$

où  $\partial_t^{\frac{3}{2}}$  est une dérivée fractionnaire [20] et  $\varepsilon(\ell) = \kappa_0 \frac{\sqrt{1-R'(\ell)^2}}{R(\ell)}$  quantifie les effets visco-thermiques ( $\kappa_0 = \sqrt{l_v} + (\gamma - 1)\sqrt{l_h} \approx 3 \times 10^{-4} \text{ m}^{1/2}$  dans l'air). Cette équation est dite de Webster (cas  $\varepsilon = 0$ )-Lokshin (cas  $R' = 0$ ).

## 1.5 Modèle complet, propriétés, validité

On considère ici la propagation dans l'espace des isobares redressées, sous l'hypothèse de leur quasi-sphéricité à la paroi, avec pertes, modélisée par

$$\left( \partial_\ell^2 - \left[ \frac{1}{c^2} \partial_t^2 + \frac{2\varepsilon(\ell)}{c^{\frac{3}{2}}} \partial_t^{\frac{3}{2}} + \Upsilon(\ell) \right] \right) [R(\ell) p(\ell, t)] = 0 \quad (5)$$

$$\rho \partial_t v(\ell, t) + \partial_\ell p(\ell, t) = 0 \quad (6)$$

où  $\Upsilon = R''/R$ . Si  $R$  est deux fois dérivable, (5) équivaut à (4). Hors de la couche limite, la vitesse particulière est colinéaire au gradient de pression : elle satisfait l'équation d'Euler dont on tire (6) après projection.

### Propriétés du changement de coordonnée $z \rightarrow \ell$

Pour une description de perce  $z \mapsto r(z)$ , la longueur de la paroi mesurée depuis  $z = 0$  est  $L(z) = \int_0^z \sqrt{1 + r'(z)^2} dz$  dont on tire  $R(\ell) = r(L^{-1}(\ell))$ . En dérivant l'expression  $R(L(z)) = r(z)$ , on trouve que  $R'(L(z)) = r'(z)/\sqrt{1 + r'(z)^2}$ . On a donc les propriétés suivantes, inhabituelles pour (3-6) : (i)  $|R'(\ell)| \leq 1$ ; (ii)  $R'(\ell) = 1$  correspond à une pente verticale. Notons qu'un tube droit reconduit bien aux équations gouvernant les ondes planes ( $R'/R = 0$ ,  $\ell = z$ ), et un cône reconduit aux ondes sphériques ( $2R'/R = 2/\ell$ ). Si une perce finit par une pente verticale, le modèle opère un recollage naturel avec une solution en ondes sphériques.

**Validité** Le modèle sans perte (3) est exact si  $\Upsilon = 0$ . Il fournit une approximation intéressante si  $|\Upsilon|$  est suffisamment faible ou si les fréquences sont suffisamment basses (voir [23] pour une analyse précise). L'hypothèse 1D est conditionnée par l'absence de modes transverses, qu'on caractérise par

$$f < K^+ (R_{max})^{-1} \text{ avec } K^+ = \frac{1.84c}{2\pi} \approx 631.8 \text{ m.s}^{-1}.$$

Le modèle des pertes suppose que l'épaisseur des couches limites est faible devant le rayon  $R$  et le rayon de courbure  $R_c$  donné par  $\frac{(1+R'(z)^2)^{\frac{3}{2}}}{R''(z)}$  si  $s = z$  et par  $\frac{\sqrt{1-R'(\ell)^2}}{R''(\ell)}$  si  $s = \ell$ . La condition la plus contraignante vient de la couche visqueuse. Elle se traduit par (cf. e.g. [13, p212])

$$f > K^- (R_{min})^{-2} \text{ avec } K^- = \frac{\mu}{2\pi\rho} \approx 2.39 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}.$$

## 2 Solutions exactes pour des géométries paramétrées

### 2.1 Propagation à coefficients constants

**Profils admissibles et régularité** Dans le domaine de Laplace (variable  $s$ ) et pour des conditions initiales nulles, les équations (5-6) se réécrivent

$$\left[ \left( \left( \frac{s}{c} \right)^2 + 2\varepsilon(\ell) \left( \frac{s}{c} \right)^{\frac{3}{2}} + \Upsilon(\ell) \right) - \partial_\ell^2 \right] \left\{ R(\ell) P(\ell, s) \right\} = 0, \quad (7)$$

$$\rho s \frac{U(\ell, s)}{S(\ell)} + \partial_\ell P(\ell, s) = 0, \quad (8)$$

où  $U(\ell, s) = S(\ell) V(\ell)$  avec  $S(\ell) = \pi R(\ell)^2$ . Ces équations se résolvent analytiquement si  $\varepsilon$  et  $\Upsilon$  sont constants.

Puisque  $R''(\ell) - \Upsilon(\ell)R(\ell) = 0$ , les profils à  $\Upsilon$  constant sont de la forme (avec  $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ )

$$R(\ell) = A \cos(\sqrt{-\Upsilon}\ell) + B \sin(\sqrt{-\Upsilon}\ell), \quad \text{si } \Upsilon < 0,$$

$$R(\ell) = A + B\ell, \quad \text{si } \Upsilon = 0,$$

$$R(\ell) = A \cosh(\sqrt{\Upsilon}\ell) + B \sinh(\sqrt{\Upsilon}\ell), \quad \text{si } \Upsilon > 0.$$

Ces familles peuvent être décrites par la forme unifiée

$$R(\ell) = A C_\Upsilon(\ell) + B S_\Upsilon(\ell), \quad (9)$$

1. Remarque : on vérifie que  $\varepsilon(\ell) = \kappa_0 R_c(\ell)\Upsilon(\ell)$  (si  $\Upsilon \neq 0$ ).

où  $(\Upsilon, \ell) \mapsto C_\Upsilon(\ell) = \phi_1(\Upsilon \ell^2)$  et  $(\Upsilon, \ell) \mapsto S_\Upsilon(\ell) = \ell \phi_2(\Upsilon \ell^2)$  sont des fonctions infiniment dérivables, construites à partir des fonctions analytiques sur  $\mathbb{C}$

$$\phi_1 : z \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{(2k)!} \quad \left( = \cosh \sqrt{z} \right),$$

$$\phi_2 : z \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{(2k+1)!} \quad \left( = \frac{\sinh \sqrt{z}}{\sqrt{z}} \text{ pour } z \neq 0 \right).$$

Excepté le cas où  $R$  est constant, cette famille de profils ne conduit pas à une fonction  $\varepsilon$  constante. Aussi, pour un intervalle  $[0, L]$  suffisamment court, on approche  $\varepsilon$  par sa valeur moyenne  $\varepsilon(\ell) \approx \frac{1}{L} \int_0^L \varepsilon(\ell) d\ell$ . Ceci définit un tronçon dont le profil géométrique est décrit par les 4 paramètres  $\{A, B, \Upsilon, L\}$  et dans lequel la propagation est caractérisée par les constantes  $\Upsilon$ ,  $\varepsilon$  et  $c$ .

### Matrice de transfert acoustique d'un tronçon

En notant  $X_\ell(s) = [P(\ell, s), U(\ell, s)]^T$ , une résolution analytique de (7-8) avec  $\Upsilon$  et  $\varepsilon$  constants sur  $[a, b]$  conduit à

$$X_b(s) = \mathbf{T}_{b,a}(s) X_a(s),$$

où  $\mathbf{T}_{b,a}(s) = \text{diag}\left(\frac{R(a)}{R(b)}, \frac{R(b)}{R(a)}\right) \mathbf{M}_{b,a}(s)$  est une matrice de déterminant 1 et, en notant  $\Delta(z) = [\cosh z, (\sinh z)/z]^T$ ,

$$[\mathbf{M}_{b,a}(s)]_{11} = [1, \sigma_a] \Delta(L\Gamma(s)),$$

$$[\mathbf{M}_{b,a}(s)]_{12} = \rho L s [0, -1] \Delta(L\Gamma(s)),$$

$$[\mathbf{M}_{b,a}(s)]_{21} = [\sigma_b - \sigma_a, \sigma_a \sigma_b - (L\Gamma(s))^2] \Delta(L\Gamma(s)),$$

$$[\mathbf{M}_{b,a}(s)]_{22} = [1, -\sigma_b] \Delta(L\Gamma(s)),$$

où  $\Gamma(s)$  est une racine carrée de  $\left(\frac{s}{c}\right)^2 + 2\varepsilon\left(\frac{s}{c}\right)^{\frac{3}{2}} + \Upsilon$ ,  $\sigma_\ell = \frac{R'(\ell)}{R(\ell)/L}$  définit une pente normalisée avec  $L = b - a$ .

### 2.2 Jonctions de tronçons à régularité $\mathcal{C}^1$

#### Concaténation de tronçons et contraintes de régularité

Nous considérons la jonction à régularité  $\mathcal{C}^1$  de  $N$  tronçons de longueurs  $L_n$  (paramètres laissés libres). Le profil complet décrit par les  $4N$  paramètres  $\{A_n, B_n, \Upsilon_n, L_n\}_{n \in [1, N]}$  est donné par

$$R(\ell) = \sum_{n=1}^N R_n(\ell) \mathbf{1}_{[\ell_{n-1}, \ell_n]}(\ell), \quad \forall \ell \in [\ell_0, \ell_N] \quad (10)$$

avec  $R_n(\ell) = A_n C_{\Upsilon_n}(\ell) + B_n S_{\Upsilon_n}(\ell)$  et  $\{\ell_n = \sum_{k=1}^n L_k\}_{0 \leq n \leq N}$  où  $\ell_1, \dots, \ell_{N-1}$  sont les abscisses des points de raccordement entre tronçons.

La condition de régularité  $\mathcal{C}^1$  aux jonctions s'exprime par les  $2(N-1)$  contraintes d'égalité suivantes :

$$\forall n \in [1, N-1], \quad \begin{cases} R_n(\ell_n) = R_{n+1}(\ell_n), \\ R'_n(\ell_n) = R'_{n+1}(\ell_n). \end{cases} \quad (11)$$

On remarque que  $R$  est linéaire en les paramètres  $A_n$  et  $B_n$ . L'ensemble de ces équations forme donc un système linéaire (de dimension  $2(N-1)$ ) en les  $(2N)$  paramètres  $\{A_n, B_n\}_{1 \leq n \leq N}$ . En faisant le choix de représenter les deux degrés de liberté par  $\{A_1, B_1\}$ , la résolution analytique du système conduit à des solutions de la forme  $[A_n, B_n]^T = \mathbf{Q}_n [A_1, B_1]^T$  pour  $2 \leq n \leq N$  (cf. [24]).

Le nombre de degrés de liberté d'un tel profil à  $N$  tronçons vaut donc  $4N - 2(N - 1) = 2N + 2$ . Avec les choix faits ci-dessus, les paramètres libres sont  $A_1$ ,  $B_1$  et  $\{\Upsilon_n, L_n\}_{1 \leq n \leq N}$ .

**Matrice de transfert globale** Du point de vue acoustique, le raccord de deux tronçons est réalisé en écrivant la continuité de l'état acoustique  $X_\ell$  à la jonction. Cette continuité fait sens au moins dès que<sup>2</sup> le raccord est à régularité  $\mathcal{C}^1$ . En itérant ce procédé pour raccorder successivement les tronçons, on trouve que  $X_{\ell_N}(s) = \mathbf{T}_{\ell_N, \ell_0}(s) X_{\ell_0}(s)$  avec

$$\mathbf{T}_{\ell_N, \ell_0} = \mathbf{T}_{\ell_N, \ell_{N-1}} \mathbf{T}_{\ell_{N-1}, \ell_{N-2}} \cdots \mathbf{T}_{\ell_1, \ell_0}. \quad (12)$$

On retrouve le formalisme standard en produits de matrices de transfert comme dans le cas du raccordement de tubes droits sous l'hypothèse d'ondes planes (cf. e.g. [13, p.293]).

### 3 Estimation de la géométrie

On s'intéresse ici à un profil de régularité  $\mathcal{C}^1$ , de longueur  $L$ , pour lequel  $\Upsilon$  n'est pas constant a priori.

#### 3.1 Cible et objectif

En pratique, une perce est généralement décrite par un relevé de  $M + 1$  points, de la forme  $(z_m, \mathcal{T}(z_m))$  ou  $(\ell_m, \underline{R}(\ell_m))$ . Souvent, le maillage spatial n'est pas régulier : le fabricant ou le luthier ajustent la finesse du pas du relevé pour que son interpolation affine par morceaux fournisse une description suffisamment fidèle pour reproduire la perce. Pour ce choix d'interpolation, les conversions exactes  $z \leftrightarrow \ell$  sont immédiates et préservent le type d'interpolation. Mais, la régularité  $\mathcal{C}^1$  est perdue.

On considère ici qu'on dispose d'une telle interpolation  $\ell \mapsto \underline{R}(\ell)$ , affine par morceaux, continue, construite à partir d'un relevé de points d'un profil cible à régularité initialement  $\mathcal{C}^1$ . L'objectif est de représenter le profil original par le modèle (10-11) avec un nombre  $N$  de tronçons significativement inférieur à  $M$ , visant à

1. régénérer une version  $\mathcal{C}^1$  du profil,
2. disposer d'une description du profil fiable et à peu de paramètres,
3. profiter du formalisme (12) avec la précision offerte par le modèle de Webster-Lokshin,
4. disposer d'une description analytique à peu de paramètres de l'acoustique du résonateur.

#### 3.2 Distance et paramètres libres

A la différence des splines dont les paramètres sont contrôlés par les points de jonctions (de "tronçons polynomiaux"), on souhaite rendre, globalement sur  $\ell \in [0, L]$ , la cible interpolée  $\underline{R}$  et le modèle  $R$  aussi proches que possible. On choisit de mesurer cette proximité sur  $[0, L]$  par la déviation quadratique moyenne standard

$$d_L(\underline{R}, R) = \frac{1}{L} \int_0^L (\underline{R}(\ell) - R(\ell))^2 d\ell.$$

2. Voir [22, p.66] pour une discussion de la compatibilité de cette hypothèse avec celle de quasi-sphéricité des isobares.

Puisque  $\underline{R}$  est affine par morceaux et  $R$  de la forme (9) par morceaux, cette intégrale s'exprime analytiquement en fonction de  $(\ell_m, \underline{R}(\ell_m))_{0 \leq m \leq M}$  et des paramètres du modèle  $R$  à  $N$  tronçons (10-11). Cette expression est utilisée pour éviter le calcul numérique de l'intégrale et accélérer significativement l'algorithme d'optimisation.

Parmi les  $2N+2$  paramètres libres du modèle  $R$ , une partie peut être réservée pour minimiser  $d_L(\underline{R}, R)$  et une autre pour résoudre de nouvelles contraintes telles que

$$\mathbf{1} \text{ préservation de la longueur totale : } \sum_{n=1}^N L_n = L.$$

$\mathbf{k}$  ( $0 \leq k \leq 4$ ) conditions aux extrémités de la forme  $F(\ell_c) = \underline{F}(\ell_c)$  avec  $F = R$  ou  $R'$  et  $\ell_c = 0$  ou  $L$ .

Le nombre de degrés de liberté de  $R$  devient  $2N+1-k$ .

Une manière simple de contraindre la longueur totale est de remplacer  $L_N$  par  $L - \sum_{n=1}^{N-1} L_n$  dans  $R$ . Une manière simple d'imposer deux conditions aux extrémités ( $k=2$ ) est de résoudre le problème linéaire associé, en les paramètres  $\{A_1, B_1\}$ . Dans ce cas, les  $2N-1$  paramètres libres restants sont donnés par le vecteur

$$\theta = [\Upsilon_1, \dots, \Upsilon_N, L_1, \dots, L_{N-1}]^T,$$

dont dépend le profil modèle qu'on note alors  $R_\theta$  et le critère associé à minimiser est donné par

$$\mathcal{C}_L(\theta) = d_L(\underline{R}, R_\theta).$$

Dans la suite, nous considérons ce cas avec les contraintes d'égalité  $\underline{R}(0) = R(0)$  et  $\underline{R}'(0) = R'(0)$ .

#### 3.3 Algorithme

La minimisation de  $\mathcal{C}_L$  est un problème non linéaire et non convexe. Pour obtenir une solution satisfaisante à partir d'algorithmes d'optimisation numérique standard<sup>3</sup>, nous adoptons la solution pragmatique suivante.

##### Initialisation :

- Initialiser  $\theta$  par  $\Upsilon_1 = \dots = \Upsilon_N = 0$  et  $L_1 = \dots = L_N = L/N$  de sorte que  $\ell_n = nL/N$  (ou valeurs données par l'utilisateur, cf. perspectives),
- Minimiser  $\mathcal{C}_{\ell_1}(\theta)$  en  $\Upsilon_1$ ; mettre à jour  $\theta$  ( $[\theta]_1 \leftarrow \Upsilon_1^*$ ).

**Itérations pour n allant de 2 à N :** Minimisation de  $\mathcal{C}_{\ell_n}(\theta)$  selon

1. la variable  $\Upsilon_n$  (*mise à jour de  $\theta$* ),
2. puis, les variables  $\Upsilon_1, \dots, \Upsilon_n$  (*idem*),
3. puis, les variables  $\Upsilon_1, \dots, \Upsilon_n, L_1, \dots, L_{n-1}$  avec  $L_n = \ell_n - \sum_{k=1}^{n-1} L_k$  (*idem*).

En pratique, ces étapes conduisent à une solution proche de l'optimum global. Si l'on souhaite avoir des contraintes à droite ( $\underline{F}(L) = F(L)$ ), on ajoute une dernière étape. Le modèle n'étant linéaire en aucun des paramètres  $[\theta]_k$ , la résolution du lagrangien associé serait délicate. On pénalise le critère en ajoutant des termes du type  $\epsilon(\underline{F}(L) - F(L))^2$ . On fait croître  $\epsilon > 0$  jusqu'à ce que l'erreur commise sur la contrainte soit plus faible qu'un seuil fixé.

3. Ici, nous avons utilisé les fonctions (sous Matlab) `fminbnd` pour les optimisations selon une variable et `fminsearch` pour les optimisations selon plusieurs variables.

## 4 Applications et comparaisons

Nous considérons les trois profils cibles suivants :  $R_1(\ell) = 0.3\ell^3 - 0.45\ell^2 + 0.194\ell + 0.0075$ ,  $R_2(\ell) = 0.0025 + \ell^4$  polynômes à partir desquels les descriptions  $\underline{R}_1$  et  $\underline{R}_2$  affines par morceaux sont générées (pas de 1 mm) et la description  $\underline{R}_3$  d'un trombone à partir d'un relevé de perce<sup>4</sup>. Ces profils tracés en figure 1 satisfont  $|\underline{R}'_k| < 1$ .

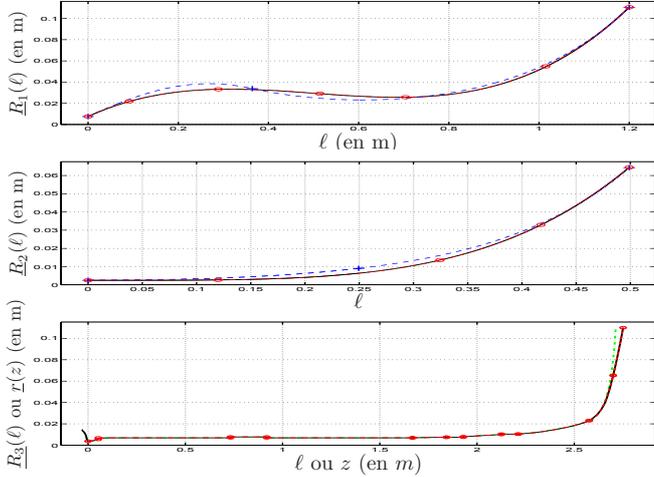


FIGURE 1 – Profils de test  $\underline{R}_k$  (-). Pour  $\underline{R}_1$  et  $\underline{R}_2$  : exemples d'approximation optimale avec 2 et 4 tronçons (- - + et - - o). Perce originale  $r_3(z)$  (- · - ·),  $\underline{R}_3(\ell)$  (-) et approximation avec 11 tronçons (- - o).

**Profil  $\underline{R}_1$**  Sur la figure 1, on peut observer les résultats de l'algorithme (avec les 4 contraintes aux extrémités) pour  $N=2$  et  $N=4$  tronçons (les jonctions sont localisés par les marqueurs + ou o).

Pour illustrer les performances de l'algorithme, la figure 2 présente les erreurs normalisées moyennes (-o)  $E_2^{moy} = \sqrt{d_L(\underline{R}_1, R_1)} / \|\underline{R}_1\|_2$  et maximales (-·-o)  $E_2^{max} = \max_{\ell \in [0, L]} |\underline{R}_1(\ell) - R(\ell)| / \|\underline{R}_1\|_2$  pour  $N \in \{3, 4, 5, 6\}$ , avec contrainte sur  $R(\ell)$  et  $R'(\ell)$ .

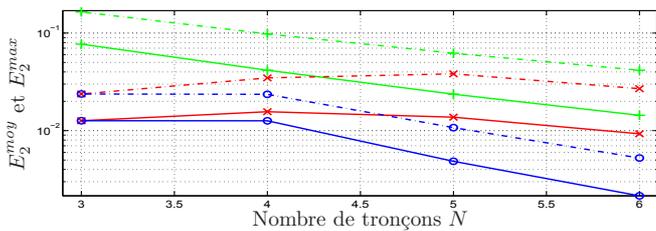


FIGURE 2 – Profil  $\underline{R}_1$  : erreurs  $E_2^{moy}$  et  $E_2^{max}$ .

Pour illustrer l'intérêt des étapes, on représente les erreurs  $E_2^{moy}$  (-) et  $E_2^{max}$  (-·-) pour plusieurs versions de l'algorithme. Si l'étape 3 est retirée (variante 1, courbes +), les erreurs sont très supérieures. Ceci confirme l'intérêt d'optimiser les longueurs  $L_n$ . Si l'étape 3 n'est réalisée qu'à la dernière itération  $n=N$  (variante 2, x), on améliore les résultats de la variante 1 mais sans retrouver la qualité originale : l'optimiseur numérique atteint un minimum local moins bon.

Un travail sur l'initialisation pourrait améliorer tous ces résultats et permettre de retrouver la même qualité

avec la variante 2 (qui réduit considérablement le temps de calcul de l'optimisation).

**Profil  $\underline{R}_2$**  Ce profil évasé a été approché par 128 tubes droits ( $\underline{R}_2^a$ ,  $L_n = L/128$ ), 64 cônes ( $\underline{R}_2^b$ ,  $L_n = L/64$ ), 2 et 4 tronçons ( $\underline{R}_2^c$  et  $\underline{R}_2^d$ ) aux paramètres optimisés (figure 1). Après calcul des matrices de transfert globales et concaténation en  $\ell=L$  avec l'impédance bouchon idéalement nulle, on trouve les impédances d'entrée données en figure 3. Ces impédances sont à comparer à la référence obtenue par résolution numérique<sup>5</sup> de (7-8). On observe que deux tronçons

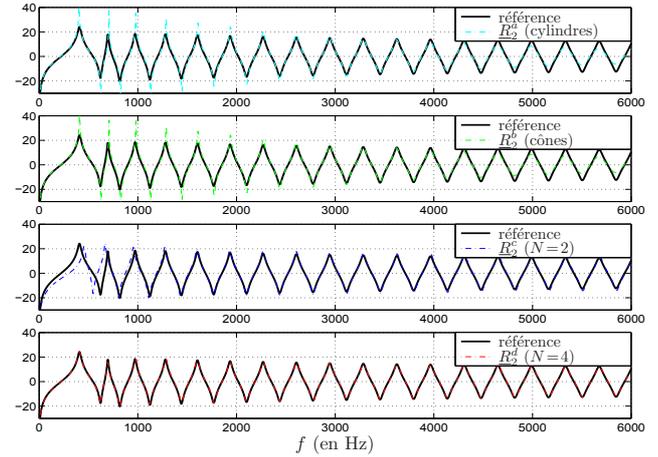


FIGURE 3 – Module (en dB) des impédances d'entrée calculées pour les profils  $\underline{R}_2^a$  (-·-·),  $\underline{R}_2^b$  (-·-·),  $\underline{R}_2^c$  (-·-·) et  $\underline{R}_2^d$  (-·-·), comparées à la référence (-).

sont insuffisants pour obtenir des résultats fiables mais que 4 tronçons (soit 16 paramètres géométriques  $\{A_n, B_n, \Upsilon, L_n\}_{1 \leq n \leq 4}$ ) donnent des résultats déjà satisfaisants tant géométriquement que pour l'impédance.

**Profil  $\underline{R}_3$**  L'impédance d'entrée d'un trombone avec une embouchure a été mesurée (figure 4). Cette

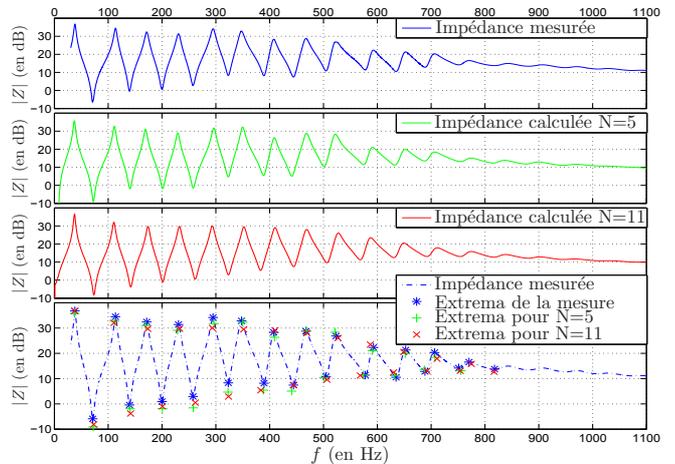


FIGURE 4 – Impédance d'entrée mesurée sur un trombone et versions calculées pour  $N=5$ ,  $N=11$  et comparaisons (voir [25] pour plus de détails).

impédance a été calculée à partir du formalisme (12) en considérant la matrice de transfert d'une embouchure

4. Nous remercions R. Caussé de nous avoir fourni ces données.

5. La fonction utilisée est ode23 sous Matlab.

simplifiée (masse, compliance et résistance acoustique, cf. [26]) et l'impédance de rayonnement d'une sphère dont la partie inscrite dans le cône tangent au profil en  $\ell=L$  est pulsante [27, Modèle (M2)].

## 5 Conclusion et perspectives

Le calcul de matrices de transfert par concaténation de tronçons de tubes à  $R''/R$  constant a été rappelé pour le modèle de propagation dit de “Webster-Lokshin” à abscisse curviligne. Un algorithme qui détermine les paramètres géométriques des tronçons optimisés pour approcher une cible à régularité  $C^1$  a été proposé. Grâce à cet algorithme, le modèle géométrique génère des représentations satisfaisantes de cibles avec peu de paramètres. De plus, lorsque la cible est bien approchée, les impédances acoustiques calculées sont fiables de sorte que l'outil complet pourrait s'intégrer à terme dans une plateforme d'aide à la lutherie (en particulier pour les pavillons). Enfin, ces représentations permettent aussi de construire des simulations temps réel (de type guide d'ondes) pour la synthèse sonore [25].

Parmi les perspectives, des discontinuités de profils, la présence de trous, clapets (etc), entre chaque zone  $C^1$  optimisée pourrait être intégrées en définissant des raccords à volume nul et en introduisant des masses ajoutées suivant le principe donné par exemple dans [13, p.302-332]. Par ailleurs, un travail sur les paramètres d'initialisation de l'algorithme proposé en 3.3 pourrait permettre d'accélérer l'optimisation sans dégrader les résultats, en n'exécutant l'étape 3 qu'à la dernière itération. Enfin, la représentation à peu de paramètres d'une perce devrait permettre d'envisager une optimisation sur des impédances (ou immitance) cibles ou d'autres critères acoustiques, et plus seulement sur un critère géométrique.

## Remerciements

Les auteurs remercient J. Kergomard et D. Matignon pour les renseignements bibliographiques et P.-D. Dekoninck pour les travaux initiaux sur l'estimation de profils géométriques. Ce travail fait partie du projet ANR Consonnes.

## Références

- [1] J. L. Lagrange. Nouvelles recherches sur la nature et la propagation du son. Misc. Taurinensia (Mélanges Phil. Math., Soc. Roy. Turin), 1760-1761.
- [2] D. Bernoulli. Sur le son et sur les tons des tuyaux d'orgues différemment construits. Mém. Acad. Sci. (Paris), 1764.
- [3] A. G. Webster. Acoustical impedance, and the theory of horns and of the phonograph. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.*, 5 :275–282, 1919. Errata, *ibid.* **6**, p.320 (1920).
- [4] E. Eisner. Complete solutions of the Webster horn equation. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 41(4) :1126–1146, 1967.
- [5] R. F. Lambert. Acoustical studies of the tractrix horn. I. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 26(6) :1024–1028, 1954.
- [6] E. S. Weibel. On Webster's horn equation. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 27(4) :726–727, 1955.
- [7] A. H. Benade and E. V. Jansson. On plane and spherical waves in horns with nonuniform flare. I. Theory of radiation, resonance frequencies, and mode conversion. *Acustica*, 31 :79–98, 1974.
- [8] G. R. Putland. Every one-parameter acoustic field obeys Webster's horn equation. *J. Audio Eng. Soc.*, 6 :435–451, 1993.
- [9] J. Agulló, A. Barjau, and D. H. Keefe. Acoustic propagation in flaring, axisymmetric horns : I. A new family of unidimensional solutions. *Acustica*, 85 :278–284, 1999.
- [10] Thomas Hélie. Mono-dimensional models of the acoustic propagation in axisymmetric waveguides. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 114 :2633–2647, 2003.
- [11] G. Kirchhoff. Ueber die einfluss der wärmeleitung in einem gase auf die schallbewegung. *Annalen der Physik Leipzig*, 134, 1868. (English version : R. B. Lindsay, ed., PhysicalAcoustics, Dowden, Hutchinson and Ross, Stroudsburg, 1974).
- [12] M. Bruneau, P. Herzog, J. Kergomard, and J.-D. Polack. General formulation of the dispersion equation bounded visco-thermal fluid, and application to some simple geometries. *Wave motion*, 11 :441–451, 1989.
- [13] A. Chaigne and J. Kergomard. *Acoustique des instruments de musique*. Belin, 2008.
- [14] J. Kergomard. *Champ interne et champ externe des instruments à vent*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, 1981.
- [15] J. Kergomard. Comments on wall effects on sound propagation in tubes. *J. Sound Vibr.*, 98(1) :149–153, 1985.
- [16] L. Cremer. On the acoustic boundary layer outside a rigid wall. *Arch. Elektr. Uebertr.* **2**, 235, 1948.
- [17] A. A. Lokshin. Wave equation with singular retarded time. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 240 :43–46, 1978. (russe).
- [18] A. A. Lokshin and V. E. Rok. Fundamental solutions of the wave equation with retarded time. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 239 :1305–1308, 1978. (russe).
- [19] J.-D. Polack. Time domain solution of Kirchhoff's equation for sound propagation in viscothermal gases : a diffusion process. *J. Acoustique*, 4 :47–67, 1991.
- [20] D. Matignon. *Représentations en variables d'état de modèles de guides d'ondes avec dérivation fractionnaire*. PhD thesis, Université de Paris XI Orsay, 1994.
- [21] D. Matignon and B. d'Andréa Novel. Spectral and time-domain consequences of an integro-differential perturbation of the wave PDE. In *Int. Conf. on mathematical and numerical aspects of wave propagation phenomena*, volume 3, pages 769–771. INRIA-SIAM, 1995.
- [22] Thomas Hélie. *Modélisation physique d'instruments de musique en systèmes dynamiques et inversion*. Thèse de doctorat, Université de Paris XI - Orsay, Paris, 2002.
- [23] S. Rienstra. Webster's horn equation revisited. *SIAM J. Appl. Math.*, 65(6) :1981–2004, 2005.
- [24] Thomas Hézard. *Construction de famille d'instruments à vent virtuels*. Projet de fin d'études d'ingénieur, Ecole Nationale Supérieure de l'Electronique et de ses Applications, Cergy-Pontoise, 2009.
- [25] Rémi Mignot. *Réalisation en guides d'ondes numériques stables d'un modèle acoustique réaliste pour la simulation en temps-réel d'instruments à vent*. Thèse de doctorat, Edite de Paris - Telecom ParisTech, Paris, 2009.
- [26] N H. Fletcher and T. D. Rossing. *The Physics of Musical Instruments*. Springer-Verlag, New York, USA, 1998.
- [27] Thomas Hélie and Xavier Rodet. Radiation of a pulsating portion of a sphere : application to horn radiation. *Acta Acustica*, 89 :565–577, 2003.