

Représentation de systèmes non linéaires par les séries Volterra: Calcul de domaines de convergence et applications

Thomas Hélie & Béatrice Laroche

IRCAM-CNRS UMR9912, Paris, France & L2S, Univ. Paris Sud-CNRS UMR8506-SUPELEC, France

Ces travaux ont été soutenus par le projet CONSONNES ANR-05-BLAN-0097-01.

CMAP, Ecole Polytechnique, Palaiseau
11 mai 2010

Vito Volterra [1860 (Ancone) - 1940 (Rome)]

(source: wikipédia)



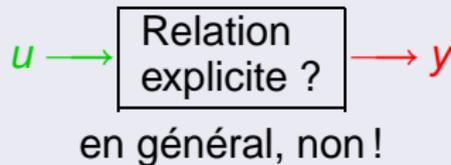
Vito Volterra est un **mathématicien et physicien italien**. Il est surtout connu pour ses **travaux sur les équations intégro-différentielles, la dislocation des cristaux, et la dynamique des populations**. Il fut un opposant résolu au fascisme, n'hésitant pas à renoncer aux honneurs académiques par conviction politique.

Royal Society (1910) - Royal Society of Edinburgh (1913)
Un cratère de la Lune porte son nom

Séries de Volterra: principe et intérêt

Système différentiel non linéaire entrée/sortie d'état x

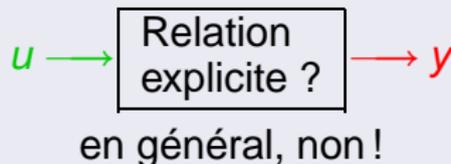
$$\begin{aligned}x'(t) &= F(x(t), u(t)) \\ y(t) &= G(x(t), u(t))\end{aligned}$$



Séries de Volterra: principe et intérêt

Système différentiel non linéaire entrée/sortie d'état x

$$\begin{aligned}x'(t) &= F(x(t), u(t)) \\ y(t) &= G(x(t), u(t))\end{aligned}$$



Cas linéaire (CI nulles)

$$F(x, u) = Ax + Bu$$

$$G(x, u) = Cx + Du$$

Relation E/S: Convolution

par le noyau

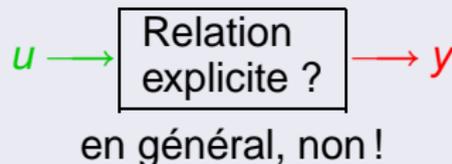
$$h(t) = Ce^{At}B + D$$

Intérêt: analyse & simulation

Séries de Volterra: principe et intérêt

Système différentiel non linéaire entrée/sortie d'état x

$$\begin{aligned}x'(t) &= F(x(t), u(t)) \\ y(t) &= G(x(t), u(t))\end{aligned}$$



Cas linéaire (CI nulles)

$$\begin{aligned}F(x, u) &= Ax + Bu \\ G(x, u) &= Cx + Du\end{aligned}$$

Cas "faiblement" non linéaire

F, G : analytique autour du point d'équilibre $(0,0)$

Relation E/S: Convolution

par le noyau

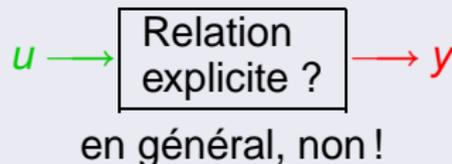
$$h(t) = Ce^{At}B + D$$

Intérêt: analyse & simulation

Séries de Volterra: principe et intérêt

Système différentiel non linéaire entrée/sortie d'état x

$$\begin{aligned}x'(t) &= F(x(t), u(t)) \\ y(t) &= G(x(t), u(t))\end{aligned}$$



Cas linéaire (CI nulles)

$$\begin{aligned}F(x, u) &= Ax + Bu \\ G(x, u) &= Cx + Du\end{aligned}$$

Cas "faiblement" non linéaire

F, G : analytique autour du point d'équilibre $(0,0)$

Relation E/S: Convolution

par le noyau
 $h(t) = Ce^{At}B + D$

Intérêt: analyse & simulation

Relation E/S: Séries de Volterra

Sommes de **convolutions multiples**
 par des **noyaux calculables**

Intérêt: idem.

Lien avec les perturbations régulières

Système faiblement non linéaire

$$x'(t) = F(x(t), u(t))$$

$$y(t) = G(x(t), u(t))$$

$$F(X, U) = \sum_{m,n} \frac{D_{m,n} F(0,0)}{m!n!} (X, \dots, X, U, \dots, U)$$

$$G(X, U) = \sum_{m,n} \frac{D_{m,n} G(0,0)}{m!n!} (X, \dots, X, U, \dots, U)$$

Lien avec les perturbations régulières

Système faiblement non linéaire

$$\begin{aligned}
 x'(t) &= F(x(t), u(t)) & F(X, U) &= \sum_{m,n} \frac{D_{m,n} F(0,0)}{m!n!} (X, \dots, X, U, \dots, U) \\
 y(t) &= G(x(t), u(t)) & G(X, U) &= \sum_{m,n} \frac{D_{m,n} G(0,0)}{m!n!} (X, \dots, X, U, \dots, U)
 \end{aligned}$$

On choisit l'entrée comme la perturbation $u(t) = \varepsilon v(t)$

- (i) Poser $x(t) = \sum_k \varepsilon^k x_k(t)$ et $y(t) = \sum_k \varepsilon^k y_k(t)$
- (ii) Injecter ces décompositions dans les éq. du système.
- (iii) Reclasser les équations selon les ε^k

Lien avec les perturbations régulières

Système faiblement non linéaire

$$\begin{aligned} x'(t) &= F(x(t), u(t)) & F(X, U) &= \sum_{m,n} \frac{D_{m,n} F(0,0)}{m!n!} (X, \dots, X, U, \dots, U) \\ y(t) &= G(x(t), u(t)) & G(X, U) &= \sum_{m,n} \frac{D_{m,n} G(0,0)}{m!n!} (X, \dots, X, U, \dots, U) \end{aligned}$$

On choisit l'entrée comme la perturbation $u(t) = \varepsilon v(t)$

- (i) Poser $x(t) = \sum_k \varepsilon^k x_k(t)$ et $y(t) = \sum_k \varepsilon^k y_k(t)$
- (ii) Injecter ces décompositions dans les éq. du système.
- (iii) Reclasser les équations selon les ε^k

On obtient une infinité d'EDO linéaires indexées par k

- (iv) Résoudre analytiquement
- (v) Chaque **contribution homogène d'ordre k** correspond à une **convolution multiple sur u avec des noyaux calculables**
 → **noyaux de Volterra**

Quelques travaux fondateurs (1/3)

V. Volterra. *Theory of Functionals and of Integral and Integro-Differential Equations.* Dover Publications, 1959.

Point de vue “contrôle géométrique”:

- **R. W. Brockett.** Volterra series and geometric control theory. *Automatica*, 12:167–176, 1976.
- **E. G. Gilbert.** Functional expansions for the response of nonlinear differential systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, 22:909–921, 1977.
- **M. Fliess.** Fonctionnelles causales non linéaires et indéterminées non commutatives. *Bulletin de la S.M.F.*, 109:3–40, 1981.
- **M. Fliess, M. Lamnabhi, and F. Lamnabhi-Lagarrigue.** An algebraic approach to nonlinear functional expansions. *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, 30(8):554–570, 1983.
- **A. Isidori.** *Nonlinear control systems (3rd ed.)*. Springer, 3rd ed. edition, 1995.

Quelques travaux fondateurs (2/3)

Point de vue “représentation entrée/sortie” et “r éalisation”:

- **W. J. Rugh.** *Nonlinear System Theory, The Volterra/Wiener approach.* The Johns Hopkins University Press, 1981.
- **P. E. Crouch and P. C. Collingwood.** The observation space and realizations of finite volterra series. *SIAM journal on control and optimization*, 25(2):316–333, 1987.
- **M. Schetzen.** *The Volterra and Wiener theories of nonlinear systems.* Wiley-Interscience, 1989.

Résultats théoriques de **convergence**:

- **F. Lamnabhi-Lagarrigue.** *Analyse des Systèmes Non Linéaires.* Editions Hermès, 1994. ISBN 2-86601-403-0.
- **S. Boyd and L. Chua.** Fading memory and the problem of approximating nonlinear operators with Voltera series. *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, 32(11):1150–1161, 1985.
- **W. S. Gray and Y. Wang.** Fliess operators on L_p spaces: convergence and continuity. *Systems & Control Letters*, 46(2):67–74, 2002.

Quelques travaux fondateurs (3/3)

Convergence (algorithme de calcul de domaines)

- **R. W. Brockett.** Convergence of Volterra series on infinite intervals and bilinear approximations. In V. Lakshmikanthan, editor, *Nonlinear Systems and Applications*, pages 39–46. Academic Press, 1977.
- **F. Bullo.** Series expansions for analytic systems linear in control. *Automatica*, 38:1425–1432, 2002.
- **Z. K. Peng and Z. Q. Lang.** On the convergence of the Volterra-series representation of the Duffing's oscillators subjected to harmonic excitations. *Journal of Sound and Vibration*, 305:322–332, 2007.
- **X. J. Jing, Z. Q. Lang, and S. A. Billings.** Magnitude bounds of generalized frequency response functions for nonlinear Volterra systems described by narx model. *Automatica*, 44:838–845, 2008.

Point de vue qualitatif et domaines d'applications

Quelques comparaisons:

Cas	Relation explicite E/S	distorsions	auto-oscillation bifucation, chaos
Général	non	oui	oui
Volterra	oui	oui	non
Linéaire	oui	non	non

Point de vue qualitatif et domaines d'applications

Quelques comparaisons:

Cas	Relation explicite E/S	distorsions	auto-oscillation bifucation, chaos
Général	non	oui	oui
Volterra	oui	oui	non
Linéaire	oui	non	non

Domaines d'applications

- Electronique, Electromagnétisme, Mécanique, Ingénierie bio-médicale, etc
- Théorie des systèmes et Automatique, Théorie du signal, Identifi cation et simulation

Point de vue qualitatif et domaines d'applications

Quelques comparaisons:

Cas	Relation explicite E/S	distorsions	auto-oscillation bifurcation, chaos
Général	non	oui	oui
Volterra	oui	oui	non
Linéaire	oui	non	non

Domaines d'applications

- Electronique, Electromagnétisme, Mécanique, Ingénierie bio-médicale, etc
- Théorie des systèmes et Automatique, Théorie du signal, Identification et simulation
- Applications possibles aux **EDP**
- **En acoustique musicale: les nuances fortissimo**

Plan

- Préambule
- **Partie 1:** Algorithme de calcul de **domaine de convergence**
[Helie,Laroche:IEEE CDC 2009]
- **Partie 2:** **Applications** pour la synthèse sonore
 - **Tutoriel** et méthode pratique pour le calcul de noyaux
 - **Application 1:** Propagation non linéaire dans les instruments de type cuivre
[Helie,Hasler: IJC 2004] et [Helie,Smet: IEEE MED 2008]
 - **Application 2:** résultats pour un modèle non linéaire de corde
[Helie,Roze: JSV 2008]
- Conclusion et perspectives

PARTIE 1: Convergence

Algorithme de calcul de **domaine de convergence** pour des systèmes à entrée simple et à non-linéarité analytique en l'état

(Présentation de [Helie,Laroche:IEEE CDC 2009])

PARTIE 2: Applications pour la synthèse sonore

- **Tutoriel** et méthode pratique pour le calcul de noyaux
- **Application 1:** Propagation non linéaire dans les instruments de type cuivre
[Helie,Hasler: IJC 2004] et [Helie,Smet: IEEE MED 2008]
- **Application 2:** Résultats pour un modèle non linéaire de corde
[Helie,Roze: JSV 2008]

L'IRCAM: Institut de Recherche et Coordination Acoustique/Musique [CNRS UMR 9912]



<http://www.ircam.fr>



Création : en **1971** par **Pierre Boulez**

Vocation : interaction entre

- **recherche** scientifique (son & musique)
- **développement** technologique
- **création musicale** contemporaine

Équipe Analyse-Synthèse :

- **modèles de synthèse**
- procédés d'**analyse** des sons
- outils de **transformation** des sons

Tutoriel et méthode pratique pour le calcul de noyaux

Séries de Volterra (syst. stationnaire, entrée simple)

Définition

Un syst. $u \rightarrow \boxed{\{h_n\}} \rightarrow y$ est défini par la **série de Volterra** $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ si

$$y(t) = \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty}}_{\text{Somme}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) u(t - \tau_1) \dots u(t - \tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n}_{\text{de multi-convolutions}}$$

Séries de Volterra (syst. stationnaire, entrée simple)

Définition

Un syst. $u \rightarrow \boxed{\{h_n\}} \rightarrow y$ est défini par la **série de Volterra** $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ si

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) u(t - \tau_1) \dots u(t - \tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n \\ &= \int_{\mathbb{R}} h_1(\tau_1) u(t - \tau_1) d\tau_1 \end{aligned}$$

Exemples:

- Filtres linéaires: $h_n = 0$ pour $n \geq 2$

Séries de Volterra (syst. stationnaire, entrée simple)

Définition

Un syst. $u \rightarrow \boxed{\{h_n\}} \rightarrow y$ est défini par la **série de Volterra** $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ si

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) u(t - \tau_1) \dots u(t - \tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \left(u(t) \right)^n \quad \text{Fct. DSE}
 \end{aligned}$$

Exemples:

- Filtres linéaires: $h_n = 0$ pour $n \geq 2$
- Fct sans mémoire: $h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) = \alpha_n \delta(\tau_1, \dots, \tau_n)$

Séries de Volterra (syst. stationnaire, entrée simple)

Définition

Un syst. $u \rightarrow \boxed{\{h_n\}} \rightarrow y$ est défini par la **série de Volterra** $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ si

$$y(t) = \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty}}_{\text{Somme}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) u(t - \tau_1) \dots u(t - \tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n}_{\text{de multi-convolutions}}$$

Exemples:

- Filtres linéaires: $h_n = 0$ pour $n \geq 2$
- Fct sans mémoire: $h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) = \alpha_n \delta(\tau_1, \dots, \tau_n)$
- Cas général: $n=1$ (contrib. lin.), $n=2$ (quadratique), etc

Propriétés et analogies avec les systèmes linéaires

Un système est causal, si

$$\tau < 0 \Rightarrow h(\tau) = 0 \quad (\text{linéaire})$$

$$\tau_k < 0 \Rightarrow h_n(\tau_1, \dots, \tau_k, \dots, \tau_n) = 0 \quad (\text{Volterra})$$

Propriétés et analogies avec les systèmes linéaires

Un système est causal, si

$$\tau < 0 \Rightarrow h(\tau) = 0 \quad (\text{linéaire})$$

$$\tau_k < 0 \Rightarrow h_n(\tau_1, \dots, \tau_k, \dots, \tau_n) = 0 \quad (\text{Volterra})$$

Domaine de Laplace (/idem Fourier) on note $(\tau_{1:n}) = (\tau_1, \dots, \tau_n)$

$$\text{Fct. trsfrt} \quad H(s) = \int_{\mathbb{R}} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau \quad (\text{lin.})$$

$$\text{Noy. trsfrt} \quad H_n(s_{1:n}) = \int_{\mathbb{R}^n} h_n(\tau_{1:n}) e^{-(s_1\tau_1 + \dots + s_n\tau_n)} d\tau_1 \dots d\tau_n \quad (\text{Volt.})$$

Propriétés et analogies avec les systèmes linéaires

Un système est causal, si

$$\tau < 0 \Rightarrow h(\tau) = 0 \quad (\text{linéaire})$$

$$\tau_k < 0 \Rightarrow h_n(\tau_1, \dots, \tau_k, \dots, \tau_n) = 0 \quad (\text{Volterra})$$

Domaine de Laplace (/idem Fourier) on note $(\tau_{1:n}) = (\tau_1, \dots, \tau_n)$

$$\text{Fct. trsfrt} \quad H(s) = \int_{\mathbb{R}} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau \quad (\text{lin.})$$

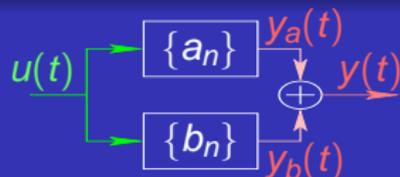
$$\text{Noy. trsfrt} \quad H_n(s_{1:n}) = \int_{\mathbb{R}^n} h_n(\tau_{1:n}) e^{-(s_1\tau_1 + \dots + s_n\tau_n)} d\tau_1 \dots d\tau_n \quad (\text{Volt.})$$

Pour un système causal stable: PAS de pôles (ni singularités)

$$\text{de } H(s) \quad \text{pour } \Re(s) > 0 \quad (\text{linéaire})$$

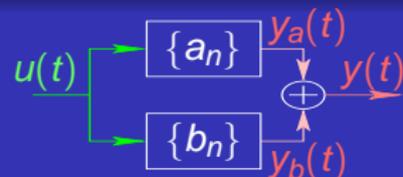
$$\text{de } H_n(s_{1:n}) \quad \text{pour } \Re(s_1) > 0, \dots, \Re(s_n) > 0 \quad (\text{Volterra})$$

Loi d'interconnexion: Somme



Calcul de $y(t) = y_a(t) + y_b(t)$

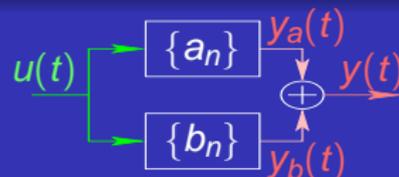
Loi d'interconnexion: Somme



Calcul de $y(t) = y_a(t) + y_b(t)$

$$y(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} a_n(\tau_{1:n}) u(t - \tau_1) \dots u(t - \tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n \\ + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} b_n(\tau_{1:n}) u(t - \tau_1) \dots u(t - \tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n$$

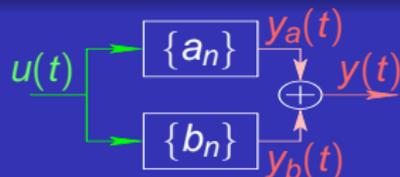
Loi d'interconnexion: Somme



Calcul de $y(t) = y_a(t) + y_b(t)$

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} a_n(\tau_{1:n}) u(t - \tau_1) \dots u(t - \tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} b_n(\tau_{1:n}) u(t - \tau_1) \dots u(t - \tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} [a_n(\tau_{1:n}) + b_n(\tau_{1:n})] u(t - \tau_1) \dots u(t - \tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n
 \end{aligned}$$

Loi d'interconnexion: Somme



Calcul de $y(t) = y_a(t) + y_b(t)$

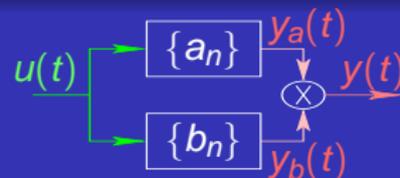
$$\begin{aligned}
 y(t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} a_n(\tau_{1:n}) u(t - \tau_1) \dots u(t - \tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} b_n(\tau_{1:n}) u(t - \tau_1) \dots u(t - \tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} [a_n(\tau_{1:n}) + b_n(\tau_{1:n})] u(t - \tau_1) \dots u(t - \tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n
 \end{aligned}$$

Résultat: Noyaux équivalents c_n

$$c_n(\tau_{1:n}) = a_n(\tau_{1:n}) + b_n(\tau_{1:n})$$

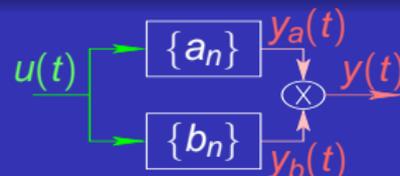
T. Laplace: $C_n(s_{1:n}) = A_n(s_{1:n}) + B_n(s_{1:n})$

Loi d'interconnexion: Produit



Calcul de $y(t) = y_a(t) y_b(t)$

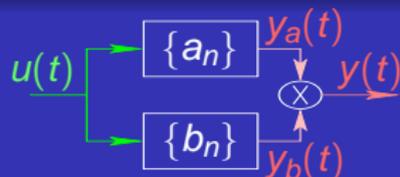
Loi d'interconnexion: Produit



Calcul de $y(t) = y_a(t) y_b(t)$

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \sum_{p=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^p} a_p(\theta_{1:p}) u(t - \theta_1) \dots u(t - \theta_p) d\theta_1 \dots d\theta_p \\
 &\quad \times \sum_{q=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^q} b_q(\sigma_{1:q}) u(t - \sigma_1) \dots u(t - \sigma_q) d\sigma_1 \dots d\sigma_q
 \end{aligned}$$

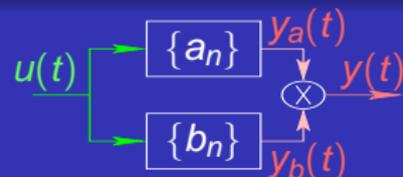
Loi d'interconnexion: Produit



Calcul de $y(t) = y_a(t) y_b(t)$

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \sum_{p=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^p} a_p(\theta_{1:p}) u(t - \theta_1) \dots u(t - \theta_p) d\theta_1 \dots d\theta_p \\
 &\quad \times \sum_{q=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^q} b_q(\sigma_{1:q}) u(t - \sigma_1) \dots u(t - \sigma_q) d\sigma_1 \dots d\sigma_q \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\sum_{\substack{p,q \geq 1 \\ p+q=n}} a_p(\theta_{1:p}) b_q(\sigma_{1:q}) \right] u(t - \theta_1) \dots u(t - \theta_p) \\
 &\quad u(t - \sigma_1) \dots u(t - \sigma_q) d\theta_1 \dots d\theta_p d\sigma_1 \dots d\sigma_q
 \end{aligned}$$

Loi d'interconnexion: Produit



Calcul de $y(t) = y_a(t) y_b(t)$

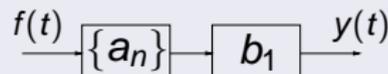
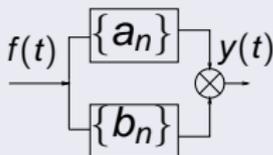
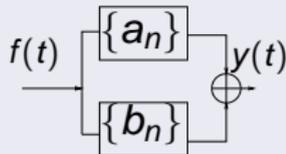
$$\begin{aligned}
 y(t) &= \sum_{p=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^p} a_p(\theta_{1:p}) u(t - \theta_1) \dots u(t - \theta_p) d\theta_1 \dots d\theta_p \\
 &\quad \times \sum_{q=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^q} b_q(\sigma_{1:q}) u(t - \sigma_1) \dots u(t - \sigma_q) d\sigma_1 \dots d\sigma_q \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\sum_{\substack{p,q \geq 1 \\ p+q=n}} a_p(\theta_{1:p}) b_q(\sigma_{1:q}) \right] u(t - \theta_1) \dots u(t - \theta_p) \\
 &\quad u(t - \sigma_1) \dots u(t - \sigma_q) d\theta_1 \dots d\theta_p d\sigma_1 \dots d\sigma_q
 \end{aligned}$$

Résultat: Noyaux équivalents c_n

$$c_n(\tau_{1:n}) = \sum_{p=1}^{n-1} a_p(\tau_{1:p}) b_{n-p}(\tau_{p+1:n})$$

T. Laplace: $C_n(s_{1:n}) = \sum_{p=1}^{n-1} A_p(s_{1:p}) B_{n-p}(s_{p+1:n})$

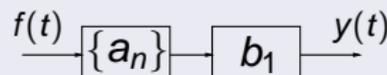
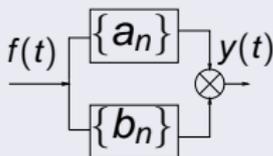
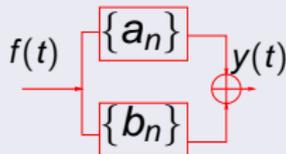
Somme, produit et cascade de systèmes



Noyaux de transfert équivalents C_n

A_n et B_n : noyaux de transfert des 2 séries

Somme, produit et cascade de systèmes

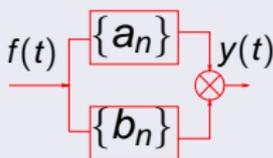
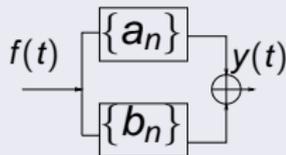


Noyaux de transfert équivalents C_n

A_n et B_n : noyaux de transfert des 2 séries

$$\text{Somme: } C_n(s_{1:n}) = A_n(s_{1:n}) + B_n(s_{1:n})$$

Somme, produit et cascade de systèmes



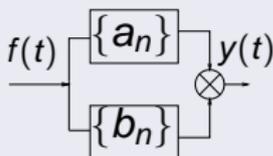
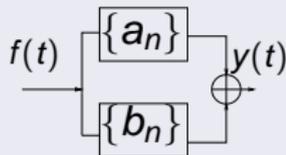
Noyaux de transfert équivalents C_n

A_n et B_n : noyaux de transfert des 2 séries

$$\text{Somme: } C_n(s_{1:n}) = A_n(s_{1:n}) + B_n(s_{1:n})$$

$$\text{Produit: } C_n(s_{1:n}) = \sum_{p=1}^{n-1} A_p(s_{1:p}) B_{n-p}(s_{p+1:n})$$

Somme, produit et cascade de systèmes



Noyaux de transfert équivalents C_n

A_n et B_n : noyaux de transfert des 2 séries

$$\text{Somme: } C_n(s_{1:n}) = A_n(s_{1:n}) + B_n(s_{1:n})$$

$$\text{Produit: } C_n(s_{1:n}) = \sum_{p=1}^{n-1} A_p(s_{1:p}) B_{n-p}(s_{p+1:n})$$

$$\text{Cascade avec un syst. lin.: } C_n(s_{1:n}) = A_n(s_{1:n}) B_1(\widehat{s_{1:n}})$$

avec $\widehat{s_{1:n}} = s_1 + \dots + s_n$.

Syst. annulateur: Ressort NL $f \rightarrow \{h_n\} \rightarrow z$

Equation (repos avant $t=0$)

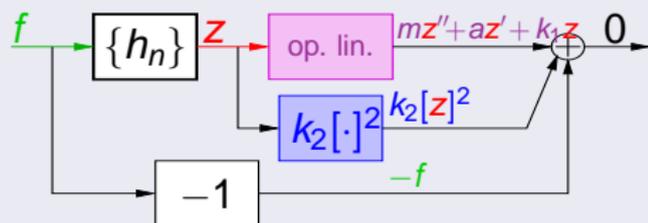
$$mz'' + az' + k_1z + k_2[z]^2 = f$$

Syst. annulateur: Ressort NL $f \rightarrow \{h_n\} \rightarrow z$

Equation (repos avant $t=0$)

$$mz'' + az' + k_1z + k_2[z]^2 = f$$

Système annulateur (diagr. bloc)

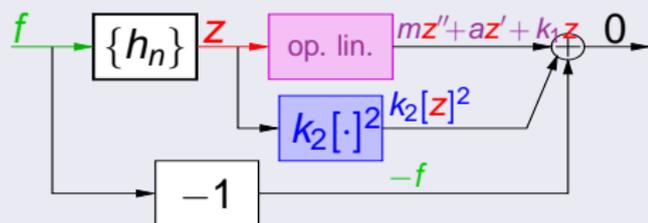


Syst. annulateur: Ressort NL $f \xrightarrow{\text{green}} \boxed{\{h_n\}} \xrightarrow{\text{red}} z$

Equation (repos avant $t=0$)

$$mz'' + az' + k_1z + k_2[z]^2 = f$$

Système annulateur (diagr. bloc)



Blocs élémentaires \rightarrow Noyaux de transfert équivalents

$$m \frac{d^2}{dt^2} + a \frac{d}{dt} + k_1$$

$\rightarrow Q_1(s) = ms^2 + as + k_1, Q_n = 0$ si $n \geq 2$

$$k_2[\cdot]^2$$

\rightarrow interconnexion produit, puis $\times k_2$

$$-1$$

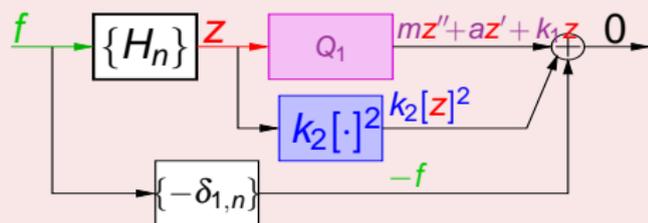
$\rightarrow -\delta_{1,n} = -1$ si $n = 1$ et $-\delta_{1,n} = 0$ sinon

Syst. annulateur: Ressort NL $f \xrightarrow{\text{green}} \boxed{\{h_n\}} \xrightarrow{\text{red}} z$

Equation (repos avant $t=0$)

$$mz'' + az' + k_1z + k_2[z]^2 = f$$

Système annulateur (diagr. bloc)



Blocs élémentaires \rightarrow Noyaux de transfert équivalents

$$m \frac{d^2}{dt^2} + a \frac{d}{dt} + k_1$$

$\rightarrow Q_1(s) = ms^2 + as + k_1, Q_n = 0$ si $n \geq 2$

$$k_2[\cdot]^2$$

\rightarrow interconnexion produit, puis $\times k_2$

$$-1$$

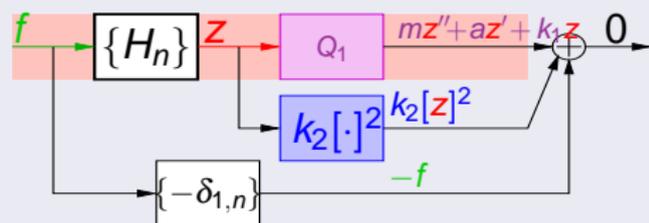
$\rightarrow -\delta_{1,n} = -1$ si $n = 1$ et $-\delta_{1,n} = 0$ sinon

Syst. annulateur: Ressort NL $f \xrightarrow{\text{green}} \boxed{\{h_n\}} \xrightarrow{\text{red}} z$

Equation (repos avant $t=0$)

$$mz'' + az' + k_1z + k_2[z]^2 = f$$

Système annulateur (diagr. bloc)



Noyau d'ordre n du système annulateur

$$H_n(s_{1:n}) Q_1(\widehat{s_{1:n}})$$

$$+ k_2 \sum_{p=1}^{n-1} H_p(s_{1,p}) H_{n-p}(s_{p+1:n})$$

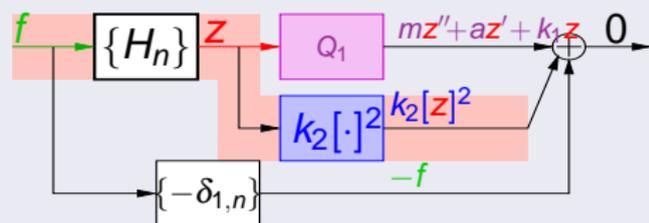
$$+ (-\delta_{1,n}) = 0$$

Syst. annulateur: Ressort NL $f \xrightarrow{\text{green}} \boxed{\{h_n\}} \xrightarrow{\text{red}} z$

Equation (repos avant $t=0$)

$$mz'' + az' + k_1z + k_2[z]^2 = f$$

Système annulateur (diagr. bloc)



Noyau d'ordre n du système annulateur

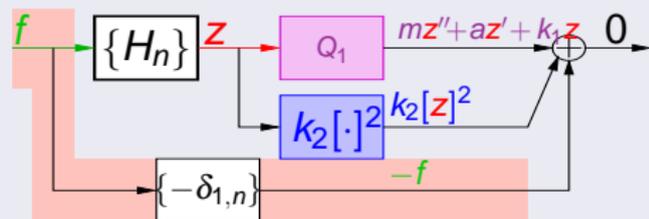
$$H_n(s_{1:n}) Q_1(\widehat{s_{1:n}}) + k_2 \sum_{p=1}^{n-1} H_p(s_{1:p}) H_{n-p}(s_{p+1:n}) + \dots - \delta_{1,n} = 0$$

Syst. annulateur: Ressort NL $f \xrightarrow{\text{green}} \boxed{\{h_n\}} \xrightarrow{\text{red}} z$

Equation (repos avant $t=0$)

$$mz'' + az' + k_1z + k_2[z]^2 = f$$

Système annulateur (diagr. bloc)



Noyau d'ordre n du système annulateur

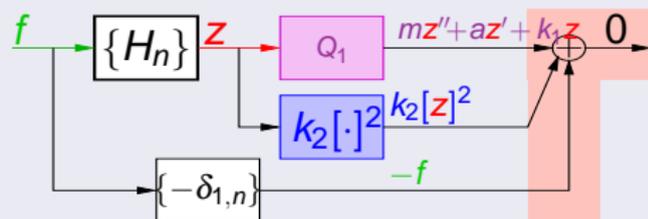
$$\begin{aligned}
 & H_n(s_{1:n}) Q_1(\widehat{s_{1:n}}) \\
 + & k_2 \sum_{p=1}^{n-1} H_p(s_{1:p}) H_{n-p}(s_{p+1:n}) \\
 + & -\delta_{1,n} \qquad \qquad \qquad = 0
 \end{aligned}$$

Syst. annulateur: Ressort NL $f \xrightarrow{\text{green}} \boxed{\{h_n\}} \xrightarrow{\text{red}} z$

Equation (repos avant $t=0$)

$$mz'' + az' + k_1z + k_2[z]^2 = f$$

Système annulateur (diagr. bloc)



Noyau d'ordre n du système annulateur

$$\begin{aligned}
 & H_n(s_{1:n}) Q_1(\widehat{s_{1:n}}) \\
 + & k_2 \sum_{p=1}^{n-1} H_p(s_{1:p}) H_{n-p}(s_{p+1:n}) \\
 + & -\delta_{1,n} \qquad \qquad \qquad = 0
 \end{aligned}$$

Noyaux $\{H_n\}$ du système \xrightarrow{f} $\boxed{\{h_n\}}$ \xrightarrow{Z}

Solution générale : équation algébrique recursive ($n \geq 1$)

$$H_n(s_{1:n}) = \frac{\delta_{1,n} - k_2 \overbrace{\sum_{p=1}^{n-1} H_p(s_{1:p}) H_{n-p}(s_{p+1:n})}^{\text{ordres} < n}}{Q_1(\widehat{s_{1:n}})}$$

avec $Q_1(s) = ms^2 + as + k_1$

Noyaux $\{H_n\}$ du système \xrightarrow{f} $\boxed{\{h_n\}}$ \xrightarrow{Z}

Solution générale : équation algébrique recursive ($n \geq 1$)

$$H_n(s_{1:n}) = \frac{\delta_{1,n} - k_2 \sum_{p=1}^{n-1} \overbrace{H_p(s_{1:p}) H_{n-p}(s_{p+1:n})}^{\text{ordres} < n}}{Q_1(\widehat{s_{1:n}})}$$

avec $Q_1(s) = ms^2 + as + k_1$

Premiers noyaux ($n = 1, 2, \text{etc}$)

$$H_1(s_1) = [Q_1(s_1)]^{-1}$$

$$H_2(s_1, s_2) = -k_2 [Q_1(s_1) Q_1(s_2) Q_1(s_1 + s_2)]^{-1}$$

etc...

En résumé:

On transforme un **problème faiblement non linéaire**
en une **infinité de problèmes linéaires** qu'on sait résoudre.

En résumé:

On transforme un **problème faiblement non linéaire**
en une **infinité de problèmes linéaires** qu'on sait résoudre.

En pratique :

On tronque la série pour avoir les premières distorsions

En résumé:

On transforme un **problème faiblement non linéaire**
en une **infinité de problèmes linéaires** qu'on sait résoudre.

En pratique :

On tronque la série pour avoir les premières distorsions

Extension aux équations aux dérivées partielles:

même principe: cf. Applications

En résumé:

On transforme un **problème faiblement non linéaire**
en une **infinité de problèmes linéaires** qu'on sait résoudre.

En pratique :

On tronque la série pour avoir les premières distorsions

Extension aux équations aux dérivées partielles:

même principe: cf. Applications

Pour la simulation :

On construit des **structures "faible coût" réalisables à partir des noyaux**

Application 1

Propagation non linéaire dans les instruments de type cuivre

[Helie,Smet: IEEE MED 2008]

Application 2

Résultats pour un modèle non linéaire de corde (Kirchhoff)

[Hélie, Roze:JSV 2008]

Model

The Kirchhoff equation (u : transverse displacement)

$$\forall (x, t) \in \Omega =]0; 1[\times \mathbb{R}^{+*}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 1$$

Model

The Kirchhoff equation (u : transverse displacement)

$$\forall (x, t) \in \Omega =]0; 1[\times \mathbb{R}^{+*}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial t} - \beta \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 1 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} +$$

(α, β) : damping

Model

The Kirchhoff equation (u : transverse displacement)

$$\forall (\mathbf{x}, t) \in \Omega =]0; 1[\times \mathbb{R}^{+*}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial t} - \beta \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 1 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \phi(\mathbf{x})f(t)$$

(α, β) : damping

$f(t)$: excitation force

Model

The Kirchhoff equation (u : transverse displacement)

$$\forall (x, t) \in \Omega =]0; 1[\times \mathbb{R}^{+*}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial t} - \beta \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left[1 + \varepsilon \int_0^1 \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2 dx \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \phi(x) f(t)$$

(α, β) : damping ε : nonlinear coefficient $f(t)$: excitation force

Model

The Kirchhoff equation (u : transverse displacement)

$$\forall (\mathbf{x}, t) \in \Omega =]0; 1[\times \mathbb{R}^{+*}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial t} - \beta \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left[1 + \varepsilon \int_0^1 \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2 dx \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \phi(x)f(t)$$

(α, β) : damping ε : nonlinear coefficient $f(t)$: excitation force

Boundary and initial conditions

Dirichlet homogeneous: $u(x=0, t) = u(x=1, t) = 0$

At rest for $t \leq 0$: $u(x, t) = \partial_t u(x, t) = 0$

Equation satisfied by the Volterra kernels

Kirchhoff equation of the string

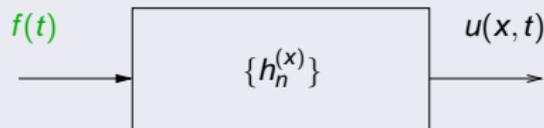
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial t} - \beta \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left[1 + \varepsilon \int_0^1 \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2 dx \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \phi(x) f(t) = 0$$

Equation satisfied by the Volterra kernels

Kirchhoff equation of the string

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial t} - \beta \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left[1 + \varepsilon \int_0^1 \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2 dx \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \phi(x) f(t) = 0$$

Definition of the solution as a Volterra series



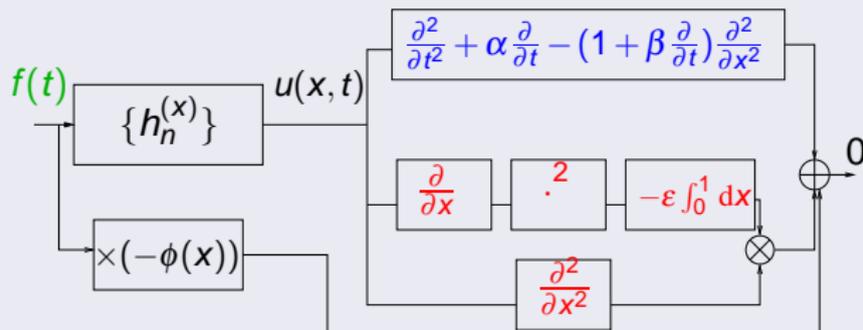
Volterra kernels must be parametrized in space: $\{h_n\} \rightarrow \{h_n^{(x)}\}$.

Equation satisfied by the Volterra kernels

Kirchhoff equation of the string

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial t} - \beta \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left[1 + \varepsilon \int_0^1 \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2 dx \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \phi(x) f(t) = 0$$

Cancelling system in the time domain

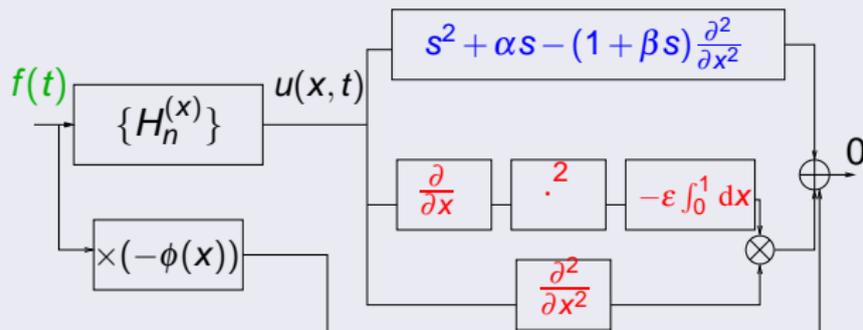


Equation satisfied by the Volterra kernels

Kirchhoff equation of the string

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial t} - \beta \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left[1 + \varepsilon \int_0^1 \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2 dx \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \phi(x) f(t) = 0$$

Cancelling system in the Laplace domain

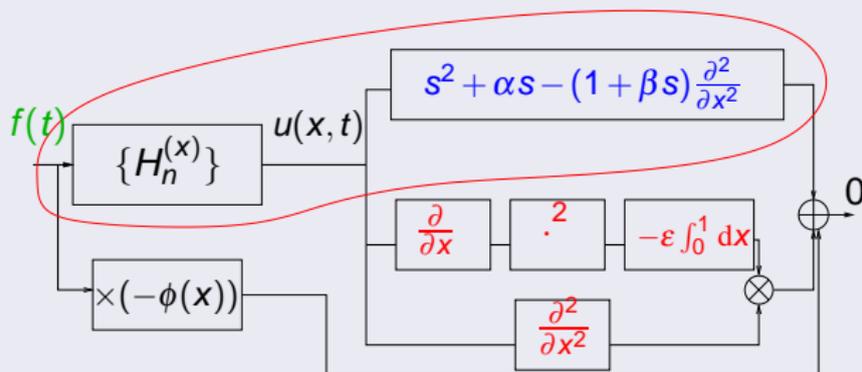


Equation satisfied by the Volterra kernels

Kirchhoff equation of the string

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial t} - \beta \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left[1 + \varepsilon \int_0^1 \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2 dx \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \phi(x) f(t) = 0$$

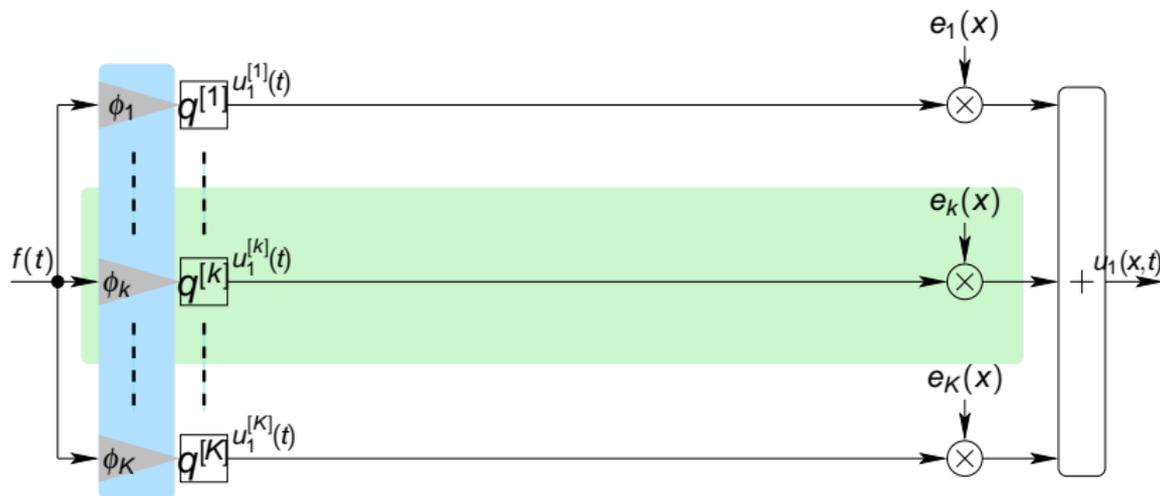
Cancelling system in the Laplace domain



$$\left[(\widehat{s_{1:n}})^2 + \alpha(\widehat{s_{1:n}}) - (1 + \beta(\widehat{s_{1:n}})) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] H_n^{(x)}(s_{1:n}) \dots \text{etc}$$

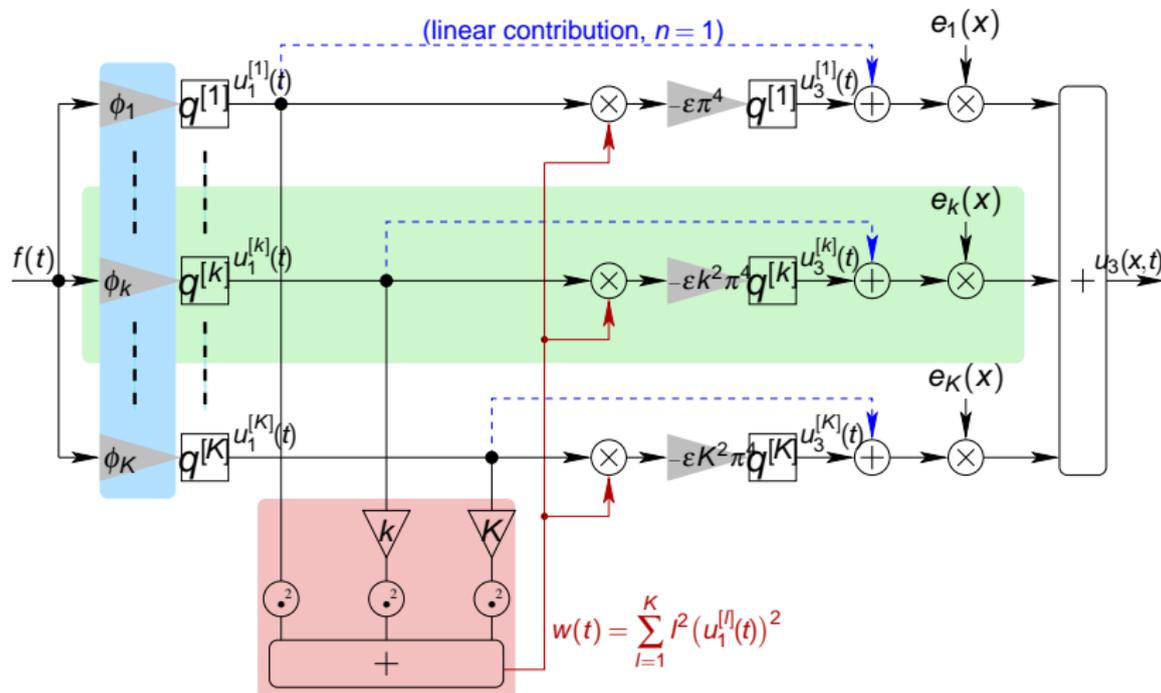
Solution and realization (see details in [JSV 2008])

(Projection of Volterra kernels on the L^2 -modal basis $\mathcal{B} = \{e_k(x) = \sqrt{2} \sin(k\pi x)\}$)



Solution and realization (see details in [JSV 2008])

(Projection of Volterra kernels on the L^2 -modal basis $\mathcal{B} = \{e_k(x) = \sqrt{2} \sin(k\pi x)\}$)



CONCLUSION

Pour conclure: travaux en cours et perspectives

Convergence: Travaux en cours et généralisations

- [\[IEEE TAC 2010\]](#): Normes sur des **horizons de temps finis/infinis** avec **pondération exponentielle**

Pour conclure: travaux en cours et perspectives

Convergence: Travaux en cours et généralisations

- [IEEE TAC 2010]: Normes sur des **horizons de temps finis/infinis** avec **pondération exponentielle**
- [soumis à IEEE CDC'2010]: systèmes à **entrées multiples** (notions d'entrée principale et auxiliaires)

Pour conclure: travaux en cours et perspectives

Convergence: Travaux en cours et généralisations

- [IEEE TAC 2010]: Normes sur des **horizons de temps finis/infinis** avec **pondération exponentielle**
- [soumis à IEEE CDC'2010]: systèmes à **entrées multiples** (notions d'entrée principale et auxiliaires)
- [soumis à IFAC SSSC'2010]: **Conditions initiales** non nulles, systèmes de **dimension infinie** (/EDP)

Pour conclure: travaux en cours et perspectives

Convergence: Travaux en cours et généralisations

- [IEEE TAC 2010]: Normes sur des **horizons de temps finis/infinis** avec **pondération exponentielle**
- [soumis à IEEE CDC'2010]: systèmes à **entrées multiples** (notions d'entrée principale et auxiliaires)
- [soumis à IFAC SSSC'2010]: **Conditions initiales** non nulles, systèmes de **dimension infinie** (/EDP)

Perspectives

- Convergence pour des systèmes analytiques en l'état et l'entrée

Pour conclure: travaux en cours et perspectives

Convergence: Travaux en cours et généralisations

- [IEEE TAC 2010]: Normes sur des **horizons de temps finis/infinis** avec **pondération exponentielle**
- [soumis à IEEE CDC'2010]: systèmes à **entrées multiples** (notions d'entrée principale et auxiliaires)
- [soumis à IFAC SSSC'2010]: **Conditions initiales** non nulles, systèmes de **dimension infinie** (/EDP)

Perspectives

- Convergence pour des systèmes analytiques en l'état et l'entrée
- Résolution d'EDP en noyaux de "Green-Poisson-Volterra"

Pour conclure: travaux en cours et perspectives

Convergence: Travaux en cours et généralisations

- [IEEE TAC 2010]: Normes sur des **horizons de temps finis/infinis** avec **pondération exponentielle**
- [soumis à IEEE CDC'2010]: systèmes à **entrées multiples** (notions d'entrée principale et auxiliaires)
- [soumis à IFAC SSSC'2010]: **Conditions initiales** non nulles, systèmes de **dimension infinie** (/EDP)

Perspectives

- Convergence pour des systèmes analytiques en l'état et l'entrée
- Résolution d'EDP en noyaux de "Green-Poisson-Volterra"
- Etude des séries divergentes, troncature optimale

Quelques publications

Convergence

- Hélie Thomas, Laroche Béatrice, On the convergence of Volterra series of finite dimensional quadratic MIMO systems. International Journal of Control, special issue in Honor of Michel Fliess 60th-birthday. 2008, vol. 81, n° 3, p. 358-37
- Hélie Thomas, Laroche Béatrice, Computation of convergence radius and error bounds of Volterra series for single input systems with a polynomial nonlinearity. IEEE Conference on Decision and Control. Shanghai : 2009, vol. 48, p. 1-6
- Hélie Thomas, Laroche Béatrice, Computation of convergence bounds for Volterra series of analytic single input systems. IEEE Transactions on Automatic Control. 2010 (to appear)

Applications

- Hélie Thomas, Hasler Martin, Volterra series for solving weakly nonlinear partial differential equations: Application to the Burgers equation with visco-thermal losses. International Journal of Control. 2004, vol. 77, n° 12, p. 1071-1082
- Hélie Thomas, Smet Vanessa, Simulation of the weakly nonlinear propagation in a straight pipe: application to a real-time brassy audio effect. Mediterranean Conference on Control and Automation. Ajaccio: 2008, vol. 16, p. 1580-1585
- Hélie Thomas, Roze David, Sound synthesis of a nonlinear string using Volterra series. Journal of Sound and Vibration. 2008, vol. 314, p. 275-306
- Hélie Thomas, Volterra series and state transformation for real-time simulations of audio devices including saturations: application to the Moog ladder filter. IEEE Transactions on Audio, Speech and Language Processing. 2010