Représentation de systèmes non linéaires par les séries Volterra:

Calcul de domaines de convergence et applications

Thomas Hélie

IRCAM - CNRS UMR9912 - UPMC, Paris, France

Université de Pau et des Pays de l'Adour,
12 mai 2011

Plan

- **Préambule**
- **Partie 1:** Tutoriel (pratique des SV en ingéniérie)
- **Partie 2:** Calcul de domaines de convergence [Hélie,Laroche]
- **Partie 3:** Applications pour la synthèse sonore
- **Conclusion et perspectives**

Préambule

PREAMBULE

Vito Volterra [1860 (Ancone) - 1940 (Rome)] (source: wikipédia)

Vito Volterra est un **mathématicien et physicien italien**. Il est surtout connu pour ses **travaux sur les équations intégro-différentielles, la dislocation des cristaux, et la dynamique des populations**. Il fut un opposant résolu au fascisme, n'hésitant pas à renoncer aux honneurs académiques par conviction politique.

Royal Society (1910) - Royal Society of Edinburgh (1913)
Un cratère de la Lune porte son nom

Séries de Volterra: principe et intérêt

Système différentiel non linéaire entrée/sortie d'état x

$$
\begin{aligned}
x'(t) &= F\big(x(t), u(t)\big) \\
y(t) &= G\big(x(t), u(t)\big)
\end{aligned}
$$

$$u \longrightarrow \boxed{\text{Relation explicite ?}} \longrightarrow y$$

en général, non !

Séries de Volterra: principe et intérêt

Système différentiel non linéaire entrée/sortie d'état x

$$\begin{aligned} x'(t) &= F\big(x(t), u(t)\big) \\ y(t) &= G\big(x(t), u(t)\big) \end{aligned}$$

$u \longrightarrow \boxed{\text{Relation explicite ?}} \longrightarrow y$

en général, non !

Cas linéaire (LTI & CI nulles)

$F(x,u) = Ax + Bu$

$G(x,u) = Cx + Du$

Relation E/S: **Convolution**

par le noyau

$h(t) = Ce^{At}B + D$

Intérêt: analyse & simulation

Séries de Volterra: principe et intérêt

Système différentiel non linéaire entrée/sortie d'état x

$$
\begin{aligned}
x'(t) &= F\big(x(t), u(t)\big) \\
y(t) &= G\big(x(t), u(t)\big)
\end{aligned}
$$

$u \longrightarrow \boxed{\text{Relation explicite ?}} \longrightarrow y$

en général, non !

Cas linéaire (LTI & CI nulles)

$F(x,u) = Ax + Bu$
$G(x,u) = Cx + Du$

Cas "faiblement" non linéaire

F, G: analytique autour du point d'équilibre (0,0)

Relation E/S: Convolution

par le noyau
$h(t) = Ce^{At}B + D$

Intérêt: analyse & simulation

Séries de Volterra: principe et intérêt

Système différentiel non linéaire entrée/sortie d'état x

$$\begin{aligned} x'(t) &= F\big(x(t), u(t)\big) \\ y(t) &= G\big(x(t), u(t)\big) \end{aligned}$$

$u \longrightarrow$ Relation explicite ? $\longrightarrow y$

en général, non !

Cas linéaire (LTI & CI nulles)

$F(x,u) = Ax + Bu$
$G(x,u) = Cx + Du$

Cas "faiblement" non linéaire

F, G: analytique autour du point d'équilibre (0,0)

Relation E/S: Convolution

par le noyau
$h(t) = Ce^{At}B + D$

Intérêt: analyse & simulation

Relation E/S: Séries de Volterra

Sommes de **convolutions mutliples** par des **noyaux calculables**

Intérêt: idem.

Lien avec les **perturbations régulières**

Système faiblement non linéaire

$$x'(t) = F\big(x(t), u(t)\big) \qquad F(X,U) = \sum_{m,n} \frac{D_{m,n}F(0,0)}{m!n!}(X,\dots,X,U,\dots,U)$$
$$y(t) = G\big(x(t), u(t)\big) \qquad G(X,U) = \sum_{m,n} \frac{D_{m,n}G(0,0)}{m!n!}(X,\dots,X,U,\dots,U)$$

Lien avec les perturbations régulières

Système faiblement non linéaire

$$x'(t) = F\big(x(t), u(t)\big) \qquad F(X,U) = \sum_{m,n} \frac{D_{m,n}F(0,0)}{m!n!}(X,\dots,X,U,\dots,U)$$
$$y(t) = G\big(x(t), u(t)\big) \qquad G(X,U) = \sum_{m,n} \frac{D_{m,n}G(0,0)}{m!n!}(X,\dots,X,U,\dots,U)$$

On choisit l'entrée comme la perturbation $u(t) = \eta v(t)$

(i) Poser $x(t) = \sum_k \eta^k x_k(t)$ et $y(t) = \sum_k \eta^k y_k(t)$

(ii) Injecter ces décompositions dans les éq. du système.

(iii) Reclasser les équations selon les η^k

Lien avec les perturbations régulières

Système faiblement non linéaire

$$x'(t) = F\big(x(t), u(t)\big) \qquad F(X,U) = \sum_{m,n} \frac{D_{m,n}F(0,0)}{m!n!}(X,\ldots,X,U,\ldots,U)$$
$$y(t) = G\big(x(t), u(t)\big) \qquad G(X,U) = \sum_{m,n} \frac{D_{m,n}G(0,0)}{m!n!}(X,\ldots,X,U,\ldots,U)$$

On choisit l'entrée comme la perturbation $u(t) = \eta v(t)$

(i) Poser $x(t) = \sum_k \eta^k x_k(t)$ et $y(t) = \sum_k \eta^k y_k(t)$

(ii) Injecter ces décompositions dans les éq. du système.

(iii) Reclasser les équations selon les η^k

On obtient une **infinité d'EDO linéaires indexées par** k

(iv) Résoudre analytiquement

(v) Chaque **contribution homogène d'ordre** k correspond à une **convolution multiple sur** u **avec des noyaux calculables** $\longrightarrow$ **noyaux de Volterra**

Point de vue qualitatif et domaines d'applications

Quelques comparaisons:

Cas	Relation explicite E/S	distorsions	auto-oscillation bifucation, chaos
Général	non	oui	oui
Volterra	oui	oui	non
Linéaire	oui	non	non

Point de vue qualitatif et domaines d'applications

Quelques comparaisons:

Cas	Relation explicite E/S	distorsions	auto-oscillation bifucation, chaos
Général	non	oui	oui
Volterra	oui	oui	non
Linéaire	oui	non	non

Domaines d'applications

- Electronique, Electromagnétisme, Mécanique, Ingénierie bio-médicale, etc
- Acoustique musicale (modèles **EDP**)

Partie 1: Tutoriel

TUTORIEL

(Pratique des séries de Volterra en ingéniérie)

Séries de Volterra (syst. stationnaire, entrée simple)

Définition

Un syst. $\xrightarrow{u} \boxed{\{h_n\}} \xrightarrow{y}$ est défini par la série de Volterra $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ si

$$y(t) = \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty}}_{\text{Somme}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} h_n(\tau_1,\ldots,\tau_n)\,u(t-\tau_1)\ldots u(t-\tau_n)\,\mathrm{d}\tau_1\ldots\mathrm{d}\tau_n}_{\text{de multi-convolutions}}$$

Séries de Volterra (syst. stationnaire, entrée simple)

Définition

Un syst. $\xrightarrow{u} \boxed{\{h_n\}} \xrightarrow{y}$ est défini par la série de Volterra $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ si

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} h_n(\tau_1,\ldots,\tau_n)\, u(t-\tau_1)\ldots u(t-\tau_n)\, \mathrm{d}\tau_1\ldots\mathrm{d}\tau_n \\ &= \int_{\mathbb{R}} h_1(\tau_1)\, u(t-\tau_1)\, \mathrm{d}\tau_1 \end{aligned}$$

Exemples:

- Filtres linéaires: $h_n = 0$ pour $n \geq 2$

Séries de Volterra (syst. stationnaire, entrée simple)

Définition

Un syst. $\xrightarrow{u} \boxed{\{h_n\}} \xrightarrow{y}$ est défini par la série de Volterra $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ si

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} h_n(\tau_1,\ldots,\tau_n)\, u(t-\tau_1)\ldots u(t-\tau_n)\, \mathrm{d}\tau_1\ldots \mathrm{d}\tau_n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \left(u(t)\right)^n \qquad \text{Fct. DSE} \end{aligned}$$

Exemples:

- Filtres linéaires: $h_n = 0$ pour $n \geq 2$
- Fct sans mémoire: $h_n(\tau_1,\ldots,\tau_n) = \alpha_n\, \delta(\tau_1,\ldots,\tau_n)$

Séries de Volterra (syst. stationnaire, entrée simple)

Définition

Un syst. $\xrightarrow{u} \boxed{\{h_n\}} \xrightarrow{y}$ est défini par la série de Volterra $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ si

$$y(t) = \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty}}_{\text{Somme}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} h_n(\tau_1,\ldots,\tau_n)\, u(t-\tau_1)\ldots u(t-\tau_n)\, \mathrm{d}\tau_1\ldots\mathrm{d}\tau_n}_{\text{de multi-convolutions}}$$

Exemples:

- Filtres linéaires: $h_n = 0$ pour $n \geq 2$
- Fct sans mémoire: $h_n(\tau_1,\ldots,\tau_n) = \alpha_n\, \delta(\tau_1,\ldots,\tau_n)$
- Cas général: n=1 (contrib. lin.), n=2 (quadratique), etc

Propriétés et analogies avec les systèmes linéaires

Un système est causal, si

$$\tau < 0 \quad \Rightarrow \quad h(\tau) = 0 \qquad \text{(linéaire)}$$

$$\tau_k < 0 \quad \Rightarrow \quad h_n(\tau_1, \dots, \tau_k, \dots, \tau_n) = 0 \qquad \text{(Volterra)}$$

Propriétés et analogies avec les systèmes linéaires

Un système est causal, si

$\tau < 0 \quad \Rightarrow \quad h(\tau) = 0$ (linéaire)

$\tau_k < 0 \quad \Rightarrow \quad h_n(\tau_1, \ldots, \tau_k, \ldots, \tau_n) = 0$ (Volterra)

Domaine de Laplace (/idem Fourier) on note $(\tau_{1:n}) = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$

Fct. trsfrt $H(s) = \int_{\mathbb{R}} h(\tau) \mathrm{e}^{-s\tau} \mathrm{d}\tau$ (lin.)

Noy. trsfrt $H_n(s_{1:n}) = \int_{\mathbb{R}^n} h_n(\tau_{1:n}) \mathrm{e}^{-(s_1\tau_1 + \ldots + s_n\tau_n)} \mathrm{d}\tau_1 \ldots \mathrm{d}\tau_n$ (Volt.)

Propriétés et analogies avec les systèmes linéaires

Un système est causal, si

$\tau < 0 \quad \Rightarrow \quad h(\tau) = 0$ (linéaire)

$\tau_k < 0 \quad \Rightarrow \quad h_n(\tau_1, \ldots, \tau_k, \ldots, \tau_n) = 0$ (Volterra)

Domaine de Laplace (/idem Fourier) on note $(\tau_{1:n}) = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$

Fct. trsfrt $H(s) = \int_{\mathbb{R}} h(\tau) e^{-s\tau} \mathrm{d}\tau$ (lin.)

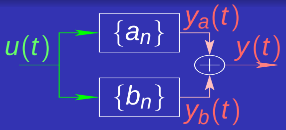
Noy. trsfrt $H_n(s_{1:n}) = \int_{\mathbb{R}^n} h_n(\tau_{1:n}) e^{-(s_1\tau_1 + \ldots + s_n\tau_n)} \mathrm{d}\tau_1 \ldots \mathrm{d}\tau_n$ (Volt.)

Pour un système causal stable: PAS de pôles (ni singularités)

de $H(s)$ pour $\Re e(s) > 0$ (linéaire)

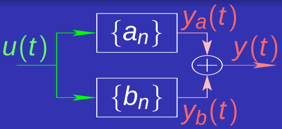
de $H_n(s_{1:n})$ pour $\Re e(s_1) > 0, \ldots, \Re e(s_n) > 0$ (Volterra)

Loi d’interconnexion: Somme



Calcul de $y(t) = y_a(t) + y_b(t)$

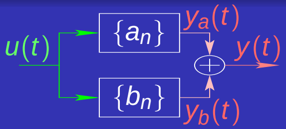
Loi d'interconnexion: Somme



Calcul de $y(t) = y_a(t) + y_b(t)$

$$
\begin{aligned}
y(t) \;=\; & \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} a_n(\tau_{1:n}) u(t-\tau_1)\dots u(t-\tau_n)\,\mathrm{d}\tau_1\dots\mathrm{d}\tau_n \\
& + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} b_n(\tau_{1:n}) u(t-\tau_1)\dots u(t-\tau_n)\,\mathrm{d}\tau_1\dots\mathrm{d}\tau_n
\end{aligned}
$$

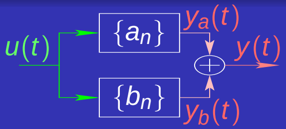
Loi d'interconnexion: Somme



Calcul de $y(t) = y_a(t) + y_b(t)$

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} a_n(\tau_{1:n}) u(t-\tau_1)\dots u(t-\tau_n)\, d\tau_1 \dots d\tau_n \\
&\quad + \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} b_n(\tau_{1:n}) u(t-\tau_1)\dots u(t-\tau_n)\, d\tau_1 \dots d\tau_n \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \left[a_n(\tau_{1:n}) + b_n(\tau_{1:n})\right] u(t-\tau_1)\dots u(t-\tau_n)\, d\tau_1 \dots d\tau_n
\end{aligned}
$$

Loi d'interconnexion: Somme



Calcul de $y(t) = y_a(t) + y_b(t)$

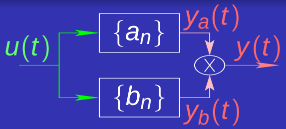
$$
\begin{aligned}
y(t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} a_n(\tau_{1:n}) u(t-\tau_1)\dots u(t-\tau_n)\,d\tau_1 \dots d\tau_n \\
&\quad + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} b_n(\tau_{1:n}) u(t-\tau_1)\dots u(t-\tau_n)\,d\tau_1 \dots d\tau_n \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \left[a_n(\tau_{1:n}) + b_n(\tau_{1:n})\right] u(t-\tau_1)\dots u(t-\tau_n)\,d\tau_1 \dots d\tau_n
\end{aligned}
$$

Résultat: Noyaux équivalents c_n

$$c_n(\tau_{1:n}) = a_n(\tau_{1:n}) + b_n(\tau_{1:n})$$

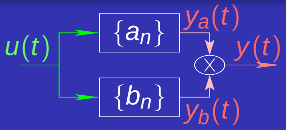
T. Laplace: $$C_n(s_{1:n}) = A_n(s_{1:n}) + B_n(s_{1:n})$$

Loi d'interconnexion: Produit



Calcul de $y(t) = y_a(t) y_b(t)$

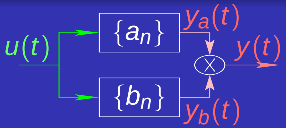
Loi d'interconnexion: Produit



Calcul de $y(t) = y_a(t)y_b(t)$

$$
\begin{aligned}
y(t) \quad = \quad & \sum_{p=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^p} a_p(\theta_{1:p}) u(t-\theta_1)\dots u(t-\theta_p)\,\mathrm{d}\theta_1 \dots \mathrm{d}\theta_p \\
& \times \sum_{q=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^q} b_q(\sigma_{1:q}) u(t-\sigma_1)\dots u(t-\sigma_q)\,\mathrm{d}\sigma_1 \dots \mathrm{d}\sigma_q
\end{aligned}
$$

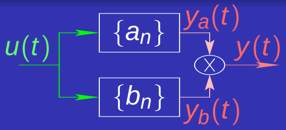
Loi d'interconnexion: Produit



Calcul de $y(t) = y_a(t)y_b(t)$

$$\begin{aligned}
y(t) &= \textstyle\sum_{p=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^p} a_p(\theta_{1:p}) u(t-\theta_1)\dots u(t-\theta_p)\, \mathrm{d}\theta_1 \dots \mathrm{d}\theta_p \\
&\quad \times \textstyle\sum_{q=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^q} b_q(\sigma_{1:q}) u(t-\sigma_1)\dots u(t-\sigma_q)\, \mathrm{d}\sigma_1 \dots \mathrm{d}\sigma_q \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \Big[\sum_{\substack{p,q\geq 1 \\ p+q=n}} a_p(\theta_{1:p}) b_q(\sigma_{1:q}) \Big] u(t-\theta_1)\dots u(t-\theta_p) \\
&\qquad u(t-\sigma_1)\dots u(t-\sigma_q)\, \mathrm{d}\theta_1 \dots \mathrm{d}\theta_p\, \mathrm{d}\sigma_1 \dots \mathrm{d}\sigma_q
\end{aligned}$$

Loi d'interconnexion: Produit



Calcul de $y(t) = y_a(t)y_b(t)$

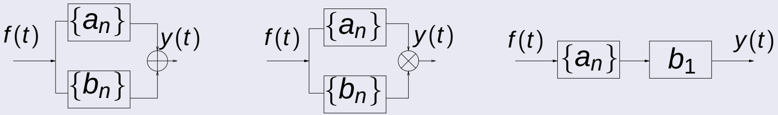
$$
\begin{aligned}
y(t) &= \sum_{p=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^p} a_p(\theta_{1:p}) u(t-\theta_1)\ldots u(t-\theta_p)\, \mathrm{d}\theta_1 \ldots \mathrm{d}\theta_p \\
&\quad \times \sum_{q=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^q} b_q(\sigma_{1:q}) u(t-\sigma_1)\ldots u(t-\sigma_q)\, \mathrm{d}\sigma_1 \ldots \mathrm{d}\sigma_q \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \Big[\sum_{\substack{p,q\geq 1 \\ p+q=n}} a_p(\theta_{1:p}) b_q(\sigma_{1:q}) \Big] u(t-\theta_1)\ldots u(t-\theta_p) \\
&\qquad u(t-\sigma_1)\ldots u(t-\sigma_q)\, \mathrm{d}\theta_1 \ldots \mathrm{d}\theta_p\, \mathrm{d}\sigma_1 \ldots \mathrm{d}\sigma_q
\end{aligned}
$$

Résultat: Noyaux équivalents c_n

$$c_n(\tau_{1:n}) = \sum_{p=1}^{n-1} a_p(\tau_{1:p}) b_{n-p}(\tau_{p+1:n})$$

T. Laplace: $$C_n(s_{1:n}) = \sum_{p=1}^{n-1} A_p(s_{1:p}) B_{n-p}(s_{p+1:n})$$

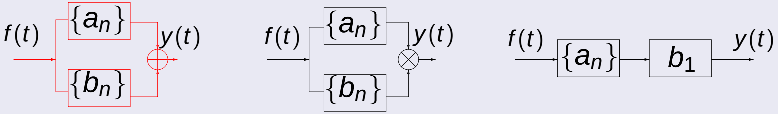
Somme, produit et cascade de systèmes



Noyaux de transfert équivalents C_n

A_n et B_n: noyaux de transfert des 2 séries

Somme, produit et cascade de systèmes

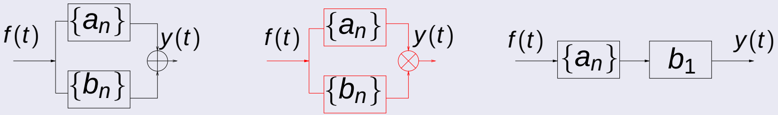


Noyaux de transfert équivalents C_n

A_n et B_n: noyaux de transfert des 2 séries

$$\text{Somme: } C_n(s_{1:n}) = A_n(s_{1:n}) + B_n(s_{1:n})$$

Somme, produit et cascade de systèmes

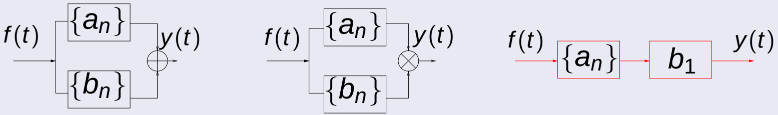


Noyaux de transfert équivalents C_n

A_n et B_n: noyaux de transfert des 2 séries

$$\begin{aligned} \text{Somme: } C_n(s_{1:n}) &= A_n(s_{1:n}) + B_n(s_{1:n}) \\ \text{Produit: } C_n(s_{1:n}) &= \sum_{p=1}^{n-1} A_p(s_{1:p}) B_{n-p}(s_{p+1:n}) \end{aligned}$$

Somme, produit et cascade de systèmes



Noyaux de transfert équivalents C_n

A_n et B_n: noyaux de transfert des 2 séries

$$\begin{aligned}
\text{Somme: } C_n(s_{1:n}) &= A_n(s_{1:n}) + B_n(s_{1:n}) \\
\text{Produit: } C_n(s_{1:n}) &= \sum_{p=1}^{n-1} A_p(s_{1:p}) B_{n-p}(s_{p+1:n}) \\
\text{Cascade avec un syst. lin.: } C_n(s_{1:n}) &= A_n(s_{1:n}) B_1(\widehat{s_{1:n}})
\end{aligned}$$

avec $\widehat{s_{1:n}} = s_1 + \ldots + s_n$.

Syst. annulateur: Ressort NL $\xrightarrow{f} \boxed{\{h_n\}} \xrightarrow{z}$

Equation (repos avant t=0)

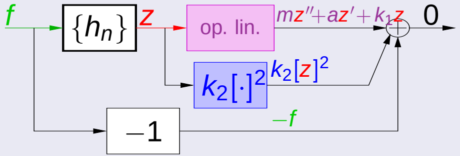
$$mz'' + az' + k_1 z + k_2 [z]^2 = f$$

Syst. annulateur: Ressort NL $\xrightarrow{f} \boxed{\{h_n\}} \xrightarrow{z}$

Equation (repos avant t=0)

$$mz'' + az' + k_1 z + k_2 \left[z\right]^2 = f$$

Système annulateur (diagr. bloc)

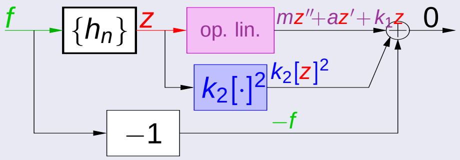


Syst. annulateur: Ressort NL $\xrightarrow{f} \boxed{\{h_n\}} \xrightarrow{z}$

Equation (repos avant t=0)

$$mz'' + az' + k_1 z + k_2 \left[z\right]^2 = f$$

Système annulateur (diagr. bloc)



Blocs élémentaires $\longrightarrow$ Noyaux de transfert équivalents

$\boxed{m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + k_1}$ $\rightarrow$ $Q_1(s) = ms^2 + as + k_1$, $Q_n = 0$ si $n \geq 2$

$\boxed{k_2[\cdot]^2}$ $\rightarrow$ interconnexion produit, puis $\times k_2$

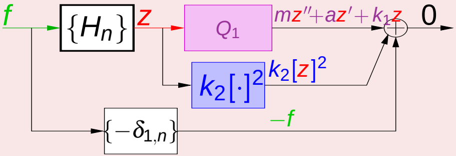
$\boxed{-1}$ $\rightarrow$ $-\delta_{1,n} = -1$ si $n = 1$ et $-\delta_{1,n} = 0$ sinon

Syst. annulateur: Ressort NL $\xrightarrow{f} \boxed{\{h_n\}} \xrightarrow{z}$

Equation (repos avant t=0)

$$mz'' + az' + k_1 z + k_2 \left[z\right]^2 = f$$

Système annulateur (diagr. bloc)



Blocs élémentaires $\longrightarrow$ Noyaux de transfert équivalents

$\boxed{m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + k_1}$ $\rightarrow$ $Q_1(s) = ms^2 + as + k_1$, $Q_n = 0$ si $n \geq 2$

$\boxed{k_2[\cdot]^2}$ $\rightarrow$ interconnexion produit, puis $\times k_2$

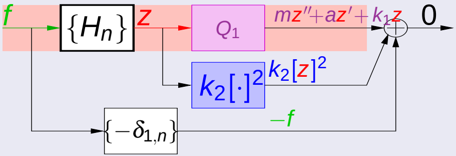
$\boxed{-1}$ $\rightarrow$ $-\delta_{1,n} = -1$ si $n = 1$ et $-\delta_{1,n} = 0$ sinon

Syst. annulateur: Ressort NL $\xrightarrow{f} \boxed{\{h_n\}} \xrightarrow{z}$

Equation (repos avant t=0)

$$mz'' + az' + k_1 z + k_2 [z]^2 = f$$

Système annulateur (diagr. bloc)



Noyau d'ordre *n* du *système annulateur*

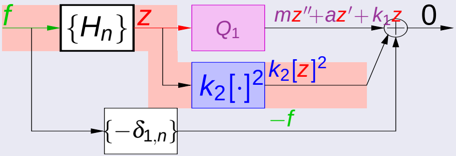
$$H_n(s_{1:n})Q_1(\widehat{s_{1:n}}) + k_2 \sum_{p=1}^{n-1} H_p(s_{1:p})H_{n-p}(s_{p+1:n}) + -\delta_{1,n} = 0$$

Syst. annulateur: Ressort NL $\xrightarrow{f} \boxed{\{h_n\}} \xrightarrow{z}$

Equation (repos avant t=0)

$$mz'' + az' + k_1 z + k_2 [z]^2 = f$$

Système annulateur (diagr. bloc)



Noyau d'ordre *n* du *système annulateur*

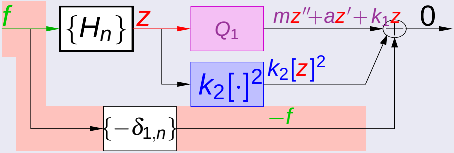
$$H_n(s_{1:n})Q_1(\widehat{s_{1:n}})$$
$$+ \quad k_2 \sum_{p=1}^{n-1} H_p(s_{1:p})H_{n-p}(s_{p+1:n})$$
$$+ \quad -\delta_{1,n} \qquad = 0$$

Syst. annulateur: Ressort NL $\xrightarrow{f} \boxed{\{h_n\}} \xrightarrow{z}$

Equation (repos avant t=0)

$$mz'' + az' + k_1 z + k_2 [z]^2 = f$$

Système annulateur (diagr. bloc)



Noyau d'ordre *n* du *système annulateur*

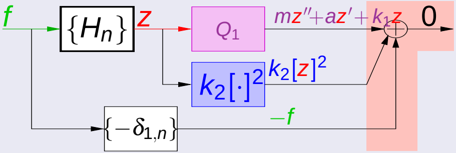
$$H_n(s_{1:n})Q_1(\widehat{s_{1:n}}) + k_2 \sum_{p=1}^{n-1} H_p(s_{1:p})H_{n-p}(s_{p+1:n}) + -\delta_{1,n} = 0$$

Syst. annulateur: Ressort NL $\xrightarrow{f} \boxed{\{h_n\}} \xrightarrow{z}$

Equation (repos avant t=0)

$$mz'' + az' + k_1 z + k_2 [z]^2 = f$$

Système annulateur (diagr. bloc)



Noyau d'ordre *n* du *système annulateur*

$$\begin{aligned} & H_n(s_{1:n})Q_1(\widehat{s_{1:n}}) \\ + \quad & k_2 \sum_{p=1}^{n-1} H_p(s_{1:p})H_{n-p}(s_{p+1:n}) \\ + \quad & -\delta_{1,n} \qquad\qquad = 0 \end{aligned}$$

Noyaux $\{H_n\}$ du système $\xrightarrow{f} \boxed{\{h_n\}} \xrightarrow{z}$

Solution générale : équation algébrique recursive ($n \geq 1$)

$$H_n(s_{1:n}) = \frac{\delta_{1,n} - k_2 \overbrace{\sum_{p=1}^{n-1} H_p(s_{1:p}) H_{n-p}(s_{p+1:n})}^{\text{ordres} < n}}{Q_1(\widehat{s_{1:n}})}$$

avec $Q_1(s) = ms^2 + as + k_1$

Noyaux $\{H_n\}$ du système $\xrightarrow{f} \boxed{\{h_n\}} \xrightarrow{z}$

Solution générale : équation algébrique recursive ($n \geq 1$)

$$H_n(s_{1:n}) = \frac{\delta_{1,n} - k_2 \overbrace{\sum_{p=1}^{n-1} H_p(s_{1:p}) H_{n-p}(s_{p+1:n})}^{\text{ordres} < n}}{Q_1(\widehat{s_{1:n}})}$$

avec $Q_1(s) = ms^2 + as + k_1$

Premiers noyaux ($n = 1, 2$,etc)

$H_1(s_1) = [Q_1(s_1)]^{-1}$

$H_2(s_1, s_2) = -k_2 [Q_1(s_1) Q_1(s_2) Q_1(s_1 + s_2)]^{-1}$

etc...

En résumé:

On transforme un problème faiblement non linéaire
en une infinité de problèmes linéaires qu'on sait résoudre.

En résumé:

On transforme un problème faiblement non linéaire
en une infinité de problèmes linéaires qu'on sait résoudre.

En pratique :

On tronque la série pour avoir les premières distorsions

En résumé:

On transforme un problème faiblement non linéaire
en une infinité de problèmes linéaires qu'on sait résoudre.

En pratique :

On tronque la série pour avoir les premières distorsions

Extension aux équations aux dérivées partielles:

même principe: cf. Applications

En résumé:

On transforme un problème faiblement non linéaire
en une infinité de problèmes linéaires qu'on sait résoudre.

En pratique :

On tronque la série pour avoir les premières distorsions

Extension aux équations aux dérivées partielles:

même principe: cf. Applications

Pour la simulation :

On construit des **structures "faible coût" réalisables à partir des noyaux**

Partie 2: Calcul de domaines de convergence

CALCULS DE DOMAINES DE CONVERGENCE

[Hélie,Laroche]

Notations

- $\mathbb{T}$ désigne soit $[0,T]$ où $T>0$, soit $\mathbb{R}_+$.
- $\mathbb{U}$ and $\mathbb{X}$ espaces de Banach sur $\mathbb{R}$.
- $\mathscr{L}(\mathbb{U},\mathbb{X})$ et $\mathscr{L}(\mathbb{X})$: opérateurs linéaires bornés.
- $\mathscr{M}\mathscr{L}_j(\mathbb{X},\mathbb{X})$ ($j\geq 2$) : opérateurs multilinéaires bornés de $\underbrace{\mathbb{X}\times\cdots\times\mathbb{X}}_{j}$ dans $\mathbb{X}$, $\|E\|=\sup_{\substack{(x_1,\dots,x_j)\in\mathbb{X}^j\\ \|x_1\|=\cdots=\|x_j\|=1}}\|E(x_1,\dots,x_j)\|$.
- $\mathscr{M}\mathscr{L}_{j,k}(\mathbb{X},\mathbb{U},\mathbb{X})$ ($j\geq 1$, $k\geq 1$): opérateurs multilinéaires bornés de $\underbrace{\mathbb{X}\times\cdots\times\mathbb{X}}_{j}\times\underbrace{\mathbb{U}\times\cdots\times\mathbb{U}}_{k}$ dans $\mathbb{X}$,
  $\|E\|=\sup_{\substack{(x_1,\dots,x_j,u_1,\dots,u_k)\in\mathbb{X}^j\times\mathbb{U}^k\\ \|x_1\|=\cdots=\|u_k\|=1}}\|E(x_1,\dots,x_j,u_1,\dots,u_k)\|$.
- $\mathscr{U}=L^\infty(\mathbb{T},\mathbb{U})$, $\mathscr{X}=L^\infty(\mathbb{T},\mathbb{X})$.

Système analytique contrôlé

Problème considéré:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = Ax + Bu + P(x) + Q(x,u), \text{ sur } \mathbb{T}, \qquad (1)$$

$$x(0) = x_{\text{ini}} \in \mathbb{X}. \qquad (2)$$

- A génère un semi-groupe C_0 sur $\mathbb{X}$, S, borne de croissance α (< 0 si $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$).
- $\beta > 0$ plus petit réel / pour $t \in \mathbb{T}$, $\|S(t)\|_{\mathscr{L}(\mathbb{X},\mathbb{X})} \leq \beta \exp(\alpha t)$.
- $B \in \mathscr{L}(\mathbb{U},\mathbb{X})$, $u \in \mathscr{U}$

Système analytique contrôlé

Problème considéré:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = Ax + Bu + P(x) + Q(x,u), \text{ sur } \mathbb{T}, \quad (1)$$

$$x(0) = x_{\text{ini}} \in \mathbb{X}. \quad (2)$$

- $P(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} A_k(\underbrace{x,\ldots,x}_{k})$, $Q(x,u) = \sum_{k=2}^{+\infty} B_k(\underbrace{x,\ldots,x}_{k-1},u)$,
- $A_k \in \mathscr{M}\mathscr{L}_j(\mathbb{X},\mathbb{X})$ et $B_k \in \mathscr{M}\mathscr{L}_{k-1,1}(\mathbb{X},\mathbb{U},\mathbb{X})$,
- $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} \|A_k\|_{\mathscr{M}\mathscr{L}_k(\mathbb{X},\mathbb{X})} z^k$, $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} \|B_k\|_{\mathscr{M}\mathscr{L}_{k-1,1}(\mathbb{X},\mathbb{U},\mathbb{X})} z^{k-1}$ analytiques en $z = 0$.

Mise sous forme perturbative

- On introduit un paramètre de perturbation η
  $u = \eta v \quad , x_{\text{ini}} = \eta \widetilde{x_{\text{ini}}},$

- Le problème s'écrit

$$\frac{\partial x}{\partial t} = (Ax + P(x)) + \eta(Bv + Q(x,v)),$$
$$x(0) = \eta \widetilde{x_{\text{ini}}}$$

- Solution sous la forme

$$x = \sum_{m=0}^{\infty} \eta^m \tilde{x}_m = \sum_{m=0}^{\infty} x_m, \text{ où } x_m = \eta^m \tilde{x}_m.$$

Construction formelle

Substitution et reclassement sur les puissances de η:

$$\begin{aligned} & x_0 = 0, \\ \forall t \in \mathbb{T}, \quad & x_1(t) = S(t)x_{\mathrm{ini}} + \int_0^t S(t-\tau)B\,u(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \\ & x_m(t) = \int_0^t S(t-\tau)\chi_m(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \qquad m \geq 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi_m(\tau) \quad = \quad & \sum_{k=2}^{m} \sum_{p \in \mathbb{M}_m^k} A_k\Big(x_{p_1}(\tau), \ldots, x_{p_k}(\tau)\Big) \\ & + \sum_{k=2}^{m} \sum_{\begin{cases} q \in \mathbb{M}_m^k \\ q_k = 1 \end{cases}} B_k\big(x_{q_1}(\tau), \ldots, x_{q_{k-1}}(\tau), u(\tau)\big), \end{aligned}$$

$\mathbb{M}_m^K$ ensemble des multi-index défini pour $m \in \mathbb{N}^*$ et $K \in \mathbb{N}^*$ par

$$\mathbb{M}_m^K = \Big\{ p \in (\mathbb{N}^*)^K \mid p_1 + \cdots + p_K = m \Big\}.$$

Majoration des $\|x_m\|_{\mathscr{X}}$

Lemme (1)

Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, χ_m et x_m sont dans $\mathscr{X}$. De plus, si $m \geq 2$:

$$\begin{aligned}\|x_m\|_{\mathscr{X}} \;\leq\; & \sum_{k=2}^{m} \Bigg[a_k \sum_{p \in \mathbb{M}_m^k} \prod_{i=1}^{k} \|x_{p_i}\|_{\mathscr{X}} \\ & + b_k \sum_{\left\{\begin{smallmatrix} q \in \mathbb{M}_m^k \\ q_k = 1 \end{smallmatrix}\right.} \left(\prod_{i=1}^{k-1} \|x_{q_i}\|_{\mathscr{X}} \right) \|u\|_{\mathscr{U}} \Bigg],\end{aligned} \tag{3}$$

avec $a_k = \gamma \|A_k\|_{\mathscr{M}\mathscr{L}_k(\mathbb{X},\mathbb{X})}$, $b_k = \gamma \|B_k\|_{\mathscr{M}\mathscr{L}_{k-1,1}(\mathbb{X},\mathbb{U},\mathbb{X})}$ et

$$\int_{\mathbb{T}} \|S(\theta)\|_{\mathscr{L}(\mathbb{X},\mathbb{X})} \,\mathrm{d}\theta \leq \gamma < \infty.$$

Résultat de convergence I

Soit $\varepsilon > 0$,

(i) notons $a(z) = \sum_{k=2}^{+\infty} a_k z^{k-1}$, $b(z) = \sum_{k=2}^{+\infty} b_k z^{k-1}$,
(où les a_k et b_k sont définis dans le lemme 1),

(ii) et définissons la fonction

$$F_\varepsilon(z) = \frac{1+\varepsilon b(z)}{1-a(z)},$$

de rayon de convergence en $z = 0$ égal à $r \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$.

Résultat de convergence II

Theorème (Un résultat d'inversion)

L'équation

$$x F'_\varepsilon(x) - F_\varepsilon(x) = 0$$

a soit une unique solution σ *(cas 1) ou aucune solution (cas 2) dans l'intervalle* $]0, r[$*. On définit* $\rho^\star_\varepsilon > 0$ *par*

$$\text{(cas 1)} \qquad \rho^\star_\varepsilon = \frac{\sigma}{F(\sigma)}, \tag{4}$$

$$\text{(cas 2)} \qquad \rho^\star_\varepsilon = \lim_{x \to r^-} \frac{x}{F(x)}. \tag{5}$$

Alors il existe une unique $z \mapsto \Phi_\varepsilon(z)$ *analytique en* $z = 0$ *tq:*

$$\Phi_\varepsilon(z) = z F_\varepsilon\big(\Phi_\varepsilon(z)\big).$$

Son rayon de convergence est $= \rho^\star_\varepsilon$ *(cas 1) ou* $\geq \rho^\star_\varepsilon$ *(cas 2) .*

Résulat de convergence III

Theorème

Soient $u \in \mathscr{U}$ *et* $x_{\text{ini}} \in \mathbb{X}$, *et* $x_1 =$ *definini par* $x_1(t) = S(t)x_{\text{ini}} + \int_0^t S(t-\tau)Bu(\tau)\,\mathrm{d}\tau$. *Si*

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mathscr{U}} &\leq \varepsilon \|x_1\|_{\mathscr{X}}, \\ \|x_1\|_{\mathscr{X}} &< \rho_\varepsilon, \end{aligned}$$

alors la série $x = \sum_{m \in \mathbb{N}^*} x_m$ *est normalement convergente dans* $\mathscr{X}$ *avec*

$$\|x\|_{\mathscr{X}} \leq \Phi_\varepsilon\left(\|x_1\|_{\mathscr{X}}\right).$$

(i.e: $z \mapsto \Phi_\varepsilon\left(z\|x_1\|_{\mathscr{X}}\right)$ *domine* $z \mapsto \sum_{m\in\mathbb{N}^*} \|x_m\|_{\mathscr{X}} z^m$ *lorsque* $|z| < 1$.*)*

Idées de preuve

- th.II: conséquence directe des th. d'inversion régulière et singulière [Flajeolet, Sedgwick].
- th. III: on construit une suite $(\phi_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ tq $\phi_1 = 1$, et

$$\phi_m = \sum_{k=2}^{m} a_k \sum_{p\in\mathbb{M}_m^k} \prod_{i=1}^{k} \phi_{p_i} + \varepsilon \sum_{k=2}^{m} b_k \sum_{\left\{\substack{q\in\mathbb{M}_m^k \\ q_k=1}\right.} \prod_{i=1}^{k-1} \phi_{q_i}.$$

- on montre que $\left\|x_m\right\|_{\mathscr{X}} \le \phi_m \left\|x_1\right\|_{\mathscr{X}}^m$
- on définit $\Phi_\varepsilon(X) = \sum_{m=1}^{\infty} \phi_m X^m$ et on montre que $\Phi_\varepsilon(z) = z\,F_\varepsilon\big(\Phi_\varepsilon(z)\big)$.
- le tour est joué!

Exemples: Une EDO quadratique

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -cx + dx^2 + u, \quad x(0) = x_{\mathrm{ini}} > 0$$

$c, d > 0$, $\mathbb{T} = [0, +\infty[$.
Algorithme:

- $S(t) = e^{-ct}, \gamma = 1/c, a(z) = \frac{d}{c}z, b(z) = 0,$
- $F(z) = 1/(1 - \frac{d}{c}z)$, (indpt de ε)
- $r = c/d$, et σ vérifie $\sigma = \frac{c}{2d}$.
- x_1 est la fonction $t \to x_{\mathrm{ini}}e^{-ct} + \int_0^t e^{-c(t-\tau)}u(\tau)\mathrm{d}\tau$,

$$\rho^\star = c/4d.$$

Simulation

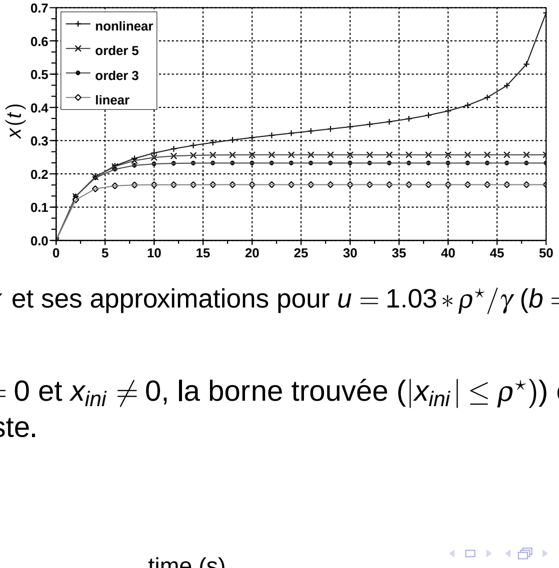


Figure: x et ses approximations pour $u = 1.03 * \rho^\star/\gamma$ ($b = 1$, $x_{ini} = 0$).

Pour $u = 0$ et $x_{ini} \neq 0$, la borne trouvée ($|x_{ini}| \leq \rho^\star$)) est très pessimiste.

Stabilisation avec saturation

$$\frac{\partial x}{\partial t} = ax - \tanh(\gamma x) + u, \tag{6}$$

où $\gamma > a > 0$ et $x(0) = 0$. On trouve pour $T = +\infty$ que

$$\rho^\star = \left[(2-\xi)\arctan\sqrt{1-\xi}\right] - \sqrt{1-\xi}, \text{ où } \xi = \frac{a}{\gamma}.$$

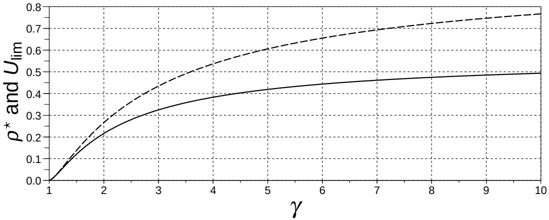


Figure: $\rho^\star$ (trait plein) et U_{lim} (trait pointillé) en fonction de γ.

EDP de réaction diffusion

Equation de réaction-diffusion 1-D conditions de Dirichlet

$$
\begin{aligned}
\partial_t f(t,z) &= \nu \partial_z^2 f(t,z) - \mu f(t,z) + f(t,z)\int_0^1 f(t,x)dx + h(z)u(t), && (7)\\
f(t,0) &= f(t,1) = 0, && (8)\\
f(0,z) &= 0 && (9)
\end{aligned}
$$

f définie sur $\mathbb{T}\times[0,1]$ avec $\mathbb{T}=\mathbb{R}_+$, $h\in C\big([0,1]\big)$, ν, μ constants positifs

EDP de réaction diffusion

- $\mathbb{U} = \mathbb{R}$, $\mathbb{X} = L^2([0,1])$,
- Operateur A de domaine $\mathscr{D}(A) = H^2(0,1) \cap H^1_0(0,1)$,

$$A = \nu \partial_z^2 - \mu I,$$

  Operateur B:

$$B(u) : z \mapsto h(z)u.$$

- $P(x) = A_2(x,x)$ avec $A_2 : (x,y) \mapsto x < y, 1 >$ et $Q = 0$.

EDP de réaction diffusion

A générateur infinitésimal de S tq

$$\|S(t)\|_{\mathscr{L}(\mathbb{X},\mathbb{X})} \leq M \exp(\lambda_1 t),$$

avec $M = 1$ et $\lambda_1 = -(\mu + \nu\pi^2)$

$$\gamma = M \frac{1 - \exp(\lambda_1 T)}{|\lambda_1|}.$$

$a_2 = \gamma$, $F_\varepsilon(X) = F(X) = \frac{1}{1-\gamma X}$, $\sigma = \frac{1}{2\gamma}$

$\rho^\star = \dfrac{1}{4\gamma}$., convergence pour $\|x_1\|_{\mathscr{X}} < \rho^\star$.

Simulations numériques

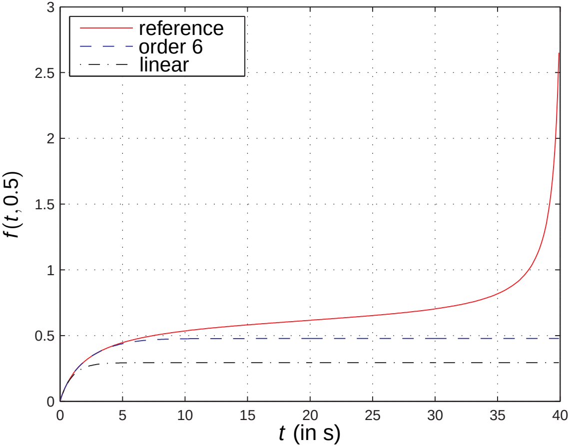


Figure: Simulation de $f(t, 0.5)$ pour $x_{\text{ini}} = 0$ et $u(t) = 1.1\rho^{\star}$; $\nu = 0.005$, $\mu = 1$ et $h : z \mapsto sin(\pi z)$ (1ere fonction propre de A),

PARTIE 3: Applications pour la synthèse sonore

- **Application 1:** Résultats pour un modèle non linéaire de corde

  [Helie,Roze: JSV 2008]

- **Application 2:** Propagation non linéaire dans les instruments de type cuivre

  [Helie,Hasler: IJC 2004] et [Helie,Smet: IEEE MED 2008]

L'IRCAM: Institut de Recherche et Coordination Acoustique/Musique [CNRS UMR 9912]

http://www.ircam.fr

ircam
Centre
Pompidou

Création : en ***1971*** par ***Pierre Boulez***

Vocation : interaction entre

- ***recherche*** scientifique (son & musique)
- ***développement*** technologique
- ***création musicale*** contemporaine

Équipe Analyse-Synthèse :

- ***modèles de synthèse***
- procédés d'***analyse*** des sons
- outils de ***transformation*** des sons

Application 1

Résultats pour un modèle non linéaire de corde (Kirchhoff)

[Hélie,Roze:JSV 2008]

Model

The Kirchhoff equation (u: transverse displacement)

$$\forall (x,t) \in \Omega =]0;1[\times \mathbb{R}^{+*}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \quad = \quad 1 \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} +$$

Model

The Kirchhoff equation (u: transverse displacement)

$$\forall (x,t) \in \Omega =]0;1[\times \mathbb{R}^{+*}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial t} - \beta \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \quad 1 + \qquad\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} +$$

(α, β): damping

Model

The Kirchhoff equation (u: transverse displacement)

$$\forall (x,t) \in \Omega =]0;1[\times \mathbb{R}^{+*}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial t} - \beta \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \quad 1 + \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \phi(x) f(t)$$

(α, β): damping

$f(t)$: excitation force

Model

The Kirchhoff equation (u: transverse displacement)

$$\forall (x,t) \in \Omega =]0;1[\times \mathbb{R}^{+*}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial t} - \beta \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left[1 + \varepsilon \int_0^1 \| \frac{\partial u}{\partial x} \|^2 \mathrm{d}x\right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \phi(x) f(t)$$

(α, β): damping ε: nonlinear coefficient $f(t)$: excitation force

Model

The Kirchhoff equation (u: transverse displacement)

$$\forall(x,t)\in\Omega=]0;1[\times\mathbb{R}^{+*}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\alpha\frac{\partial u}{\partial t}-\beta\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\left[1+\varepsilon\int_0^1\|\frac{\partial u}{\partial x}\|^2\mathrm{d}x\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\phi(x)f(t)$$

(α,β): damping ε: nonlinear coefficient $f(t)$: excitation force

Boundary and initial conditions

$$\begin{aligned}\text{Dirichlet homegeneous:}\quad & u(x=0,t)=u(x=1,t)=0\\ \text{At rest for } t\leq 0:\quad & u(x,t)=\partial_t u(x,t)=0\end{aligned}$$

Equation satisfied by the Volterra kernels

Kirchhoff equation of the string

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial t} - \beta \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left[1 + \varepsilon \int_0^1 \| \frac{\partial u}{\partial x} \|^2 \mathrm{d}x \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \phi(x) f(t) = 0$$

Equation satisfied by the Volterra kernels

Kirchhoff equation of the string

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial t} - \beta \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left[1 + \varepsilon \int_0^1 \| \frac{\partial u}{\partial x} \|^2 \mathrm{d}x\right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \phi(x) f(t) = 0$$

Definition of the solution as a Volterra series

$$f(t) \longrightarrow \boxed{\{h_n^{(x)}\}} \longrightarrow u(x,t)$$

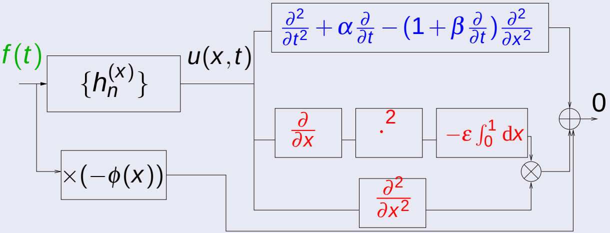
Volterra kernels must be paremetrized in space: $\{h_n\} \rightarrow \{h_n^{(x)}\}$.

Equation satisfied by the Volterra kernels

Kirchhoff equation of the string

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial t} - \beta \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left[1 + \varepsilon \int_0^1 \| \frac{\partial u}{\partial x} \|^2 \mathrm{d}x \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \phi(x) f(t) = 0$$

Cancelling system in the time domain

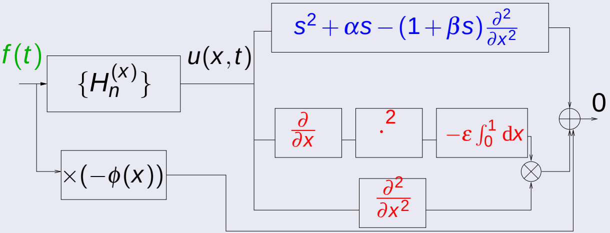


Equation satisfied by the Volterra kernels

Kirchhoff equation of the string

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial t} - \beta \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left[1 + \varepsilon \int_0^1 \|\frac{\partial u}{\partial x}\|^2 \mathrm{d}x\right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \phi(x) f(t) = 0$$

Cancelling system in the Laplace domain

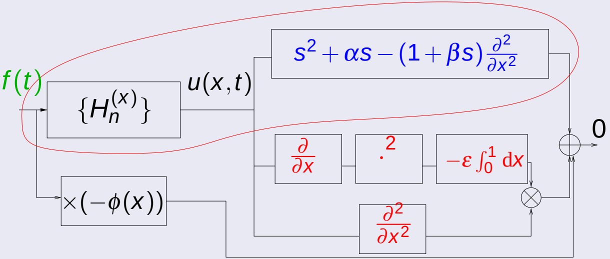


Equation satisfied by the Volterra kernels

Kirchhoff equation of the string

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial t} - \beta \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left[1+\varepsilon\int_0^1 \left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|^2 \mathrm{d}x\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \phi(x) f(t) = 0$$

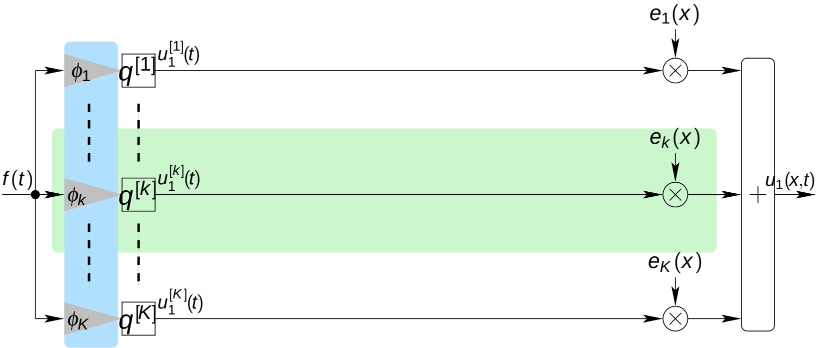
Cancelling system in the Laplace domain



$$\left[(\widehat{s_{1:n}})^2 + \alpha(\widehat{s_{1:n}}) - (1+\beta(\widehat{s_{1:n}}))\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right] H_n^{(x)}(s_{1:n})$$ .... etc

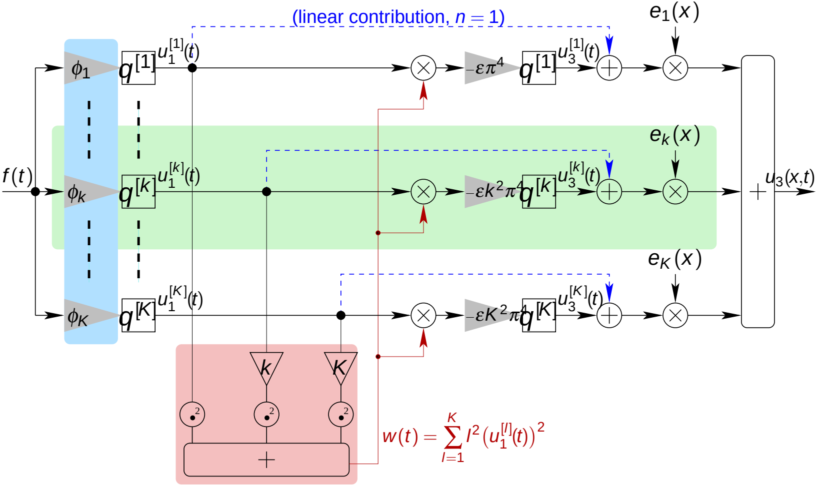
Solution and realization (see details in [JSV 2008])

(Projection of Volterra kernels on the L^2-modal basis $\mathscr{B} = \{e_k(x) = \sqrt{2}\sin(k\pi x)\}$)



Solution and realization (see details in [JSV 2008])

(Projection of Volterra kernels on the L^2-modal basis $\mathscr{B} = \{e_k(x) = \sqrt{2}\sin(k\pi x)\}$)



Application 2

Propagation non linéaire dans les instruments de type cuivre

[Helie,Smet: IEEE MED 2008]

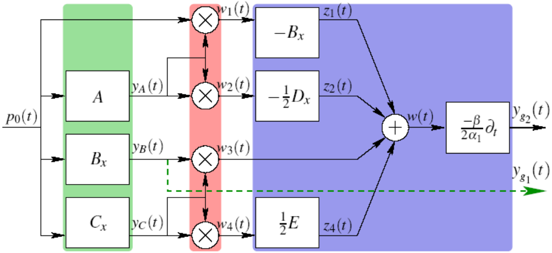
$$\partial_x p + \partial_t p + \alpha \partial_t^{1/2} p = \frac{\beta}{2} \partial_t p^2, \qquad x, t > 0$$

$$p(x=0,t) = p_0(t)$$

C.I. nulles

Résultat

Realistic case: 2nd order realization



Structure composed of sums, products and linear filters with (irrational) transfer functions:

$A(s) = 1/\sqrt{s}$, $\quad B_x(s) = G_1^{x,1}(s) = e^{-\alpha_1 x\sqrt{s}}$,

$C_x(s) = e^{-\alpha_1 x\sqrt{s}}/\sqrt{s}$ $\quad D(s) = \sqrt{s}\,e^{-\alpha_1 x\sqrt{s}}$, $\quad E(s) = \sqrt{s}$

CONCLUSION

Perspectives

Perpectives

- Convergence pour des systèmes analytiques en l'état et l'entrée

Perspectives

Perpectives

- Convergence pour des systèmes analytiques en l'état et l'entrée
- Convergence pour des classes d'EDP plus générales

Perspectives

Perpectives

- Convergence pour des systèmes analytiques en l'état et l'entrée
- Convergence pour des classes d'EDP plus générales
- Résolution d'EDP en noyaux de "Green-Poisson-Volterra"

Perspectives

Perpectives

- Convergence pour des systèmes analytiques en l'état et l'entrée
- Convergence pour des classes d'EDP plus générales
- Résolution d'EDP en noyaux de “Green-Poisson-Volterra”
- Etude des séries divergentes, troncature optimale

Perspectives

Perpectives

- Convergence pour des systèmes analytiques en l'état et l'entrée
- Convergence pour des classes d'EDP plus générales
- Résolution d'EDP en noyaux de "Green-Poisson-Volterra"
- Etude des séries divergentes, troncature optimale
- Couplage avec des techniques de réduction de modèle

Références

V. Volterra. *Theory of Functionnals and of Integral and Integro-Differential Equations*. Dover Publications, 1959.

Point de vue **“entrée/sortie”** et **“réalisation”**:

- W. J. Rugh. *Nonlinear System Theory, The Volterra/Wiener approach*. The Johns Hopkins University Press, 1981.
- S. Boyd and L. Chua. Fading memory and the problem of approximating nonlinear operators with Voltera series. *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, 32(11):1150–1161, 1985.
- P. E. Crouch and P. C. Collingwood. The observation space and realizations of finite volterra series. *SIAM journal on control and optimization*, 25(2):316–333, 1987.
- M. Schetzen. *The Volterra and Wiener theories of nonlinear systems*. Wiley-Interscience, 1989.

Références

Systèmes dynamiques analytiques et linéaires analytiques:

- R. W. Brockett. Volterra series and geometric control theory. *Automatica*, 12:167–176, 1976.
- E. G. Gilbert. Functional expansions for the response of nonlinear differential systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, 22:909–921, 1977.
- C. Lesiak, A.J. Krener. the existence and uniqueness of Volterra series for nonlinear systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, 23:1090–1095, 1978.
- M. Fliess. Fonctionnelles causales non linéaires et indéterminées non commutatives. *Bulletin de la S.M.F.*, 109:3–40, 1981.
- M. Fliess, M. Lamnabhi, and F. Lamnabhi-Lagarrigue. An algebraic approach to nonlinear functional expansions. *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, 30(8):554–570, 1983.
- A. Isidori. *Nonlinear control systems (3rd ed.)*. Springer, 3rd

Références

Convergence (algorithme de calcul de domaines)

- R. W. Brockett. Convergence of Volterra series on infinite intervals and bilinear approximations. In V. Lakshmikanthan, editor, *Nonlinear Systems and Applications*, pages 39–46. Academic Press, 1977.
- F. Bullo. Series expansions for analytic systems linear in control. *Automatica*, 38:1425–1432, 2002.
- Z. K. Peng and Z. Q. Lang. On the convergence of the Volterra-series representation of the Duffing's oscillators subjected to harmonic excitations. *Journal of Sound and Vibration*, 305:322–332, 2007.

Références

Convergence (algorithme de calcul de domaines), suite

- X. J. Jing, Z. Q. Lang, and S. A. Billings. Magnitude bounds of generalized frequency response functions for nonlinear Volterra systems described by narx model. *Automatica*, 44:838–845, 2008.
- T. Hélie and B. Laroche. On the convergence of volterra series of finite dimensional quadratic mimo systems. *International Journal of Control, special issue in Honor of Michel Fliess 60 th-birthday*, 81-3:358–370, 2008.
- T. Hélie and B. Laroche. Computation of convergence bounds for Volterra series of analytic single input systems. *IEEE Transactions on Automatic Control. 2010 (to appear)*