

Rapport de stage - Master 2 SAR ATIAM

Thomas Hézard

thomas.hezard@ircam.fr, 01 44 78 43 02

30 juin 2010

Sujet : Ondes découplées et ondes progressives dans les tubes acoustiques à section variable pour la représentation en guides d'ondes.

Etudiant : Thomas Hézard
Master 2 Informatique - spécialité SAR - parcours ATIAM
thomas.hezard@ircam.fr, 06 67 06 43 03

Laboratoire d'accueil : IRCAM - CNRS UMR 9912
Equipe Analyse-Synthèse
1, place Igor Stravinsky,
75004 Paris

Encadrant : Dr. Thomas Hélie, CR1 CNRS à l'IRCAM
thomas.helie@ircam.fr, 01 44 78 48 24

Co-encadrant : Dr. Rémi Mignot, Post-doctorant
Institut Langevin, ESPCI ParisTech
10 rue de Vauquelin, 75005 Paris
remi.mignot@espci.fr

Enseignant référent : Emmanuel Saint-James
emmanuel.saint-james@lip6.fr



version 1.3, mars 2011

Table des matières

Introduction	4
Contexte et état de l’art	4
Problème posé	5
I Études préliminaires	7
1 Cas des tubes droits sans pertes	8
1.1 Ondes découplées dans les tubes droits sans pertes	8
1.2 Transposition de la méthode pour le cas des tubes courbes	10
2 Modèle considéré dans les tubes à section variable	10
2.1 Définitions de fonctions	10
2.2 Modèle de Webster-Lokshin à abscisse curviligne	11
3 Ondes découplées dans les tubes courbes avec le modèle de Webster-Lokshin à abscisse curviligne et apparition des instabilités	12
II Changement de variables en ondes découplées informées par la géométrie	15
4 Adimensionnement, convention axiale et convention “tronçon”	16
4.1 Notations	16
4.2 Adimensionnement	16
4.2.1 Variables spatiales et fonctions géométriques	16
4.2.2 Variables temporelles et fonctions acoustiques	17
4.2.3 Modèle de Webster-Lokshin	17
4.3 Convention axiale et convention “tronçon”	17
5 Considérations géométriques	18
5.1 Paramétrisation du rayon	18
5.2 Profils physiquement réalistes	20
6 Résolution du modèle et diagonalisation de la matrice de transfert acoustique	21
6.1 Résolution du modèle de Webster-Lokshin à abscisse curviligne	21
6.2 Recherche d’ondes découplées	22
6.2.1 Démarche adoptée	22
6.2.2 Recherche des valeurs propres	23
6.2.3 Paramétrisation des espaces propres	24
6.3 Etudes et interprétation des valeurs propres	26
Conclusion et perspectives	46

Table des figures

1	Propagation d'ondes découplées dans un tube droit	9
2	Fonctions ϕ_1 et ϕ_2	10
3	Fonctions Φ	11
4	Tronçon à profil convexe	13
5	Tube à rayon négatif	14
6	Convention axiale	18
7	Convention tronçon	18
8	Fonctions S^l et S^r pour $\Upsilon < 0$ (en haut), $\Upsilon = 0$ (au milieu) et $\Upsilon > 0$ (en bas) . .	20
9	Décomposition en quadripôles de transfert.	25
10	3 types de tubes évasés	27
11	Catégorisation des différentes géométries de tube	28
12	Diagramme des Bode des opérateurs de propagation, tube concave (à gauche) et tube conique (à droite)	29
13	Diagramme des Bode des opérateurs de propagation, géométrie de type S (à gauche) et géométrie de type exponentiel (à droite)	30
14	Diagramme des Bode des opérateurs de propagation, géométrie de type C	31
15	Evolution des diagrammes de Bode des valeurs propres en fonction de Υ	45

Introduction

Contexte et état de l'art

La modélisation physique des instruments de musique a un intérêt majeur en synthèse sonore. En effet, elle permet de reproduire le comportement complet de l'instrument, incluant par exemple les transitoires d'attaque, de façon naturelle. Si la modélisation physique n'est pas une idée nouvelle, les avancées récentes dans ce domaine ont montré l'importance et l'intérêt de cet outil de modélisation comme en témoigne le nombre croissant de logiciels musicaux utilisant ce type de simulation.

Nous nous intéressons ici à la modélisation physique des tubes acoustiques pour la simulation réaliste des instruments à vent, et plus précisément des cuivres. Deux hypothèses historiques précèdent l'ensemble des travaux présentés ici : l'influence de l'enroulement de l'instrument est négligé et les tubes déroulés sont considérés comme axisymétriques. Ainsi un tube acoustique est entièrement décrit par son profil (aussi appelé "perce") : le relevé du rayon du tube le long de son axe de symétrie.

Des travaux réalisés à l'IRCAM ont permis d'aboutir à des modèles réalistes et efficaces de propagation dans les instruments à vent basés le modèle de Webster-Lokshin à abscisse curviligne [1]. Contrairement aux modèles précédents, ces modèles introduisent la prise en compte de la courbure du rayon des tubes et des pertes visco-thermiques à la paroi interne du tube. Sous certaines contraintes, ce modèle a été résolu sous la forme d'une matrice de transfert acoustique liant le couple pression/débit à la sortie du tube au couple pression/débit à l'entrée du tube.

Les guides d'onde [2, 3, 4] sont des structures bien adaptées à la synthèse temps-réel et des premiers résultats aboutissant à des structures de Kelly-Lochbaum pour les tubes courbes ont été trouvés [5, 6]. Une étude plus récente a permis de mettre en oeuvre des structures en guides d'onde bien adaptées à la synthèse sonore temps-réel [6]. Ces modèles sont basés sur une décomposition en quadripôles de transfert des matrices de transfert acoustique solutions du modèle de Webster-Lokshin à abscisse curviligne.

L'étude présentée ici se place, entre autres, dans le cadre d'un travail sur des outils informatiques pour la lutherie. En effet, des travaux récents ont permis de mettre en oeuvre des premiers outils permettant l'estimation d'un modèle géométrique d'un profil d'instrument quelconque permettant la résolution du modèle de Webster-Lokshin [7] (joint à la fin de ce document). Ainsi, il est aujourd'hui possible, à partir du relevé de la perce d'un instrument existant ou bien du tracé de la perce d'un instrument avant sa première fabrication, de calculer des paramètres acoustiques tels que impédance et transmittance ou d'obtenir une version simulable en temps-réel de l'instrument.

Problème posé

La décomposition en structures de type “guides d’ondes” pour la simulation temps-réel n’est pas encore aujourd’hui complètement opérationnelle. Il a en effet été observé, pour des tubes à profil concave que les décompositions “standard” en ondes progressives conduisent à des sous-systèmes instables (ils contiennent des fonctions de transfert avec des singularités à partie réelle négative) [8, 9, 10]. Se pose alors la question de la décomposition à utiliser (il en existe une infinité) afin d’obtenir

1. une structure de type guide d’ondes,
2. une structure simulable à faible coût,
3. une structure stable en tout point après décomposition.

Un problème similaire d’instabilité a été mis en évidence dans le cas du raccord de cônes convergents [11]. Une solution stable par réalisation minimale est proposée dans [12].

Pour les profils concaves, une solution stable (ou plutôt une infinité de solutions paramétrées) a été trouvée pour la première fois dans [6, chap. 4] en introduisant artificiellement un degré de liberté dans la structure en guides d’ondes qui

1. stabilise les réflexions internes au tronçon,
2. régénère les relations exactes qui lient les états aux interfaces du tronçon.

Cette solution, basée sur des considérations purement “traitement de signal”, amène à des structures qui fonctionnent dans la plupart des cas mais elle ne repose sur aucune considérations “physiques” pour expliquer le problème d’instabilité et le résoudre.

L’étude présentée ici concerne le choix de décomposition en structure de type guide d’ondes. La démarche consiste à rechercher des nouvelles définitions d’ondes progressives informées par la géométrie. Cette démarche inductive a pour but de définir de nouvelles ondes “physiquement sensées” qui conduisent à une décomposition stable en tout point. La suite du travail consiste à chercher, à partir de ces nouvelles définitions d’ondes, une structure simulable stable et à faible coût.

Ce document est organisé de la façon suivante. Après quelques rappels sur le cas simple des tubes droits sans perte, nous cherchons à illustrer et à comprendre l’apparition des instabilités pour les décompositions standards en ondes progressives. Il apparaît que ces décompositions standards traduisent une propagation certes locale au tronçon mais dans un tronçon qui aurait une longueur infinie. Or, un profil concave de longueur infinie présente des parties à rayon négatif qui ne sont évidemment pas physiquement sensées.

Notre approche consiste d’abord à rétablir explicitement dans les matrices de transfert acoustique (et dans la définition des ondes recherchées) le fait que le rayon d’un tronçon est positif. Ensuite, nous recherchons des quantités découplées pour définir de nouvelles ondes progressives “informées par une géométrie physiquement sensée”.

Première partie

Études préliminaires

Dans un premier temps, nous reprenons le cas simple des ondes planes se propageant dans un tube droit sans pertes. Nous rappelons deux méthodes qui permettent d'aboutir à la définition des ondes planes progressives. Nous donnons alors quelques interprétations sur le sens acoustique des quantités mises en jeu dans ces méthodes.

Dans un second temps, nous considérons le changement d'état "standard" utilisé pour définir les ondes progressives sur le modèle de Webster-Lokshin. Enfin, nous donnons de premières interprétations des instabilités qui apparaissent dans la décomposition en guides d'ondes à la lumière des informations apportées par la première étude sur les ondes planes.

1 Cas des tubes droits sans pertes

1.1 Ondes découplées dans les tubes droits sans pertes

Considérons en premier lieu un problème de propagation acoustique linéaire d'ondes planes dans un tube droit sans pertes. Les équations d'Euler et de la conservation de la masse sont données par

$$\begin{cases} \partial_t \vec{V} + \frac{1}{\rho_0} \text{grad} P = 0, \\ \partial_t P + \rho_0 c_0^2 \text{div} \vec{V} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

et peuvent s'écrire sous la forme

$$\partial_x \mathbf{X}_p + \mathbf{M}_p \partial_t \mathbf{X}_p = 0, \quad (2)$$

où x est la variable spatiale qui décrit l'axe de symétrie du tube et où le vecteur d'état acoustique \mathbf{X}_p et la matrice \mathbf{M}_p sont donnés par les expressions

$$\mathbf{X}_p = \begin{bmatrix} P \\ V \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$\mathbf{M}_p = \begin{bmatrix} 0 & \rho_0 \\ \frac{1}{\rho_0 c_0^2} & 0 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$(5)$$

où ρ_0 est la densité de l'air, c_0 la célérité du son dans le milieu, P la pression acoustique et V la vitesse.

Ondes progressives : Méthode 1 Pour trouver des ondes découplées localement (i.e. en tout point du volume), il suffit de diagonaliser la matrice \mathbf{M}_p . Les valeurs propres calculées sont

$$\lambda^+ = \frac{1}{c_0} \text{ et } \lambda^- = -\frac{1}{c_0}. \quad (6)$$

Nous avons deux valeurs propres de multiplicité 1 donc la matrice de passage possède deux degrés de liberté. Un choix classique permet d'obtenir la matrice de passage

$$\mathbf{P}_p = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ \frac{2}{\rho_0 c_0} & -\frac{2}{\rho_0 c_0} \end{bmatrix} \quad (7)$$

et son inverse

$$\mathbf{P}_p^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_0 c_0 \\ 1 & -\rho_0 c_0 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

On peut donc mettre l'équation (2) sous la forme

$$\partial_x \mathbf{Y}_p + \begin{bmatrix} \frac{1}{c_0} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{c_0} \end{bmatrix} \partial_t \mathbf{Y}_p = 0. \quad (9)$$

où $\mathbf{Y}_p = \mathbf{P}_p^{-1} \mathbf{X}_p$ est le vecteur des ondes progressives découplées se propageant dans le tube. On retrouve les ondes classiques

$$\mathbf{Y}_p = \begin{bmatrix} p^+ \\ p^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P + Z_0 V \\ P - Z_0 V \end{bmatrix} \quad (10)$$

où $Z_0 = \rho_0 c_0$ définit l'impédance caractéristique du milieu de propagation.

On note s la variable de Laplace dans le plan complexe. Le transformée de Laplace (pour laquelle une multiplication par s correspond à une dérivation temporelle et une division par s correspond à une intégration temporelle) de (9) s'écrit

$$\partial_x \mathbf{Y}_p + s \begin{bmatrix} \frac{1}{c_0} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{c_0} \end{bmatrix} \mathbf{Y}_p = 0. \quad (11)$$

Ondes progressives : Méthode 2 Une seconde manière de retrouver (9) consiste à factoriser l'opérateur d'Alembertien, dans le domaine de Laplace, sous la forme

$$\Delta - \frac{1}{c_0^2} s^2 = (\partial_x - \lambda^+ s) (\partial_x + \lambda^- s) \quad (12)$$

Les opérateurs qui "propagent" les variables d'ondes (appelés "opérateurs de propagation") dans un tube droit entre les abscisses a et b sont alors

$$\begin{aligned} T_p^+(L, s) &= e^{-\frac{sL}{c_0}}, & p^+(b, s) &= T_p^+(L, s) p^+(a, s), \\ T_p^-(L, s) &= e^{\frac{sL}{c_0}}, & p^-(b, s) &= T_p^-(L, s) p^-(a, s), \\ & & L &= b - a. \end{aligned} \quad (13)$$

On remarque que $T_p^-(L, s) = T_p^+(L, s)^{-1}$. On notera donc plus volontiers

$$\begin{aligned} p^+(b, s) &= T_p(L, s) p^+(a, s), \\ p^-(a, s) &= T_p(L, s) p^-(b, s), \\ T_p(L, s) &= T_p^+(L, s). \end{aligned} \quad (14)$$

ce qui met en évidence la structure en guides d'ondes présentée en figure 1.

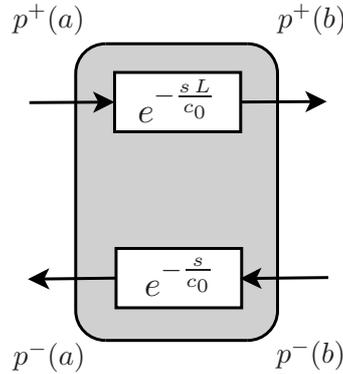


FIGURE 1 – Propagation d'ondes découplées dans un tube droit

$e^{-\frac{sL}{c_0}}$ étant le retard pur induit par la propagation dans un tube de longueur L , on définit alors "l'opérateur de dispersion" $D_p(s, L)$:

$$T_p(s, L) = e^{-\frac{sL}{c_0}} D_p(s, L). \quad (15)$$

Dans le cas des ondes planes que nous étudions ici, $D_p(s, L) = 1$, ce qui signifie que les ondes p^+ et p^- sont retardées mais ne sont pas modifiées lorsqu'elles se propagent dans un tube droit sans pertes

1.2 Transposition de la méthode pour le cas des tubes courbes

Dans le cas des tubes à section variable, nous nous plaçons sous les hypothèses du modèle de Webster-Lokshin à abscisse curviligne que nous présenterons en section 2. L'objectif de la partie II est de trouver des ondes découplées dans les tubes courbes, à l'instar des ondes planes dans les tubes droits. La méthode mise en oeuvre diffère quelque peu de celle présentée ci-dessus. En effet, la diagonalisation sera effectuée sur la matrice de transfert obtenue par résolution du modèle et non sur les équations du modèle lui-même. De plus, des conditions de réalisme physique du tube étudié seront injectées dans la matrice de transfert avant diagonalisation.

Ainsi, nous pourrons étudier les opérateurs de propagation et de dispersion trouvés dans les tubes à section variable avec le modèle de Webster-Lokshin à abscisse curviligne.

2 Modèle considéré dans les tubes à section variable

2.1 Définitions de fonctions

Comme nous allons le voir par la suite, plusieurs fonctions jouent un rôle prépondérant dans le problème et apparaissent à de nombreuses reprises, tant dans les formules liées à la géométrie que dans celles liées à l'acoustique et à la propagation des ondes dans le tube.

$$\phi_1 : x \mapsto \sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{(2k)!} \quad \text{et} \quad \phi_2 : x \mapsto \sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{(2k+1)!} \quad (16)$$

sont analytiques sur \mathbb{C} donc $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et développables en série entière avec un rayon de convergence infini. Elles sont présentées en figure 2 sur l'axe réel. Ces deux figures font apparaître deux valeurs

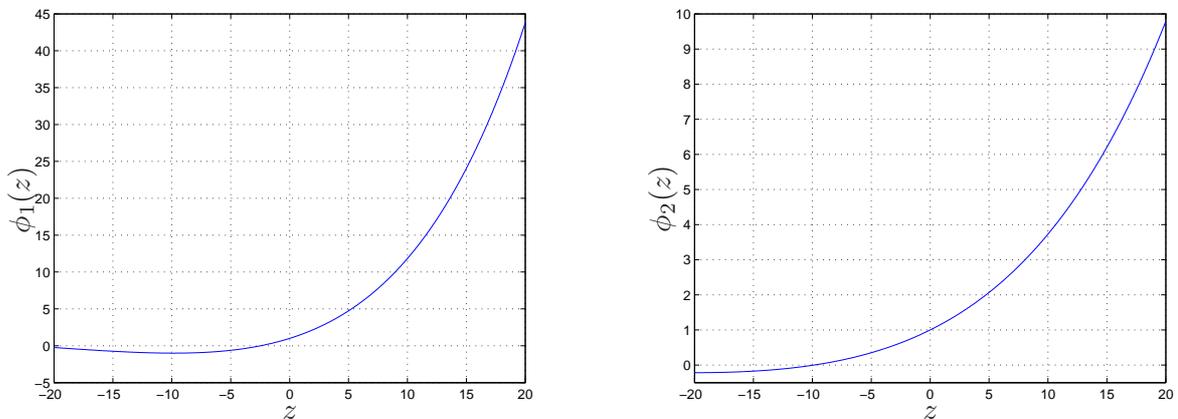


FIGURE 2 – Fonctions ϕ_1 et ϕ_2

limites clés que nous retrouveront tout au long de l'étude :

- $-\pi^2$ est la valeur pour laquelle $\phi_2(z)$ s'annule et $\phi_1(z)$ atteint son minimum
- $-\pi^2/4$ est la valeur pour laquelle $\phi_1(z)$ s'annule

On définit de plus la fonction Φ , qui apparaîtra régulièrement dans la suite, par

$$\Phi : x \mapsto \frac{\phi_1(x)}{\phi_2(x)}. \quad (17)$$

Cette fonction est présentée en figure 3 sur l'axe réel. On retrouve ici la valeur $-\pi^2$ d'annulation

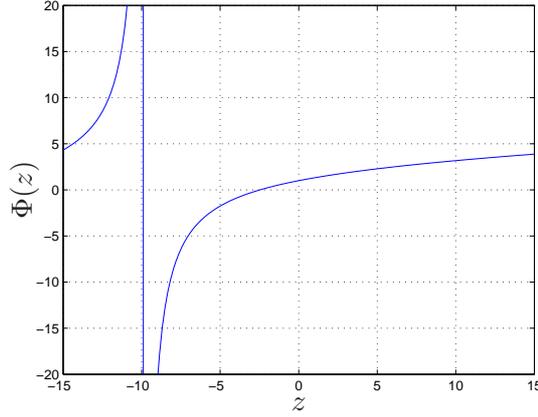


FIGURE 3 – Fonctions Φ

de ϕ_2 qui devient une singularité de Φ et la valeur $-\pi^2/4$ pour laquelle Φ s'annule.

Remarque : ces fonctions peuvent s'écrire (indépendamment du choix de $\sqrt{\cdot}$)

$$\begin{aligned}\phi_1(x) &= \cosh(\sqrt{x}) , \\ \phi_2(x) &= \begin{cases} \frac{\sinh(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} . \\ \Phi(x) &= \frac{\sqrt{x}}{\tanh(\sqrt{x})}\end{aligned}$$

2.2 Modèle de Webster-Lokshin à abscisse curviligne

Le premier modèle de tube acoustique à dépendance mono-spatiale fut établi par Lagrange [13] et Bernoulli [14]. Cette équation est dite “de Webster” [15] et a été abondamment étudiée [16]. Pour les pertes, les premières études ont été initiées par Kirchhoff [17]. On pourra retrouver l'ensemble de ces éléments bibliographique dans [18] et aussi dans [7] (joint à la fin de ce document).

Les effets de courbure et de pertes sont finalement regroupés dans le modèle dit “de Webster-Lokshin” à dépendance en l'abscisse curviligne [1, 19].

Soit un profil de tube $z \mapsto r(z)$. Le passage en abscisse curviligne s'écrit en mesurant la longueur de la paroi depuis $z = 0$, $L(z) = \int_0^z \sqrt{1 + r'(w)^2} dw$. On note l'abscisse curviligne $\ell = L(z)$ et on a alors

$$R(L(z)) = r(z) \text{ et } R(\ell) = r(L^{-1}(\ell)) . \quad (18)$$

En notant $P(\ell, t)$ la pression dans le tube à l'abscisse ℓ et à l'instant t , l'équation de Webster-Lokshin, établit dans [1], s'écrit

$$\left(\partial_\ell^2 + 2 \frac{R'(\ell)}{R(\ell)} \partial_\ell - \frac{1}{c_0^2} \partial_t^2 - \frac{2\varepsilon(\ell)}{c_0^{\frac{3}{2}}} \partial_t^{\frac{3}{2}} \right) P(\ell, t) = 0 \quad (19)$$

où c_0 est la vitesse du son et $\varepsilon(\ell) = \kappa_0 \frac{\sqrt{1 - R'(\ell)^2}}{R(\ell)}$ quantifie les effets visco-thermiques ($\kappa_0 \approx 3 \times 10^{-4} m^{1/2}$ dans l'air). Cette équation est appelée équation de Webster en raison de la présence du terme $2 \frac{R'(\ell)}{R(\ell)} \partial_\ell$ et équation de Lokshin en raison de la présence du terme $\frac{2\varepsilon(\ell)}{c_0^{\frac{3}{2}}} \partial_t^{\frac{3}{2}}$.

Dans le domaine de Laplace, le modèle de Webster-Lokshin complet s'écrit

$$\left(\partial_\ell^2 - \Gamma(s)^2\right) [R(\ell)P(\ell, s)] = 0 \quad (20)$$

$$\rho_0 s \frac{U(\ell, s)}{S(\ell)} + \partial_\ell P(\ell, s) = 0 \quad (21)$$

où

$$\Gamma(s)^2 = \frac{1}{c_0^2} s^2 + \frac{2\varepsilon(\ell)}{c_0^{\frac{3}{2}}} s^{\frac{3}{2}} + \Upsilon(\ell) \quad (22)$$

avec $\Upsilon(\ell) = \frac{R''(\ell)}{R(\ell)}$, $S(\ell) = \pi R(\ell)^2$ et $U(\ell, t) = S(\ell)V(\ell, t)$ définit un débit acoustique.

Remarque : la fonction Γ est définie comme une racine complexe. L'analyse complexe et notamment les racines complexes posent plusieurs problèmes théoriques que nous n'aborderont pas ici. Nous considérerons dans ce document que les fonctions définies avec des racines complexes ne posent aucun problème de définition sur \mathbb{C}_0^+ (le demi-plan droit de Laplace).

L'énergie acoustique s'écrit

$$e_{ac}(\ell, t) = \pi R(\ell, t)^2 \left(\frac{\rho}{2} V(\ell, t)^2 + \frac{1}{2\rho c^2} P(\ell, t)^2 \right). \quad (23)$$

et on montre que le modèle sans pertes ($\varepsilon = 0$) est conservatif. Pour la cas avec pertes, il faut mener l'étude en utilisant les énergies acoustiques étendues [20, 21].

3 Ondes découplées dans les tubes courbes avec le modèle de Webster-Lokshin à abscisse curviligne et apparition des instabilités

Le modèle (20-21) peut être résolu analytiquement dans le cas où les paramètres $\Upsilon(\ell)$ et $\varepsilon(\ell)$ sont constants. On définit alors un "tronçon", portion de tube pour lequel $\Upsilon(\ell)$ est constant. Dans un tronçon, $\varepsilon(\ell)$ est approximé par sa valeur moyenne $\varepsilon(\ell) \approx \varepsilon = \frac{1}{L} \int_0^L \varepsilon(\ell) d\ell$ et le modèle de Webster-Lokshin peut être résolu.

Considérons un tronçon à Υ constant de longueur L (on suppose que le tronçon est défini entre les abscisses $-L/2$ et $L/2$), on note R_l et R_r les rayons du tronçon à gauche et à droite. Une résolution du modèle (20-21) pour la propagation entre les abscisses $-L/2$ et $L/2$ est donnée par la matrice de transfert acoustique $\mathbf{Q}(s)$ (détaillée en partie 6.1)

$$\begin{bmatrix} P\left(\frac{L}{2}, s\right) \\ U\left(\frac{L}{2}, s\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L}{R_r} & 0 \\ 0 & \frac{\pi R_r}{\rho_0 s} \end{bmatrix} \mathbf{Q}(s) \begin{bmatrix} \frac{R_l}{L} & 0 \\ 0 & \frac{\rho_0 s}{\pi R_l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P\left(-\frac{L}{2}, s\right) \\ U\left(-\frac{L}{2}, s\right) \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Une représentation guides d'ondes sous la forme d'une succession de quadripôles de transfert est donnée dans [6]. Cette dernière représentation est tout à fait adaptée à la simulation temps-réel (le travail d'implémentation a d'ailleurs déjà été en partie mis en oeuvre [22]). Cependant, elle pose des problèmes de stabilité dans le cas où le paramètre Υ devient négatif. Nous allons tenter ici d'expliquer pourquoi en nous basant sur une interprétation physique de la décomposition en quadripôles présentée dans [6].

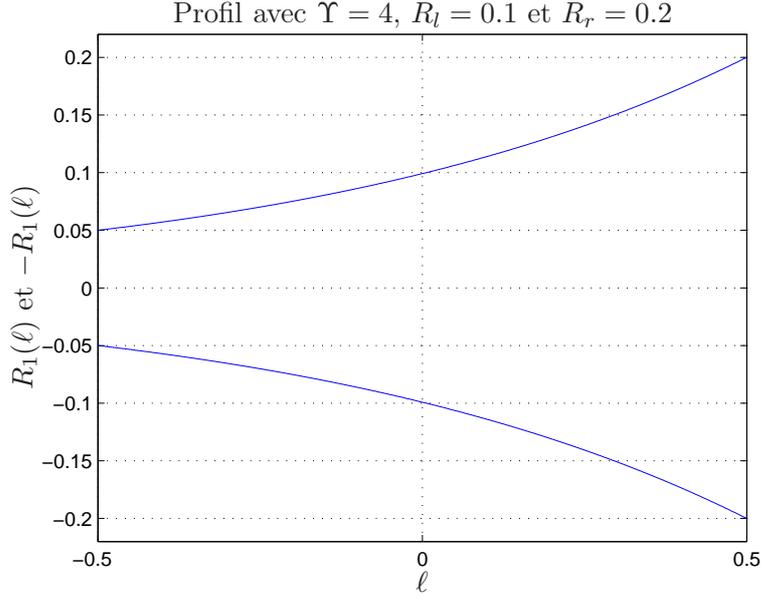


FIGURE 4 – Tronçon à profil convexe

Prenons le cas d'un tronçon de tube à section variable de longueur 1 avec $\Upsilon = 2$, $R_l = 0.05$ et $R_r = 0.2$ (nous verrons en section 5 que ces trois paramètres suffisent à décrire entièrement le tronçon); ce tronçon est tracé en figure 4.

La décomposition en quadripôles proposée dans [6] fait apparaître les réflexions internes du tube semi-infini ayant le même paramètre Υ mais se continuant à l'infini à gauche et à droite. En effet, l'expression de la fonction de réflexion interne du tube aux abscisses $-L/2$ et $L/2$ nécessite de fixer des conditions frontières aux extrémités du tronçon (ces fonctions de réflexions internes seront modifiées lors de la concaténation du tronçon avec une impédance de rayonnement ou un autre tronçon). Les conditions frontières choisies dans [6] sont celles d'un tube semi-infini qui prolonge le tronçon existant avec le même paramètre Υ .

Autrement dit, la réflexion interne vue depuis l'intérieur du tube du côté droit est celle du tube décrit par le rayon $R_1(\ell) \forall \ell \in [0, \infty]$ et la réflexion interne vu depuis l'intérieur du tube du côté gauche est celle du tube décrit par le rayon $R_1(\ell) \forall \ell \in [-\infty, L]$.

Ceci ne pose pas de problème tant que Υ est positif car le rayon tend vers ∞ en $\pm\infty$. En revanche, lorsque Υ devient négatif, comme le montre les équations (39-41) le rayon ne s'exprime plus à l'aide des fonctions cosh et sinh mais à l'aide des fonctions cos et sin. Ceci implique que le rayon peut s'annuler lorsque la longueur devient trop grande ou que Υ devient trop négatif comme l'illustre la figure 5. On définit alors la longueur critique d'un tronçon de tube pour un Υ donné (ou un Υ critique pour une longueur donnée) au-delà de laquelle le rayon s'annule à l'intérieur de son ensemble de définition. Cette valeur est précisément $L_{crit} = \frac{\pi}{\sqrt{|\Upsilon|}}$.

Dans le cas $\Upsilon < 0$, les tubes semi-infinis ont un rayon présentant une périodicité spatiale et étant alternativement positif et négatif. Un rayon négatif n'a évidemment aucun sens physique et on ne peut pas s'attendre à des comportements naturels avec de telles considérations.

Une précédente étude [6] a montré que, quand Υ est négatif, les passages par 0 successifs du rayon jusqu'à l'infini provoquent l'apparition d'un continuum de pôles sur la partie positive de l'axe réel pour les fonctions de réflexion internes dans la décomposition en quadripôles de transfert. Ceci explique donc l'apparition des instabilités dans cette décomposition.

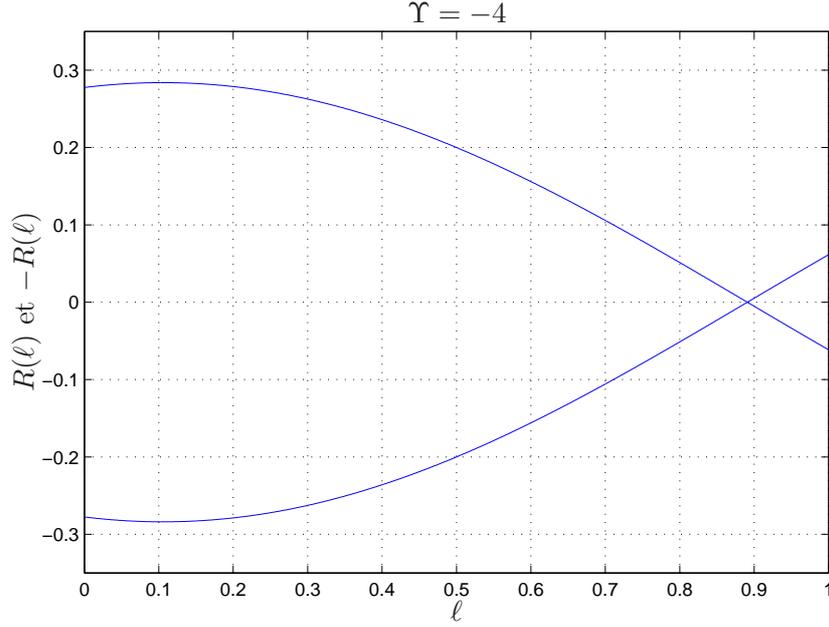


FIGURE 5 – Tube à rayon négatif

Il est toutefois possible de donner une autre interprétation des instabilités qui apparaissent dans la décomposition en quadripôles. En effet, $\Gamma(s)$ étant un opérateur uniquement temporel (il ne fait pas apparaître de dérivée selon ℓ) on peut écrire une sorte de d’Alembertien étendu pour le modèle de Webster-Lokshin :

$$\partial_\ell^2 - \Gamma(s)^2 = (\partial_\ell - \Gamma(s))(\partial_\ell + \Gamma(s)) \quad (25)$$

L’opérateur de dispersion pour le modèle de Webster-Lokshin est alors

$$D(s) = e^{s-\Gamma(s)}. \quad (26)$$

D’après ce que l’on a dit précédemment, on peut interpréter ce résultat comme le fait que l’on ramène des réflexions liées à des tubes semi-infinis à l’intérieur même de l’opérateur de dispersion d’où les instabilités dans le cas $\Upsilon < 0$. De plus, d’un point de vue plus “traitement de signal”, nous verrons plus tard que l’opérateur de dispersion $D(s)$ est un filtre instable dans le cas $\Upsilon < 0$.

La condition sur la géométrie du profil à injecter dans la matrice de transfert est donc toute trouvée, il s’agit de la positivité du rayon.

Deuxième partie

Changement de variables en ondes découplées informées par la géométrie

L'objectif de cette partie est de définir de nouvelles ondes découplées, se propageant dans les tubes et permettant d'obtenir une structure guides d'ondes stable. Ce travail se divise en deux grandes étapes. La première consiste à trouver des conditions sur les paramètres géométriques qui assurent que le profil de tube sur lequel nous travaillons est physiquement réaliste (la positivité du rayon). Ensuite, nous souhaitons injecter ces conditions dans la matrice de transfert acoustique solution du modèle de Webster-Lokshin avant de diagonaliser cette dernière. Ainsi, nous espérons trouver de nouvelles définitions d'ondes progressives découplées à l'intérieur d'un tube à section variable dans lesquelles sont "inscrites" les conditions physiques de réalisme du tube. Nous devrions de cette façon éviter les problèmes d'instabilité présentés en partie I.

Une étape préliminaire consiste à définir des quantités adimensionnées invariantes par changement d'orientation du tronçon (invariante par inversion entrée/sortie). Les formules de passage principales entre les variables dimensionnées et les variables adimensionnées sont données en section 4, des formules plus détaillées sont fournies en annexe.

4 Adimensionnement, convention axiale et convention “tronçon”

4.1 Notations

A l'exception de quelques variables qui possèdent un nom différent en version dimensionnée et en version adimensionnée, les notations suivantes sont respectées dans le reste du document :

- les variables et les paramètres dimensionnés sont notés avec $\tilde{}$,
- les variables et les paramètres adimensionnés sont notés sans $\tilde{}$,
- les variables dépendant de la variable spatiale sont notés, en convention axiale, $A(\ell)$ ou $A(x)$,
- les variables dépendant de la variable spatiale sont notés, en convention tronçon, A_l ou A_r (l pour left, r pour right).

4.2 Adimensionnement

L'adimensionnement des variables nous permet de faire disparaître toutes les constantes physiques (c_0, ρ_0 etc.) des équations du modèle et ainsi de garder uniquement les quantités essentielles à la compréhension physique des phénomènes mis en jeu. L'adimensionnement touche tous les types de variables du problème : variables géométriques, variables de Kirchhoff, fonctions d'ondes etc. Comme nous le verrons tout au long de cette section, la valeur clé pour l'adimensionnement est la longueur L du tube considéré. Ainsi, l'adimensionnement est propre à un tronçon et lors de la connexion de tronçons les uns aux autres, il faudra prendre soin de redimensionner les variables.

4.2.1 Variables spatiales et fonctions géométriques

Soit un tronçon de tube de longueur L décrit par sa perce $R(\ell)$, $\ell \in [a, b]$ (on a $L = b - a$). La variable spatiale indépendante adimensionnée est notée x et l'adimensionnement se résume à la transformation

$$\ell \in [a, b] \mapsto x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]. \quad (27)$$

Les formules de passage entre la variable x et la variable ℓ s'écrivent alors

$$x = \mathcal{X}(\ell) = \frac{\ell - \frac{a+b}{2}}{L}, \quad (28)$$

$$\ell = \mathcal{L}(x) = Lx + \frac{a+b}{2}. \quad (29)$$

Dans le cas $a = -\frac{L}{2}, b = \frac{L}{2}$, les formules de passage deviennent simplement

$$x = \mathcal{X}(\ell) = \frac{\ell}{L}, \quad (30)$$

$$\ell = \mathcal{L}(x) = Lx. \quad (31)$$

Le rayon $\tilde{R}(\ell)$ est adimensionné de la façon suivante

$$R(x) = \frac{1}{L} \tilde{R}(\mathcal{L}(x)), \quad (32)$$

$$\tilde{R}(\ell) = L R(\mathcal{X}(\ell)).$$

et on a

$$\begin{aligned} \Upsilon &= L^2 \tilde{\Upsilon}, \\ \tilde{\Upsilon} &= \frac{1}{L^2} \Upsilon. \end{aligned} \quad (33)$$

4.2.2 Variables temporelles et fonctions acoustiques

L'adimensionnement dans le domaine temporel (et dans le domaine de Laplace) est effectué par rapport au temps de propagation d'une onde sonore dans un tube de longueur L :

$$\begin{aligned} t &= \frac{c_0}{L} \tilde{t}, & s &= \frac{L}{c_0} \tilde{s}, \\ \tilde{t} &= \frac{L}{c_0} t, & \tilde{s} &= \frac{c_0}{L} s. \end{aligned} \quad (34)$$

On en déduit l'adimensionnement du paramètre $\tilde{\varepsilon}$ et de la fonction $\tilde{\Gamma}(\tilde{s})$

$$\varepsilon = \sqrt{L} \tilde{\varepsilon}, \quad \tilde{\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{L}} \varepsilon, \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \Gamma(s) &= L \tilde{\Gamma} \left(\frac{c_0}{L} s \right) = \sqrt{s^2 + \Upsilon + 2\varepsilon s^{\frac{3}{2}}}, \\ \tilde{\Gamma}(\tilde{s}) &= \frac{1}{L} \Gamma \left(\frac{L}{c_0} \tilde{s} \right) = \sqrt{\left(\frac{\tilde{s}}{c_0} \right)^2 + \tilde{\Upsilon} + 2\tilde{\varepsilon} \left(\frac{\tilde{s}}{c_0} \right)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned} \quad (36)$$

Les variables de Kirchhoff sont adimensionnées respectivement par rapport à la pression de référence $\rho_0 c_0^2$ et au débit de référence $c_0 \tilde{S}(\ell)$ (où $\tilde{S}(\ell) = \pi \tilde{R}(\ell)^2$)

$$\begin{aligned} P(x, t) &= \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \tilde{P} \left(\mathcal{L}(x), \frac{L}{c_0} t \right) & U(x, t) &= \frac{1}{c_0 \tilde{S}(\mathcal{L}(x))} \tilde{U} \left(\mathcal{L}(x), \frac{L}{c_0} t \right) \\ \tilde{P}(\ell, t) &= \rho_0 c_0^2 P \left(\mathcal{X}(\ell), \frac{c_0}{L} t \right) & \tilde{U}(\ell, t) &= c_0 L^2 \tilde{S}(\mathcal{X}(\ell)) U \left(\mathcal{X}(\ell), \frac{c_0}{L} t \right) \end{aligned} \quad (37)$$

L'adimensionnement des différentes variables d'ondes définies dans [6] est explicité en annexe.

4.2.3 Modèle de Webster-Lokshin

En variables adimensionnées et dans le domaine de Laplace, le modèle de Webster-Lokshin s'écrit

$$\begin{cases} \left[s^2 + \Upsilon + 2\varepsilon s^{\frac{3}{2}} - \partial_x^2 \right] \left(R(x) P(x, s) \right) &= 0 \\ s U(x, s) + \partial_x P(x, s) &= 0 \end{cases}$$

Nous avons bien réussi à faire disparaître toutes les constantes physiques du problème. Nous allons donc pouvoir nous concentrer sur la compréhension physique des phénomènes et la recherche d'ondes découplées informées par la géométrie. Cependant, nous devons d'abord aborder ce que nous avons appelé la "convention tronçon".

4.3 Convention axiale et convention "tronçon"

La convention axiale est en fait celle qui est implicitement utilisée dans la partie I. Considérer un tronçon de tube en convention axiale consiste à définir une extrémité comme étant l'entrée et l'autre comme étant la sortie et à considérer les différentes variables et fonctions le long du tube. On écrit par exemple $P(x, t)$ ou $\sigma(x)$ pour $x \in [-1/2, 1/2]$. L'inconvénient de ce paradigme est que les expressions des variables et des matrices de transfert acoustiques se voient modifiées lorsque l'on retourne le tube (l'entrée devient la sortie et vice-versa, transformation que l'on peut symboliser par la symétrie $x \mapsto -x$) alors que le tube est le même. Pour s'en convaincre, il suffit de prendre l'exemple du débit acoustique : si l'on retourne le tube et que l'on garde la même convention alors $U(x)$ devient à $-U(-x)$ et non $U(-x)$.

La convention appelée “convention tronçon” permet de définir des variables et des matrices de transfert acoustiques qui ne sont pas modifiées par la symétrie $x \mapsto -x$. Pour cela, nous ne considérons plus les variables et les fonctions pour $x \in [-1/2, 1/2]$ mais uniquement aux extrémités du tronçon car ce sont ces dernières qui nous intéressent pour établir les matrices de transfert. Les variables au point $x = -1/2$ sont notées avec un indice ${}_l$ (pour left) et les variables au point $x = 1/2$ sont notées avec un indice ${}_r$ (pour right). En convention tronçon, la symétrie $x \mapsto -x$ revient alors simplement à inverser les indices ${}_l$ et ${}_r$ dans les différentes fonctions, variables et matrices de passage.

La convention tronçon repose sur un principe simple : les quantités dirigées sont orientées vers l’intérieur du tube. Ainsi le débit à l’extrémité gauche du tube n’est pas modifié entre la convention axiale et la convention tronçon, $U_l = U(-1/2)$, mais le débit à l’extrémité droite du tube se transforme en son opposé, $U_r = -U(1/2)$. De même pour les pentes normalisées σ_l et σ_r . Les variables d’ondes ne sont plus notées ϕ^+ ou ϕ^- mais ϕ^{in} ou ϕ^{out} .

Les figures 6 et 7 illustrent comment les variables de Kirchhoff et les variables d’ondes sphériques présentées en partie I sont modifiées entre la convention axiale et la convention tronçon. Les formules de passage en convention axiale et en convention tronçon sont indiquées ci-après.

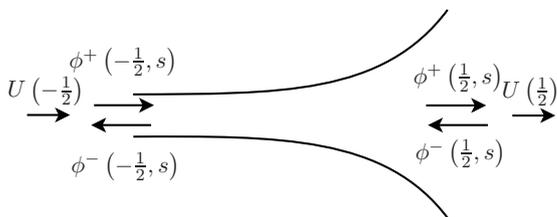


FIGURE 6 – Convention axiale

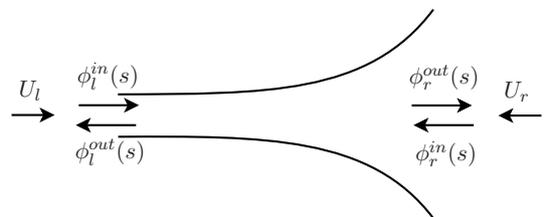


FIGURE 7 – Convention tronçon

$$\sigma(\ell) = \frac{R'(\ell)}{R(\ell)}$$

$$\sigma_l = \frac{R'(-\frac{1}{2})}{R(-\frac{1}{2})}, \quad \sigma_r = -\frac{R'(\frac{1}{2})}{R(\frac{1}{2})}$$

$$\begin{bmatrix} \phi^+ \\ \phi^- \end{bmatrix} = \frac{R}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ U \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P \\ U \end{bmatrix} = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi^+ \\ \phi^- \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \phi_{l/r}^{in} \\ \phi_{l/r}^{out} \end{bmatrix} = \frac{R_{l/r}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{l/r} \\ U_{l/r} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P_{l/r} \\ U_{l/r} \end{bmatrix} = \frac{1}{R_{l/r}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{l/r}^{in} \\ \phi_{l/r}^{out} \end{bmatrix}$$

5 Considérations géométriques

5.1 Paramétrisation du rayon

Comme nous l’avons dit, le modèle (20-21) peut être résolu analytiquement dans le cas où les paramètres $\tilde{\Upsilon}(\ell)$ et $\tilde{\varepsilon}(\ell)$ sont constants. Pour le paramètre $\tilde{\varepsilon}$, on fait le choix $\tilde{\varepsilon}(\ell) \approx \frac{1}{L} \int_0^L \tilde{\varepsilon}(\ell) d\ell$. La constance du paramètre $\tilde{\Upsilon}(\ell)$ induit l’équation

$$\tilde{R}''(\ell) - \tilde{\Upsilon} \tilde{R}(\ell) = 0. \quad (38)$$

Cette équation se résout de façon classique selon la valeur de $\tilde{\Upsilon}$

$$\tilde{\Upsilon} < 0 \quad : \quad \tilde{R}(\ell) = \tilde{A} \cos \left(\sqrt{-\tilde{\Upsilon}} \ell \right) + \tilde{B} \sin \left(\sqrt{-\tilde{\Upsilon}} \ell \right) \text{ avec } (\tilde{A}, \tilde{B}) \in \mathbb{R}^2, \quad (39)$$

$$\tilde{\Upsilon} = 0 \quad : \quad \tilde{R}(\ell) = \tilde{A} + \tilde{B}\ell \text{ avec } (\tilde{A}, \tilde{B}) \in \mathbb{R}^2, \quad (40)$$

$$\tilde{\Upsilon} > 0 \quad : \quad \tilde{R}(\ell) = \tilde{A} \cosh \left(\sqrt{\tilde{\Upsilon}} \ell \right) + \tilde{B} \sinh \left(\sqrt{\tilde{\Upsilon}} \ell \right) \text{ avec } (\tilde{A}, \tilde{B}) \in \mathbb{R}^2. \quad (41)$$

Cependant, on a montré dans [22] que ces écritures peuvent être unifiées à l'aide des fonctions C et S

$$\begin{cases} C & : \quad (\ell, \Upsilon) \mapsto \phi_1(\Upsilon \ell^2) \\ S & : \quad (\ell, \Upsilon) \mapsto \ell \phi_2(\Upsilon \ell^2) \end{cases}, \quad (42)$$

$$\tilde{R}(\ell) = \tilde{A} C(\ell, \tilde{\Upsilon}) + \tilde{B} S(\ell, \tilde{\Upsilon}). \quad (43)$$

Par définition, les fonctions C et S sont \mathcal{C}^∞ en Υ et en ℓ , ce qui nous assure la continuité du modèle géométrique en Υ .

Ceci définit une famille de tronçons paramétrés pour lesquels le modèle de Webster-Lokshin à abscisse curviligne peut être résolu analytiquement. Un tronçon est entièrement défini par les paramètres $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{\Upsilon})$. De plus, si on considère des tronçons de tube de longueur L sur l'intervalle $\ell \in [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$, alors les fonctions C et S définissent une base orthogonale de l'espace des solutions de (38).

Ce paramétrage présente toutefois un inconvénient : si le paramètre Υ définit la "courbure" du tube, il est bien difficile de donner un sens aux paramètres A et B . De plus l'écriture de la positivité du rayon avec ce paramétrage est possible mais compliqué.

Les fonctions

$$\begin{aligned} S^l & : \quad (\ell, \Upsilon) \mapsto -\frac{\sinh \left(\sqrt{\Upsilon} \left(\ell - \frac{L}{2} \right) \right)}{\sinh \left(L\sqrt{\Upsilon} \right)} \\ S^r & : \quad (\ell, \Upsilon) \mapsto \frac{\sinh \left(\sqrt{\Upsilon} \left(\ell + \frac{L}{2} \right) \right)}{\sinh \left(L\sqrt{\Upsilon} \right)} \end{aligned} \quad (44)$$

définissent elles-aussi une base de l'espace des solutions de (38). De plus, comme $S^l \left(-\frac{L}{2} \right) = 1$, $S^l \left(\frac{L}{2} \right) = 0$, $S^r \left(-\frac{L}{2} \right) = 0$ et $S^r \left(\frac{L}{2} \right) = 1$, le rayon peut s'écrire

$$\tilde{R}(\ell) = \tilde{R}_l S^l(\ell, \tilde{\Upsilon}) + \tilde{R}_r S^r(\ell, \tilde{\Upsilon}) \quad (45)$$

où \tilde{R}_l est le rayon à l'extrémité gauche du tube et \tilde{R}_r le rayon à l'extrémité droite. Ce paramétrage, qui fait apparaître les rayons aux extrémités du profil, a un sens bien plus évident quant à la géométrie du profil. La figure 8 présente l'influence de Υ sur les fonctions S^l et S^r . Une courbure positive correspond donc à des tubes convexes, une courbure nulle à des tubes droits ou coniques et une courbure négative à des tubes concaves. Avec ce paramétrage, un tronçon est entièrement défini par les paramètres $(\tilde{R}_l, \tilde{R}_r, \tilde{\Upsilon})$.

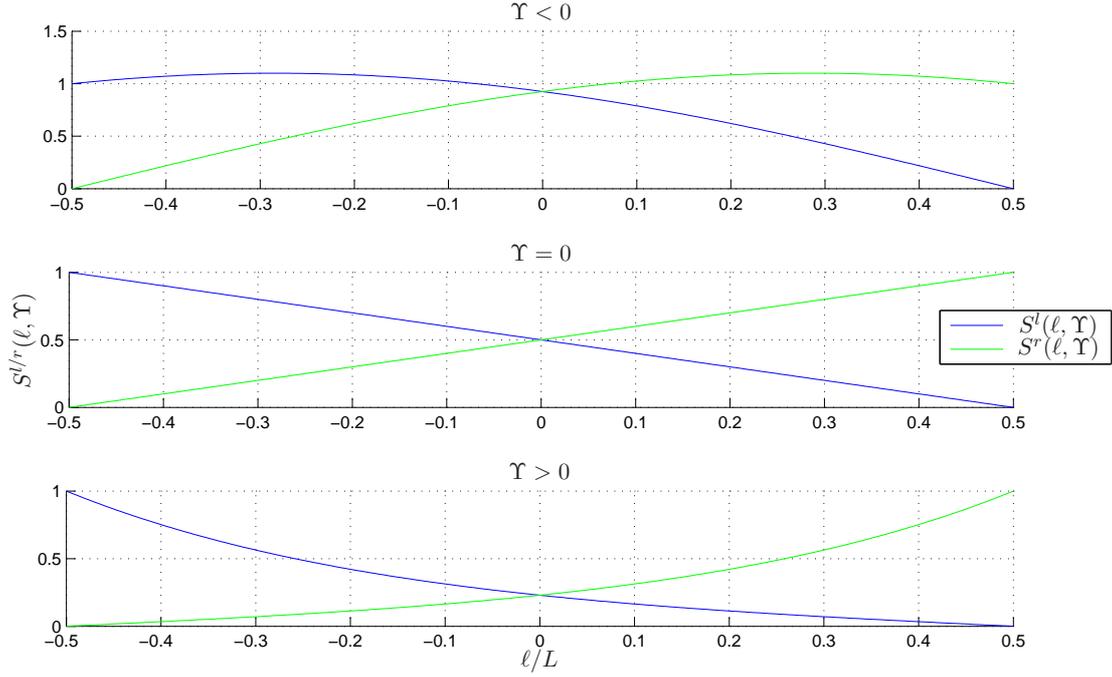


FIGURE 8 – Fonctions S^l et S^r pour $\Upsilon < 0$ (en haut), $\Upsilon = 0$ (au milieu) et $\Upsilon > 0$ (en bas)

Enfin, on définit les quantités suivantes afin de séparer les informations concernant la géométrie proprement dite et les informations concernant l'orientation du profil.

$$\theta = \ln\left(\frac{R_r}{R_l}\right) \quad (46)$$

$$\rho = \sqrt{R_r R_l} \quad (47)$$

$$(48)$$

Les paramètres R_r et R_l s'écrivent alors

$$\begin{aligned} R_r &= \rho e^{\frac{\theta}{2}}, \\ R_l &= \rho e^{-\frac{\theta}{2}}. \end{aligned} \quad (49)$$

L'adimensionnement de ces différents paramétrages est donné en annexe.

5.2 Profils physiquement réalistes

Considérons le tube défini, en variables adimensionnées, par le rayon $R(x) = R_l S_\Upsilon^l(x) + R_r S_\Upsilon^r(x)$.

L'étude des fonctions S_Υ^l et S_Υ^r lorsque fait apparaître une singularité lorsque $\Upsilon = -\pi^2$. Cette valeur est en fait la valeur critique évoquée en section 3 en variables adimensionnées (ce qui revient à considérer $L = 1$). Pour cette valeur, les fonctions S^l et S^r tendent vers l'infini sur l'intervalle $[-1/2, 1/2]$. On en déduit le théorème suivant

Théorème 5.1 (Valeur limite de Υ)

$$R(\ell) \text{ est défini } \forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \Rightarrow \Upsilon > \Upsilon_{crit} \text{ avec } \Upsilon_{crit} = -\pi^2 \quad (50)$$

La suite de l'étude suppose cette condition respectée.

Nous l'avons déjà évoqué, la première condition pour que le tube soit physiquement réaliste est la positivité stricte du rayon.

Théorème 5.2 (Positivité du rayon)

$$R(x) > 0 \quad \forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} R_l > 0 \\ R_r > 0 \end{cases} \quad (51)$$

Preuve 5.1 (Positivité du rayon)

$$\begin{aligned} R(x) > 0 \quad \forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] &\Rightarrow \begin{cases} R(-\frac{1}{2}) > 0 \\ R(\frac{1}{2}) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_l > 0 \\ R_r > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} R_l > 0 \\ R_r > 0 \end{cases} &\Rightarrow R(x) = R_l S^-(x) + R_r S^+(x) > 0 \quad \forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \\ &\text{car } S^-(x) > 0 \text{ et } S^+(x) > 0 \quad \forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \end{aligned}$$

La description de la perce en abscisse curviligne fait apparaître des propriétés inhabituelles. En effet, une pente verticale correspond à $R'(\ell) = 1$, on a donc la condition suivante :

$$|R'(\ell)| \leq 1 \quad (52)$$

Cette inégalité ne nous a pas encore mené à des conditions convaincantes et n'est pas exploitée pour l'instant.

6 Résolution du modèle et diagonalisation de la matrice de transfert acoustique

6.1 Résolution du modèle de Webster-Lokshin à abscisse curviligne

La résolution de (20-21) sous forme de matrice de transfert est donnée dans [1] et peut s'écrire sous la forme

$$\begin{bmatrix} \tilde{P}_r(\tilde{s}) \\ \tilde{U}_r(\tilde{s}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L}{\tilde{R}_r} & 0 \\ 0 & -\frac{\pi \tilde{R}_r}{\rho \tilde{s}} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{Q}}_{r,l}(\tilde{s}) \begin{bmatrix} \frac{\tilde{R}_l}{L} & 0 \\ 0 & \frac{\rho \tilde{s}}{\pi \tilde{R}_l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{P}_l(\tilde{s}) \\ \tilde{U}_l(\tilde{s}) \end{bmatrix} \quad (53)$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{Q}}(\tilde{s}) &= \begin{bmatrix} [1, \sigma_l] \mathbf{\Delta}(\tilde{s}) & [0, -1] \mathbf{\Delta}(\tilde{s}) \\ [-(\sigma_l + \sigma_r), -\sigma_r \sigma_l - L^2 \tilde{\Gamma}(\tilde{s})^2] \mathbf{\Delta}(\tilde{s}) & [1, \sigma_r] \mathbf{\Delta}(\tilde{s}) \end{bmatrix} \\ \text{avec } \mathbf{\Delta}(\tilde{s}) &= \begin{bmatrix} \phi_1 \left(L^2 \tilde{\Gamma}(\tilde{s})^2 \right) \\ \phi_2 \left(L^2 \tilde{\Gamma}(\tilde{s})^2 \right) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (54)$$

En variables adimensionnées, la matrice de transfert devient

$$\begin{bmatrix} P_r(s) \\ U_r(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_r} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_r s} \end{bmatrix} \mathbf{Q}(s) \begin{bmatrix} R_l & 0 \\ 0 & R_l s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_l(s) \\ U_l(s) \end{bmatrix} \quad (55)$$

où

$$\mathbf{Q}(s) = \begin{bmatrix} [1, \sigma_l] \mathbf{\Delta}(s) & [0, -1] \mathbf{\Delta}(s) \\ [-(\sigma_l + \sigma_r), -\sigma_r \sigma_l - \Gamma(s)^2] \mathbf{\Delta}(s) & [1, \sigma_r] \mathbf{\Delta}(s) \end{bmatrix} \quad (56)$$

$$\text{avec } \mathbf{\Delta}(s) = \begin{bmatrix} \phi_1(\Gamma(s)^2) \\ \phi_2(\Gamma(s)^2) \end{bmatrix}$$

Les paramètres σ_l , σ_r et Υ sont liés. En effet, en écrivant la définition de σ_l et de σ_r , on montre que

$$\sigma_r + \sigma_l = -(\sigma_r \sigma_l + \Upsilon) \frac{\phi_2(\Upsilon)}{\phi_1(\Upsilon)}. \quad (57)$$

On peut donc réécrire la matrice $\mathbf{Q}(s)$ afin de séparer les effets des paramètres σ_l et σ_r :

$$\mathbf{Q}(s) = \mathbf{Q}_0(s) + \sigma_l \mathbf{Q}_l(s) + \sigma_r \mathbf{Q}_r(s),$$

$$\mathbf{Q}_0(s) = \begin{bmatrix} [1, 0] \mathbf{\Delta}(s) & [0, -1] \mathbf{\Delta}(s) \\ [0, \Upsilon - \Gamma(s)^2] \mathbf{\Delta}(s) & [1, 0] \mathbf{\Delta}(s) \end{bmatrix}, \quad (58)$$

$$\mathbf{Q}_l(s) = \begin{bmatrix} [0, 1] \mathbf{\Delta}(s) & 0 \\ [-1, \Phi(\Upsilon)] \mathbf{\Delta}(s) & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q}_r(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ [-1, \Phi(\Upsilon)] \mathbf{\Delta}(s) & [0, 1] \mathbf{\Delta}(s) \end{bmatrix}.$$

6.2 Recherche d'ondes découplées

Dans cette section, la dépendance en la variable de Laplace s est omise afin d'alléger les notations.

6.2.1 Démarche adoptée

Comme nous l'avons dit en introduction de cette partie, le but est ici de trouver des ondes progressives découplées informées par la géométrie. Pour cela, il nous faut injecter la condition (51) dans (58) avant la diagonalisation.

Ceci est fait via le paramètre de dissymétrie θ . En effet, la condition (51) implique la réalité de cette quantité. De plus, ce rapport nous permet de distinguer les informations liée à la géométrie et celles liées à l'orientation : le signe de θ nous indique l'orientation du tube alors que $|\theta|$ (ou θ^2) nous donne une information sur le "taux de dissymétrie", invariant par changement d'orientation.

Pour bien comprendre cette étape, il est nécessaire de se demander à quoi correspond physiquement la diagonalisation de la matrice \mathbf{Q} . Comme l'indique (55), la matrice \mathbf{Q} est la matrice de transfert acoustique entre les états acoustiques aux extrémités du tubes. Cet état acoustique est un vecteur contenant la pression normalisée par la longueur du tronçon et la dérivée temporelle d'une quantité de mouvement.

Par définition, la diagonalisation d'une matrice \mathbf{M} revient à trouver les valeurs propres λ pour lesquels

$$\exists \mathbf{X} \neq 0 / \mathbf{M}\mathbf{X} = \lambda \mathbf{X}.$$

Dans notre cas, diagonaliser \mathbf{Q} revient donc à chercher une "proportion" de P et de U qui se préserve lorsqu'elle parcourt le tronçon de tube :

$$\mathbf{X} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda \mathbf{X} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

6.2.2 Recherche des valeurs propres

On pose

$$F(\theta, \Upsilon) = \frac{\phi_1(\theta^2) - \phi_1(\Upsilon)}{\phi_2(\Upsilon)} \quad (59)$$

Par définition,

$$\begin{cases} \sigma_l = \sqrt{\Upsilon} \frac{R_r - R_l \cosh(\sqrt{\Upsilon})}{R_l \sinh(\sqrt{\Upsilon})}, \\ \sigma_r = \sqrt{\Upsilon} \frac{R_l - R_r \cosh(\sqrt{\Upsilon})}{R_r \sinh(\sqrt{\Upsilon})}. \end{cases} \quad (60)$$

On en déduit

$$\begin{cases} \sigma_l = \frac{e^\theta}{\phi_2(\Upsilon)} - \Phi(\Upsilon) = F(\theta, \Upsilon) + \frac{\sinh(\theta)}{\phi_2(\Upsilon)}, \\ \sigma_r = \frac{e^{-\theta}}{\phi_2(\Upsilon)} - \Phi(\Upsilon) = F(\theta, \Upsilon) - \frac{\sinh(\theta)}{\phi_2(\Upsilon)}. \end{cases} \quad (61)$$

En injectant (61) dans (58), on obtient une nouvelle expression de la matrice $\mathbf{Q}(s)$, uniquement en fonction des paramètres θ et Υ .

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{1,1} &= \phi_1(\Gamma^2) + \left(F(\theta, \Upsilon) + \frac{\sinh(\theta)}{\phi_2(\Upsilon)} \right) \phi_2(\Gamma^2) \\ \mathbf{Q}_{1,2} &= -\phi_2(\Gamma^2) \\ \mathbf{Q}_{2,1} &= -2F(\theta, \Upsilon)\phi_1(\Gamma^2) + \left(\left(\frac{\sinh(\theta)}{\phi_2(\Upsilon)} \right)^2 - F(\theta, \Upsilon)^2 - \Gamma^2 \right) \phi_2(\Gamma^2) \\ \mathbf{Q}_{2,2} &= \phi_1(\Gamma^2) + \left(F(\theta, \Upsilon) - \frac{\sinh(\theta)}{\phi_2(\Upsilon)} \right) \phi_2(\Gamma^2) \end{aligned} \quad (62)$$

On vérifie bien que l'on a encore

$$\det(\mathbf{Q}) = 1 \quad (63)$$

Le polynôme caractéristique associé à cette matrice est

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 2b'\lambda + 1 \quad (64)$$

$$\text{avec } b' = \phi_1(\Gamma^2) + F(\theta, \Upsilon)\phi_2(\Gamma^2) \quad (65)$$

et les valeurs propres de la matrice de transfert acoustique s'écrivent

$$\begin{aligned} \lambda_r &= b' \left(1 - \sqrt{\frac{b'^2 - 1}{b'^2}} \right) \text{ et} \\ \lambda_l &= b' \left(1 + \sqrt{\frac{b'^2 - 1}{b'^2}} \right). \end{aligned} \quad (66)$$

Comme $\det \mathbf{Q} = 1$, on sait que $\lambda_l = \lambda_r^{-1}$. On notera par la suite $\lambda = \lambda_r$. Il existe une matrice de passage \mathbf{P} telle que

$$\mathbf{Q} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1}. \quad (67)$$

Ces valeurs propres et la matrice de passage qui leur est associée définissent un nouveau type d'ondes progressives découplées qui se propagent à l'intérieur d'un tube acoustique à Υ constant avec prise en compte des pertes visco-thermique.

La diagonalisation de la matrice de transfert acoustique s'écrit donc :

$$\begin{bmatrix} P_r \\ U_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_r} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_{rs}} \end{bmatrix} \mathbf{P} \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} \begin{bmatrix} R_l & 0 \\ 0 & R_{ls} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_l \\ U_l \end{bmatrix} \quad (68)$$

6.2.3 Paramétrisation des espaces propres

Pour trouver les vecteurs propres associés à chaque valeur propre, on résout

$$\mathbf{Q} \begin{bmatrix} u_{l/r} \\ v_{l/r} \end{bmatrix} = \lambda_{l/r} \begin{bmatrix} u_{l/r} \\ v_{l/r} \end{bmatrix} \quad (69)$$

Comme la diagonalisation fait apparaître deux valeurs propres de multiplicité 1, la matrice de passage possède deux degrés de liberté que l'on note α et β . En définissant

$$K = \frac{b\prime}{\phi_2(\Gamma^2)} \sqrt{\frac{b'^2 - 1}{b'^2}} \text{ et} \quad (70)$$

$$a = \frac{\sinh(\theta)}{\phi_2(\Upsilon)}, \quad (71)$$

on obtient la matrice de passage

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha(a - K) & \beta(a + K) \end{bmatrix} \quad (72)$$

et son inverse

$$\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{2\alpha\beta K} \begin{bmatrix} (K + a)\beta & -\beta \\ (K - a)\alpha & \alpha \end{bmatrix}. \quad (73)$$

Nous avons donc trouvé un paramétrage de la matrice de passage liée aux valeurs propres définies ci-dessus.

Maintenant que nous connaissons l'expression des matrices de passage, l'équation de transfert (68) peut être mise sous la forme d'une succession de quadripôles. Cette décomposition est présentée en figure 9 (à gauche) en convention admittance (pression en entrée, débit en sortie).

Nous souhaitons obtenir une structure symétrique. Remarquons tout d'abord que lorsque l'on change l'orientation, a devient $-a$, on note donc $a_l = a$ et $a_r = -a$. Comme le changement d'orientation doit se traduire uniquement par l'inversion des indices $.l$ et $.r$, il apparaît une condition sur les degrés de libertés de notre décomposition : α et β . En effet, on observe que la symétrie est retrouvée dans le cas où le changement d'orientation change α en β et inversement. En notant $\alpha_l = \alpha$ et $\alpha_r = \beta$, on retrouve bien un structure entièrement symétrique (9 à droite).

Un travail reste à faire sur le choix des quantités α_l et α_r . Nous pouvons citer comme possibilités de choix respectant la symétrie :

- $\alpha_l = \alpha_r$
- $\alpha_l = R_l$ et $\alpha_r = R_r$
- $\alpha_l = R_r$ et $\alpha_r = R_l$

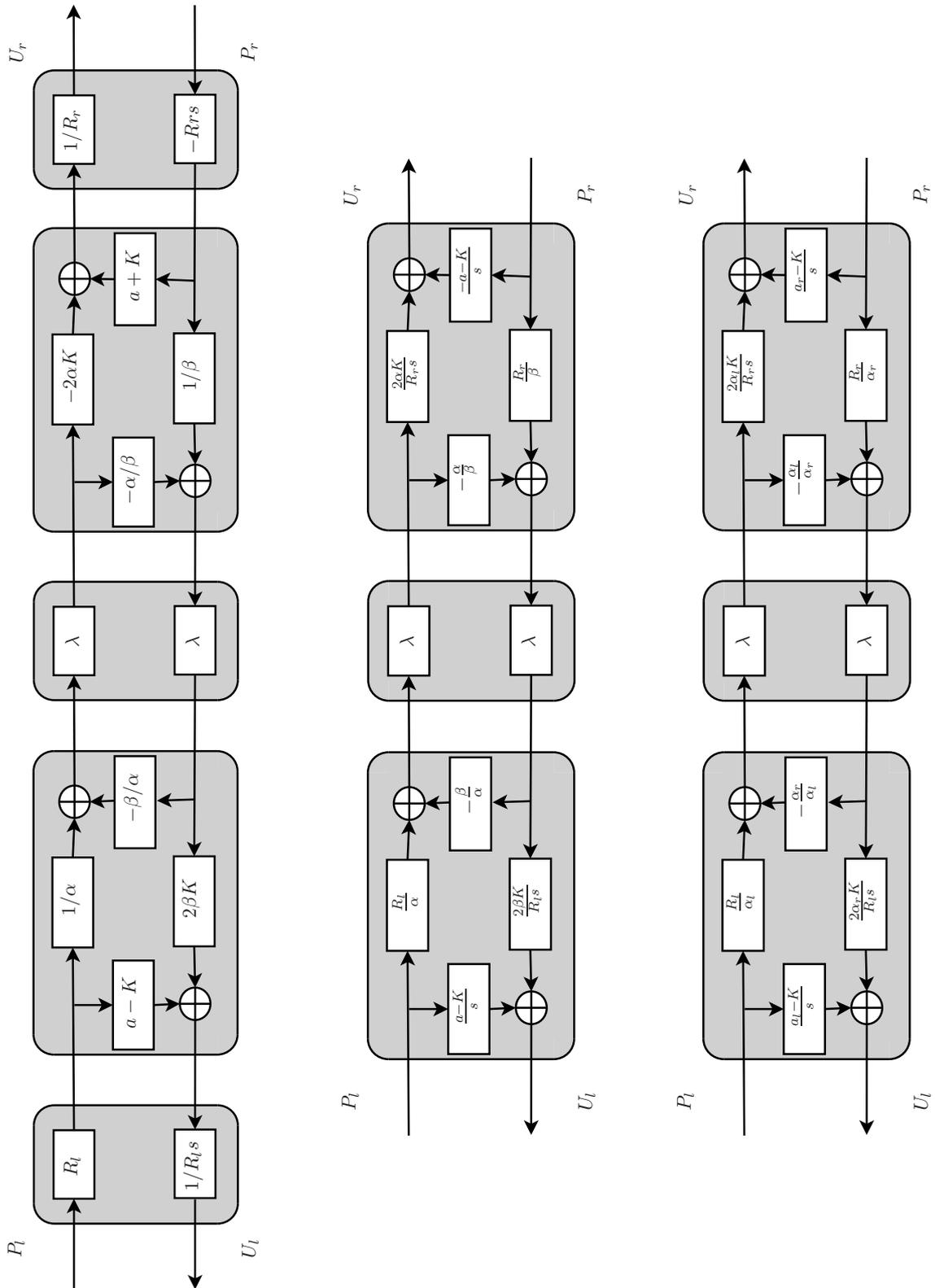


FIGURE 9 – Décomposition en quadripôles de transfert. Rappelons que le but de l'étude est, entre autres, de retrouver des fonctions stables dans la boucle interne. Les trois représentations sont équivalentes avec $a_l = a$, $a_r = a$, $\alpha_l = \alpha$ et $\beta_r = \beta$.

6.3 Etudes et interprétation des valeurs propres

L'expression (68) fait apparaître les nouveaux opérateurs de propagation (voir aussi la figure 9), il s'agit simplement de la valeur propre λ . Etudions quelques propriétés de ce "nouvel opérateur" de propagation.

Cas des tubes droits Etudions en premier lieu le cas $\Upsilon = 0$ et $\theta = 0$ (tube droit). Dans ce cas, on trouve

$$b' = \phi_1(\Gamma^2) \quad (74)$$

$$\lambda = \phi_1(\Gamma^2) - \Gamma\phi_2(\Gamma^2) = e^{-\Gamma} \quad (75)$$

On retrouve bien les mêmes opérateurs de propagation et de dispersion qu'en section 1 (en prenant $\varepsilon = 0$, on obtient $\Gamma(s) = \sqrt{s^2}$ qui vaut s sur \mathbb{C}_0^+ en choisissant la fonction racine coupée sur \mathbb{R}^-).

Première étude la fonction F D'après (64-66), on montre aisément que l'on retrouve l'opérateur de propagation $e^{-\Gamma}$ si $F(\theta, \Upsilon) = 0$. De plus, notons que la valeur de $F(\theta, \Upsilon)$ ne dépend pas du signe de θ mais uniquement de θ^2 . On se place donc maintenant dans le cas $\theta \geq 0$ (le choix du signe de θ revient simplement à un choix d'orientation du tronçon). Ceci nous permet de faire une première cartographie des différentes géométries selon les valeurs de θ^2 et Υ .

Υ	$-\pi^2$	0	$+\infty$
$\theta^2 < \Upsilon$	X	X	Géométrie de type C
$\theta^2 = \Upsilon$	X	Tube droit	Géométrie de type exponentiel
$\theta^2 > \Upsilon$	Tube convexe	Tube conique	Géométrie de type S

TABLE 1 – Catégorisation géométrique en fonction de θ et Υ

Les différentes géométries des tubes évasés (ou tubes convexes, i.e. $\Upsilon > 0$) sont présentées en figure 10. Les 3 tubes représentés sont définis entre 0 et $L = 1$ mais les rayons sont tracés au-delà de ces valeurs afin d'illustrer les propriétés de chaque type géométrique.

La géométrie de type C correspond au cas $\theta^2 < \Upsilon$. Ces profils peuvent s'écrire sous la forme $C \cosh(al + b)$ (le calcul n'est pas détaillé ici). On constate sur la figure 10 l'absence de passage par 0 du rayon dans ce cas. La géométrie de type S correspond au cas $\theta^2 > \Upsilon$. Ces profils peuvent s'écrire sous la forme $S \sinh(al + b)$ (le calcul n'est pas détaillé ici). On constate sur la figure 10 un changement de signe du rayon (en $\ell_0 < 0$). Enfin, la géométrie de type exponentiel correspond au cas $\theta^2 = \Upsilon$. On montre dans ce cas que le profil peut s'écrire sous la forme Ee^{al+b} (le calcul n'est pas détaillé ici).

Cette première catégorisation de profil peut être tracée dans le plan ayant pour axes Υ et θ^2 , voir figure 11.

Etudions les évolutions des diagrammes de Bode du nouvel opérateur de propagation en fonction des paramètres Υ et θ . Les figures 12 à 14 présentent les diagrammes de Bode de l'opérateur de propagation pour un tube concave, un tube cônique, un tube à géométrie de type S, un tube à géométrie de type exponentiel et un tube à géométrie de type C.

Nous pouvons retrouver de nombreuses informations intéressantes dans ces courbes. Premièrement, on constate l'apparition de "modes en creux" ou "modes non transportés" dans le module de l'opérateur de propagation. Ces modes, propres au tronçon, sont à vrai dire plus des "germes de modes" que des modes proprement dits. En effet, l'effet général de ces modes sera profondément modifié lorsque le tronçon sera connecté à un autre tronçon ou à une impédance

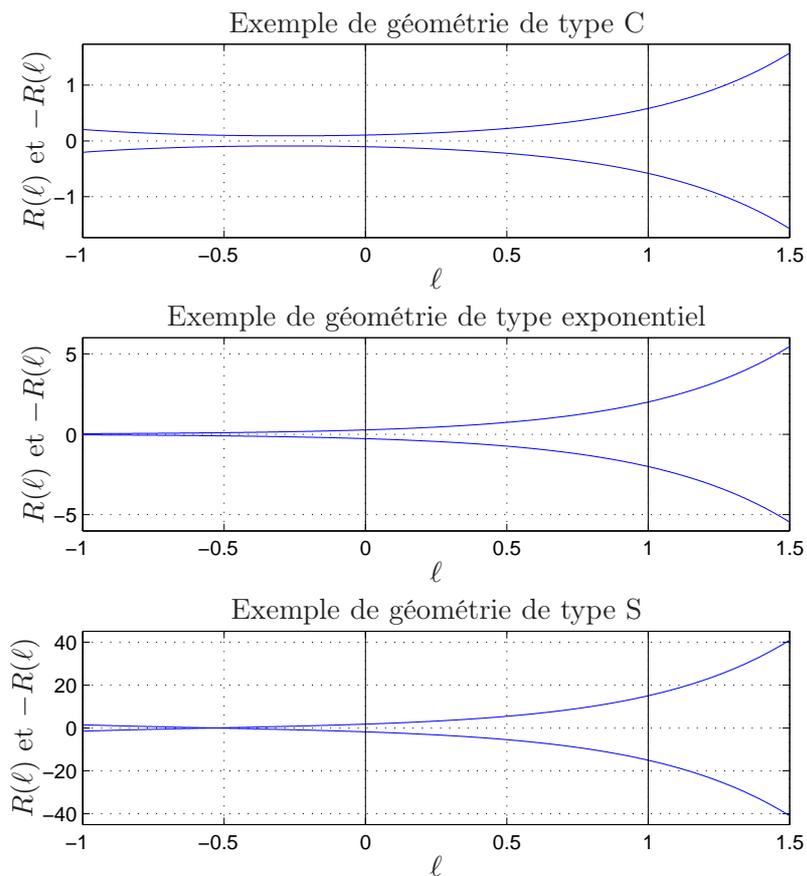


FIGURE 10 – 3 types de tubes évasés

de rayonnement par exemple. Autre exemple, si on connecte de façon \mathcal{C}^1 ce tronçon à un autre tronçon ayant le même paramètre Υ et la même longueur, on obtient un tronçon ayant comme longueur la somme des deux longueurs originales et le même paramètre Υ . On devrait donc retrouver le même diagramme de Bode avec un mode sur deux (cela n'a pas encore été vérifié). Nous reparleront de ces modes un peu plus loin.

Par ailleurs, on remarque que, dans le cas des géométries de type exponentiel, les modes en creux présents dans le module de l'opérateur de propagation disparaissent, on retrouve $\lambda = e^\Gamma$ (qui est stable car $\Upsilon > 0$).

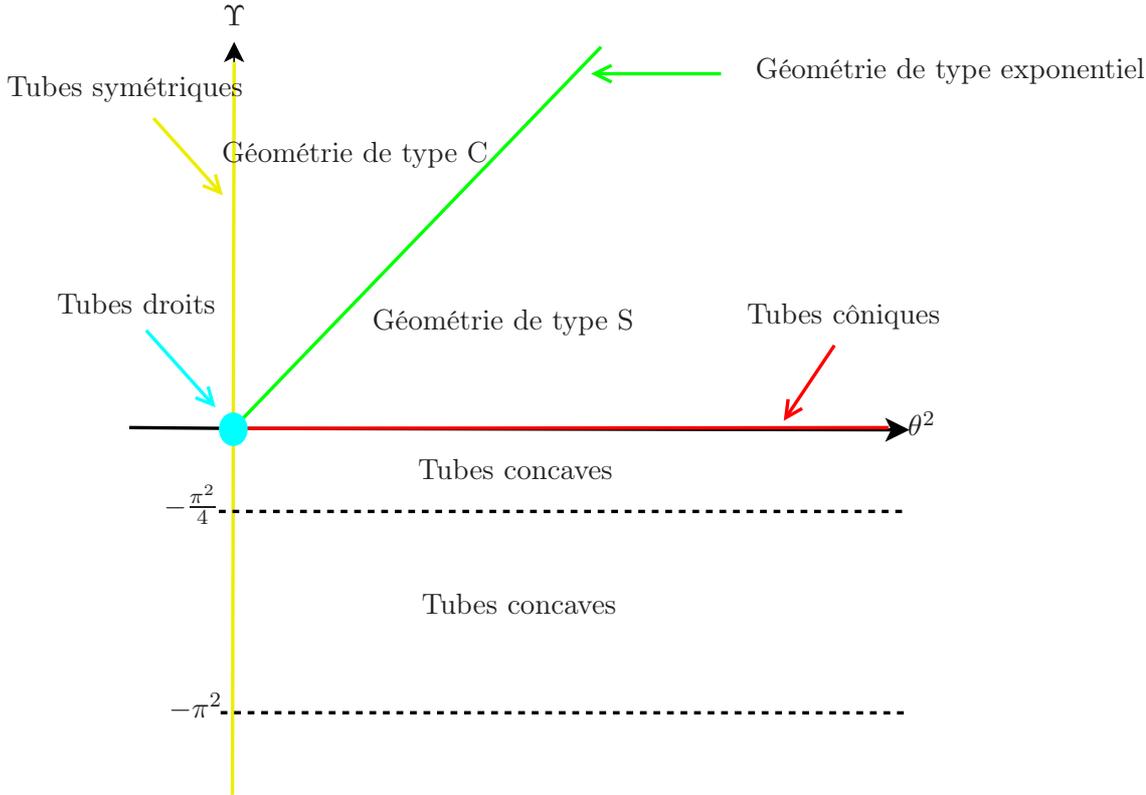


FIGURE 11 – Catégorisation des différentes géométries de tube

Commentaires généraux sur les tubes à section variable Nous avons étudié les valeurs propres et les opérateurs de propagation qui ont été trouvés dans cette étude. Afin de présenter les opérateurs de dispersion, les pages suivantes présentent une série de courbes qui permettent de comparer l'opérateur de dispersion $D(s)$ (26) précédemment utilisé avec le nouvel opérateur de dispersion déduit des valeurs propres que nous avons trouvé :

$$D_n(s) = e^s \lambda(s). \quad (76)$$

Les pages suivantes présentent le tracé du rayon, les modules et phases de $D(s)$ dans le domaine de Laplace et les modules et phases de $D_n(s)$ dans le domaine de Laplace pour plusieurs jeux de paramètres Υ , θ et ε .

Sur chaque double page, les figures sont présentés comme suit

- De gauche à droite : $\Upsilon = 10, 1, 0, -1, -5$.
- De haut en bas : rayon du tronçon, module de $D(s)$, phase de $D(s)$, module de $D_n(s)$, phase de $D_n(s)$.

Les doubles pages sont présentées dans cet ordre :

- $\varepsilon = 0, Rr/Rl = 1$,
- $\varepsilon = 0, Rr/Rl = 2$,
- $\varepsilon = 0, Rr/Rl = 10$,
- $\varepsilon = 0.1, Rr/Rl = 1$,
- $\varepsilon = 0.1, Rr/Rl = 2$,
- $\varepsilon = 0.1, Rr/Rl = 10$.

Les codes couleurs sont les suivants :

- Pour les modules, l'échelle va de 0 à 2, du bleu foncé au rouge. Tout ce qui est supérieur à 2 est rouge foncé. Cette coloration ne permet pas de différencier les pics d'amplitude

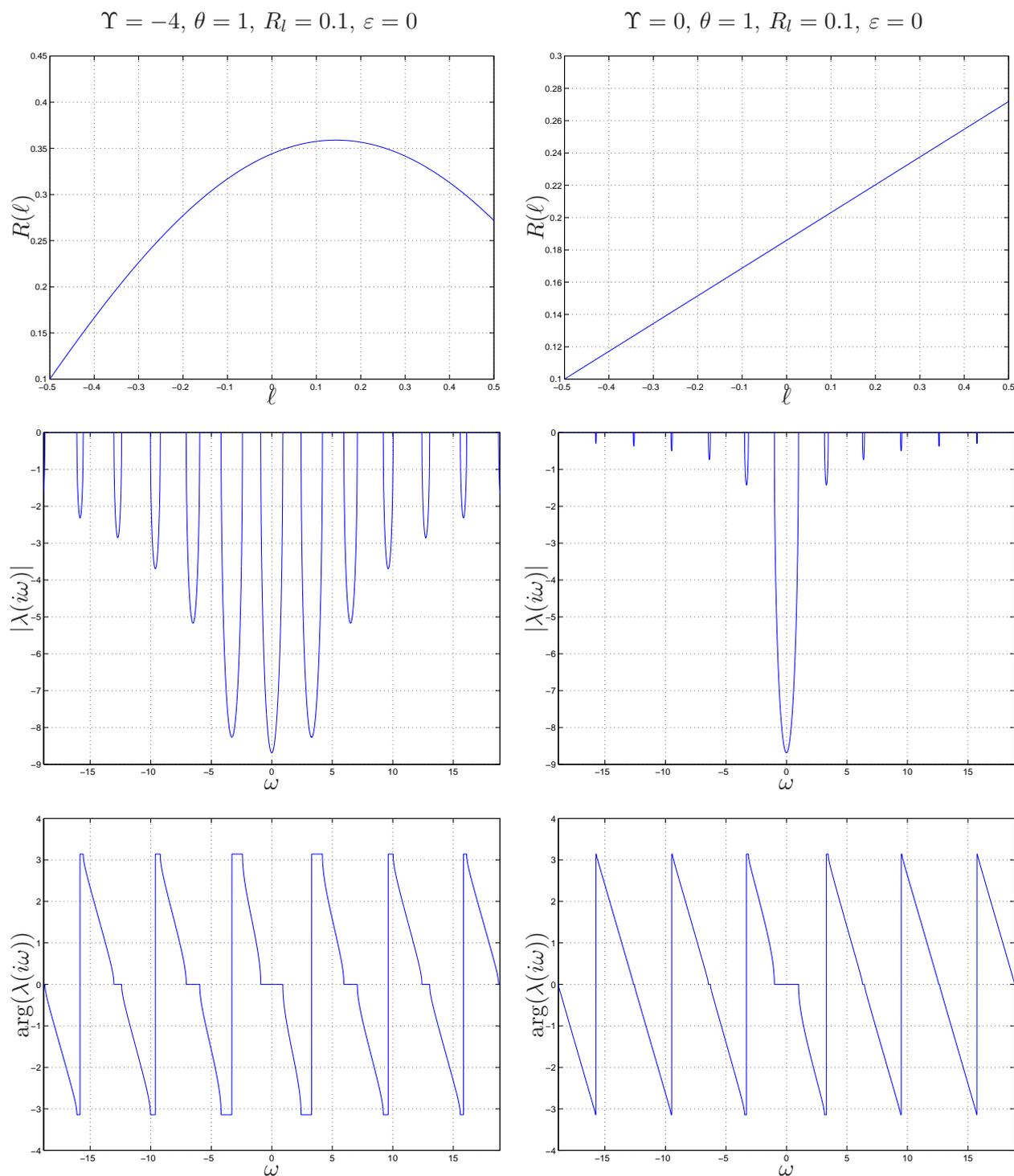


FIGURE 12 – Diagramme des Bode des opérateurs de propagation, tube concave (à gauche) et tube conique (à droite)

supérieur à 2 mais en revanche, elle est très adaptée pour repérer le passage au-dessus ou en-dessous de 1.

- Pour les phases, l'échelle est circulaire : les couleurs correspondantes à $-\pi$ et π sont rouges. Les couleurs se déroulent ensuite en passant par le bleu clair pour une phase nulle.

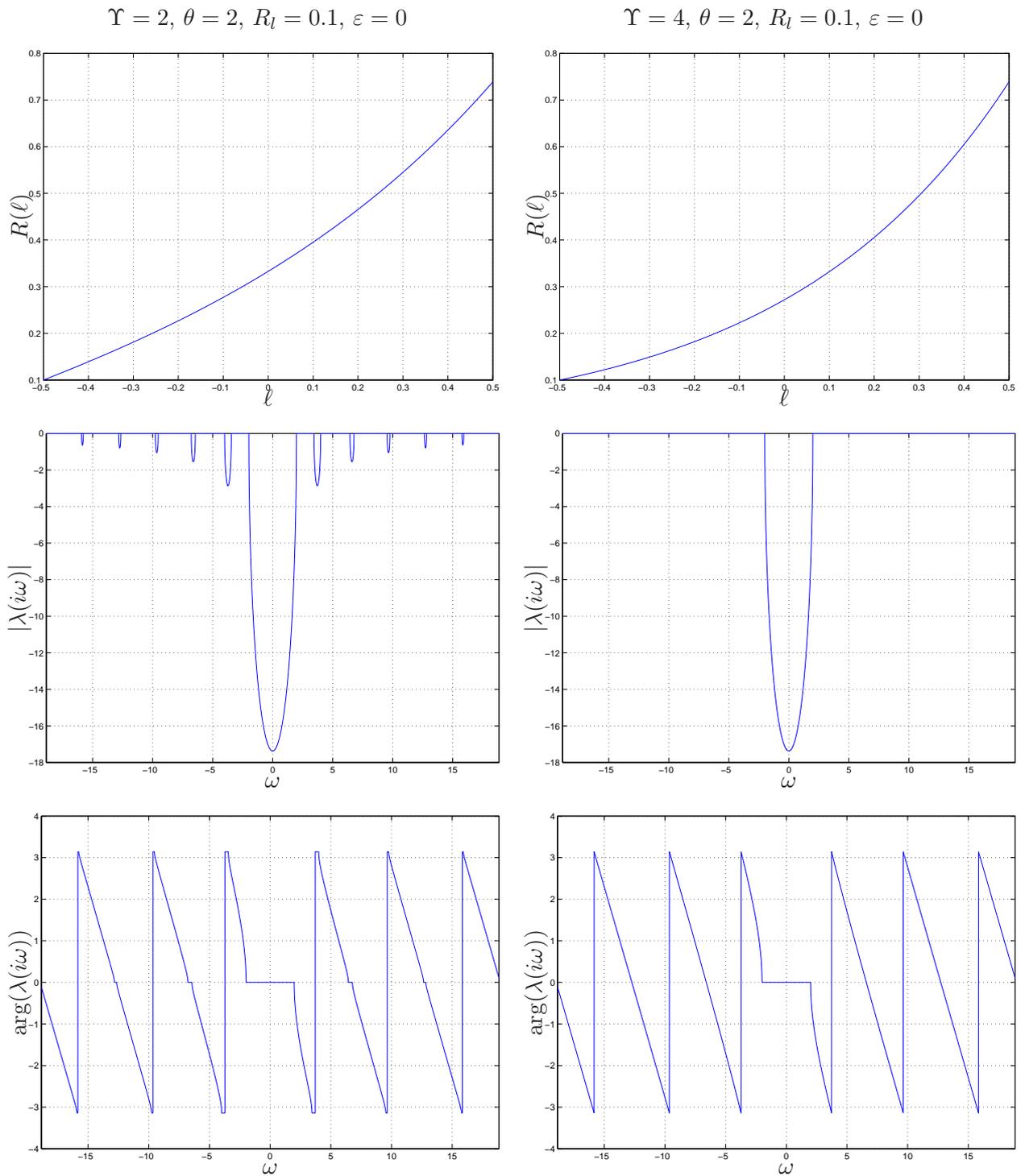


FIGURE 13 – Diagramme des Bode des opérateurs de propagation, géométrie de type S (à gauche) et géométrie de type exponentiel (à droite)

$$\Upsilon = 4, \theta = 1, R_l = 0.1, \varepsilon = 0$$

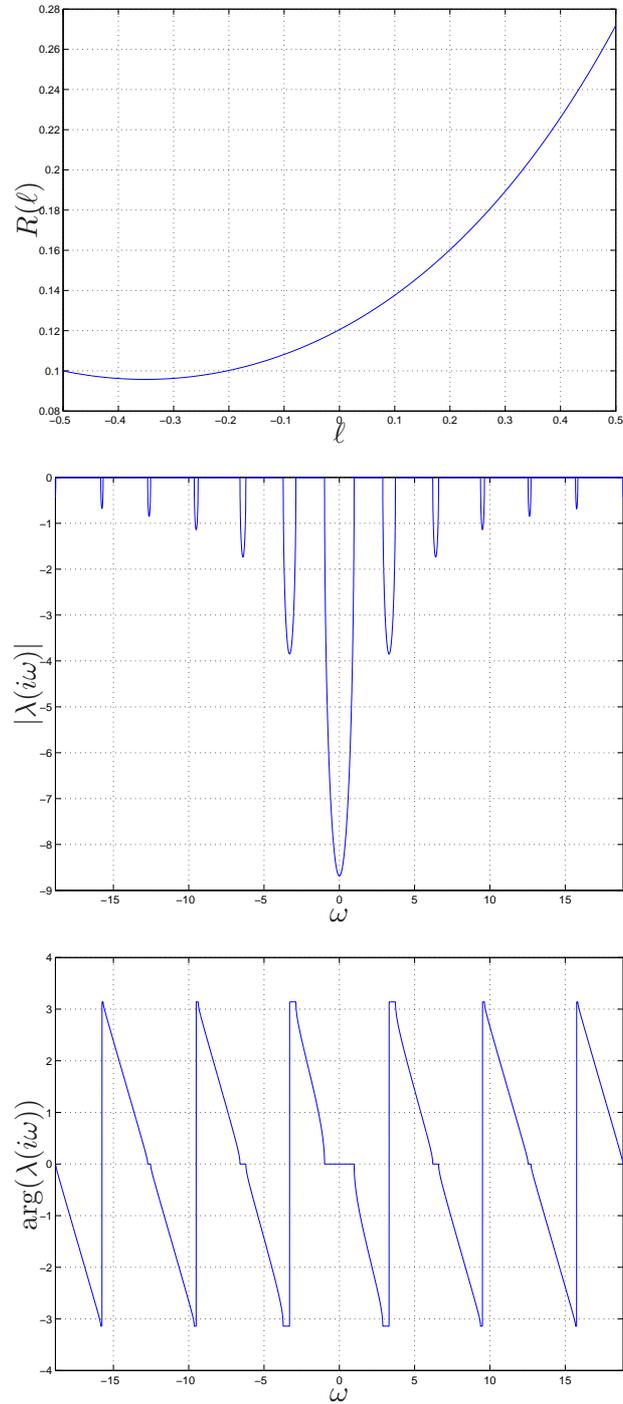
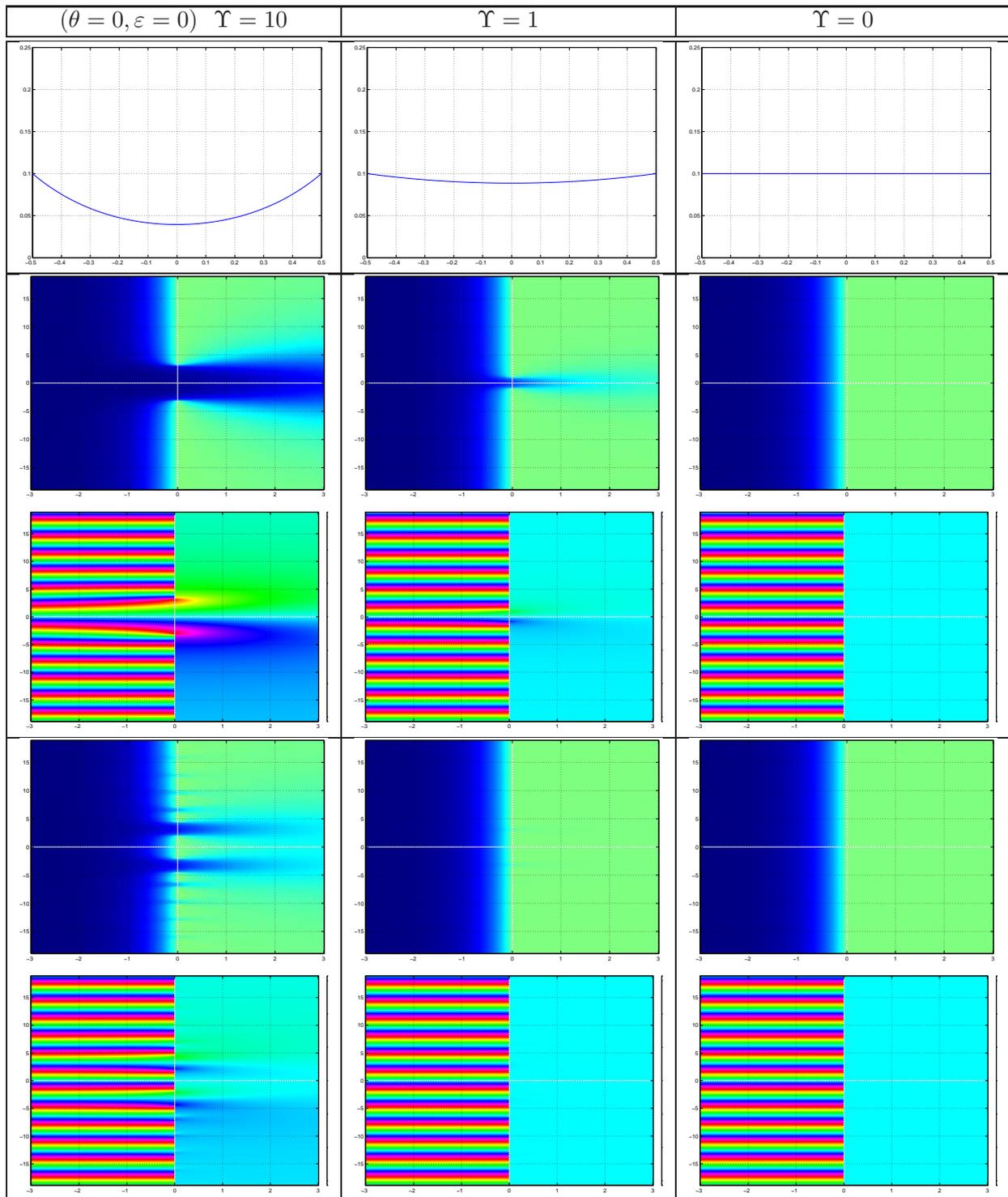
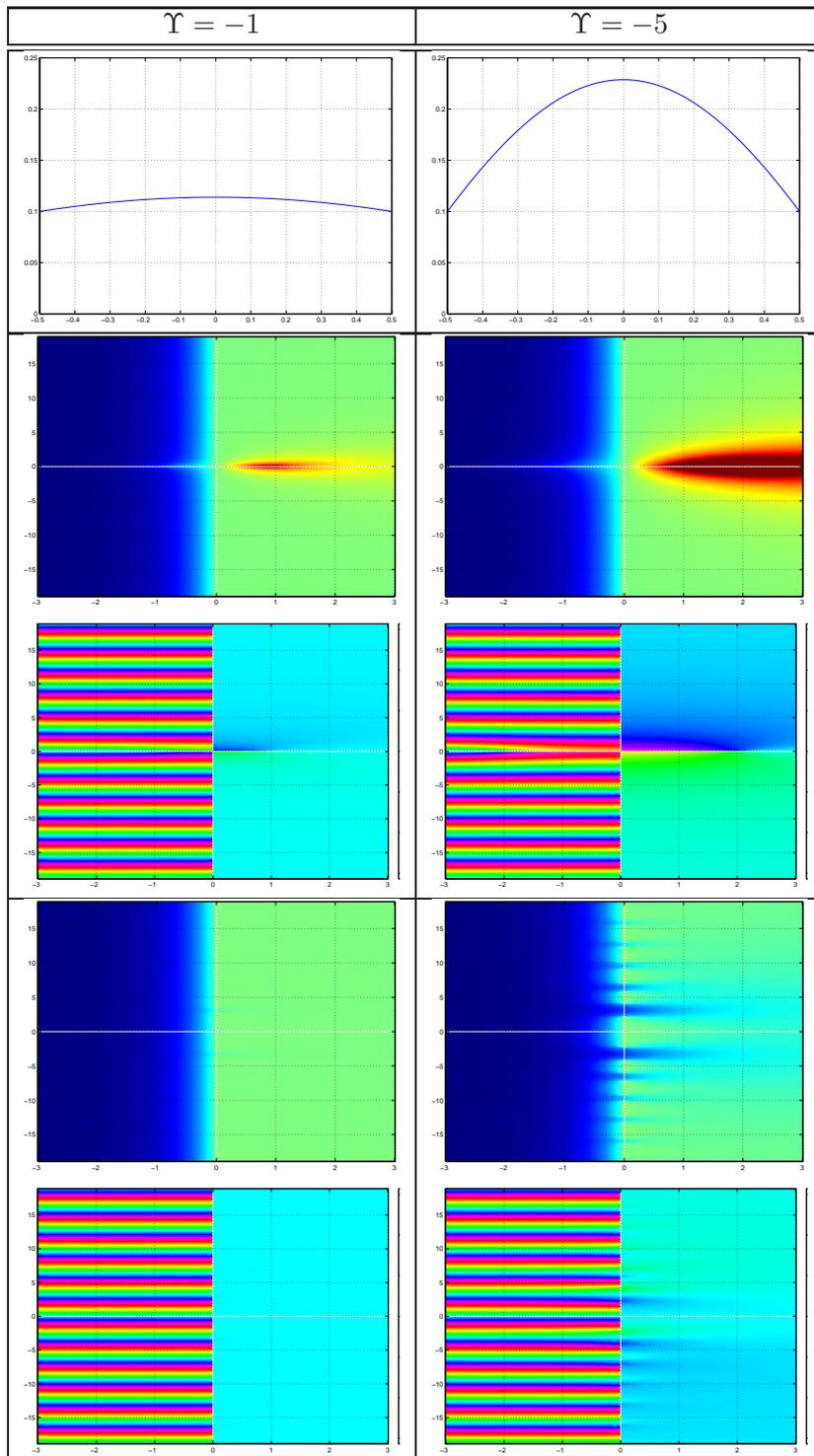
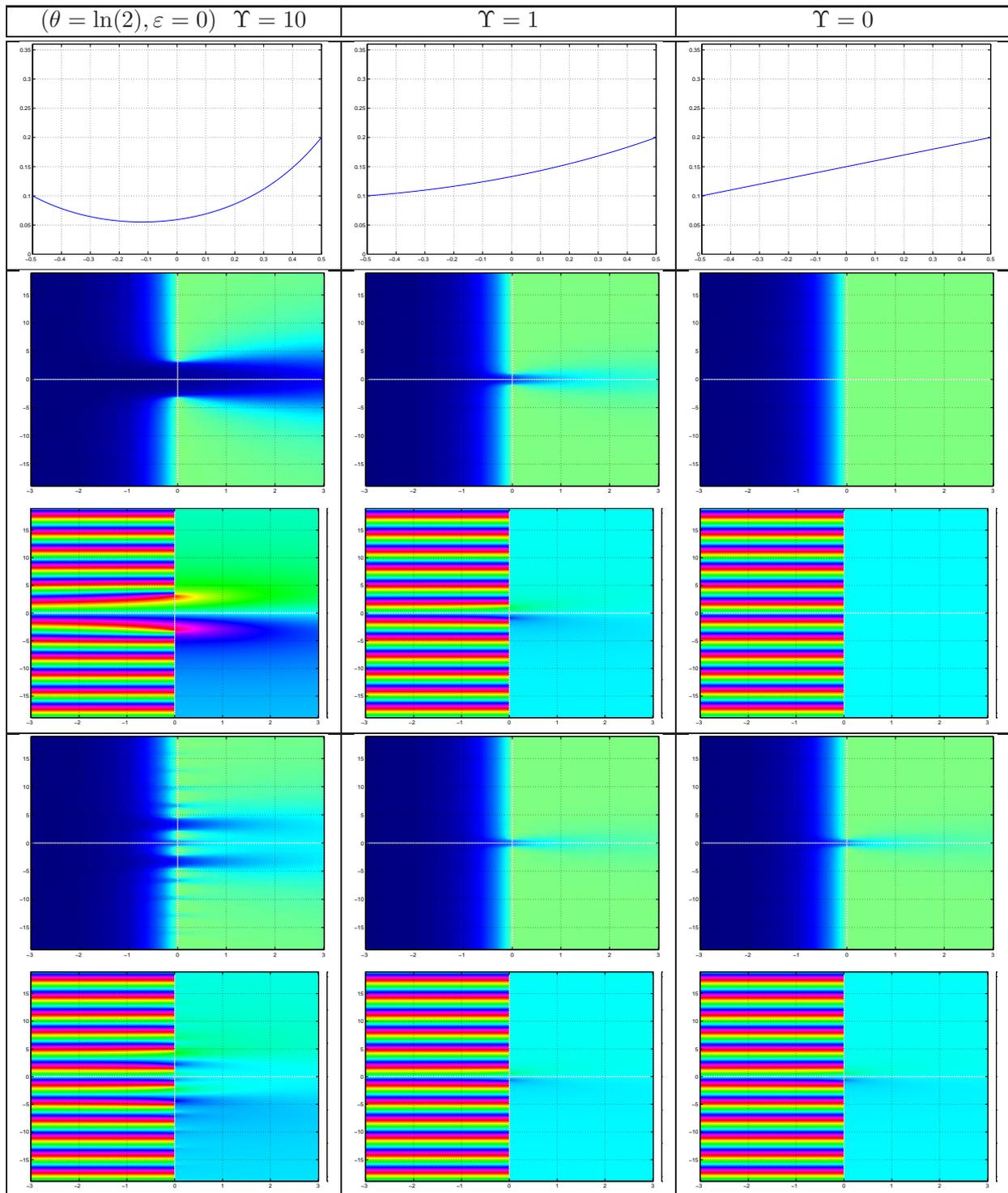
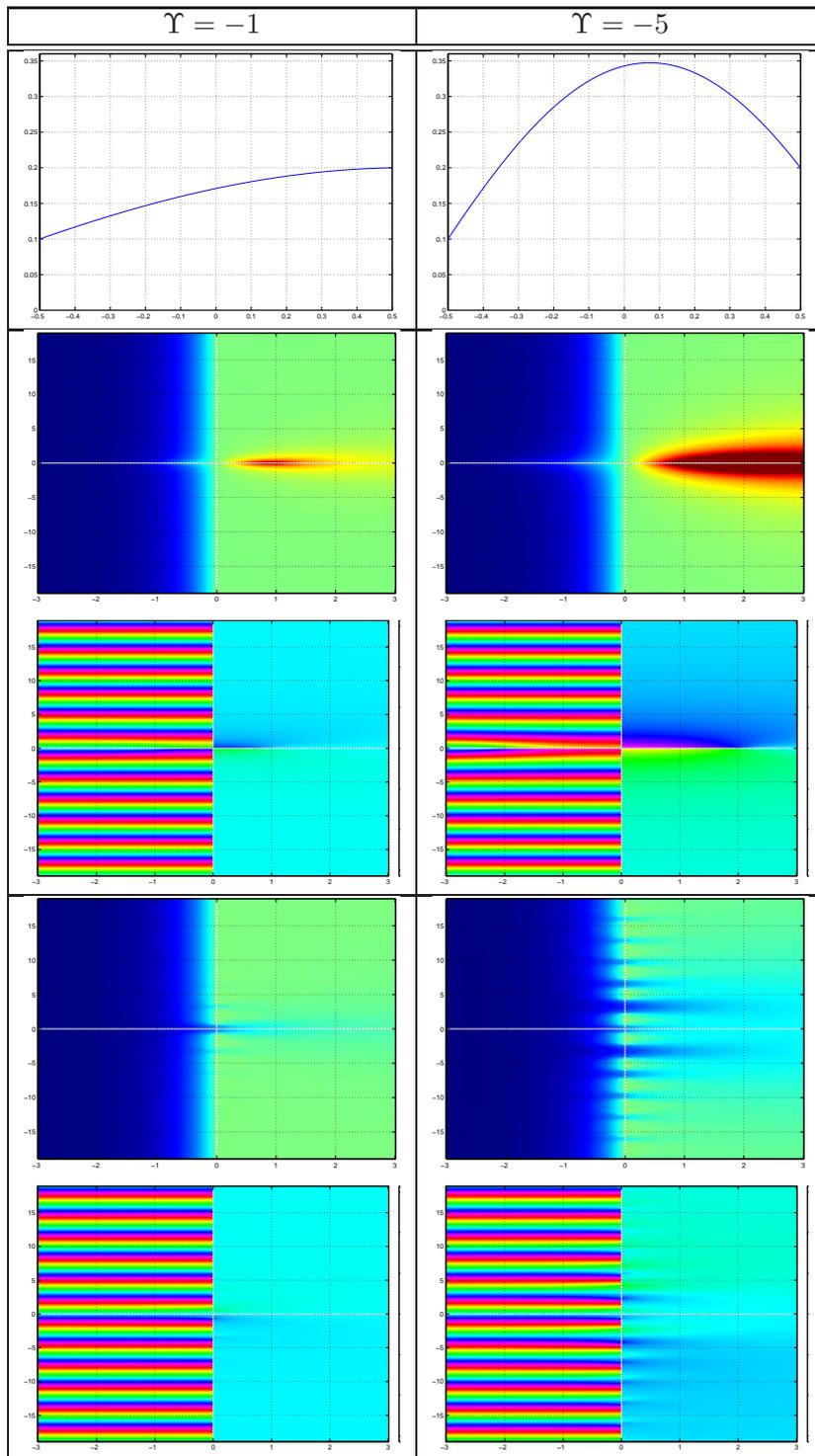


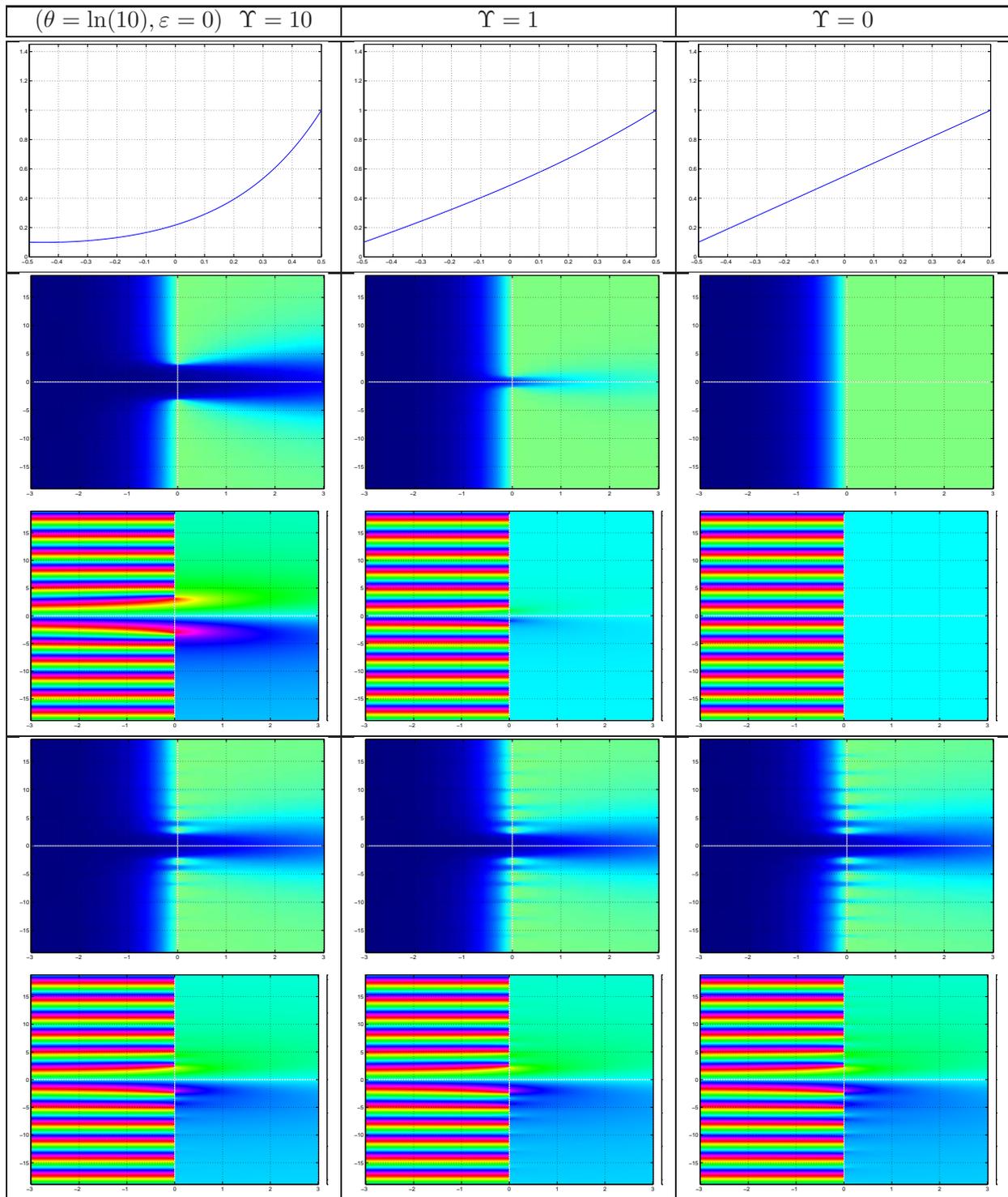
FIGURE 14 – Diagramme des Bode des opérateurs de propagation, géométrie de type C

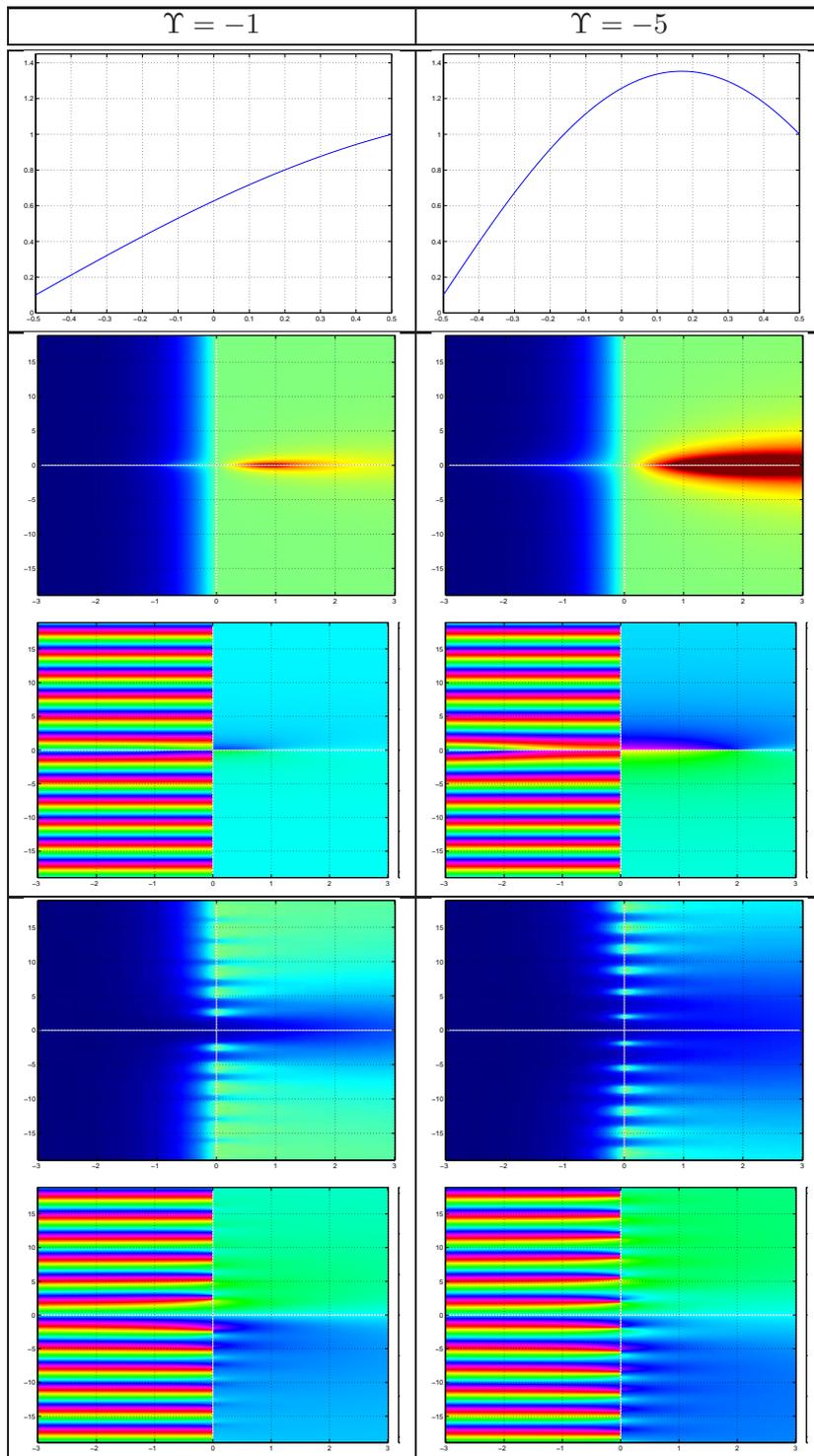


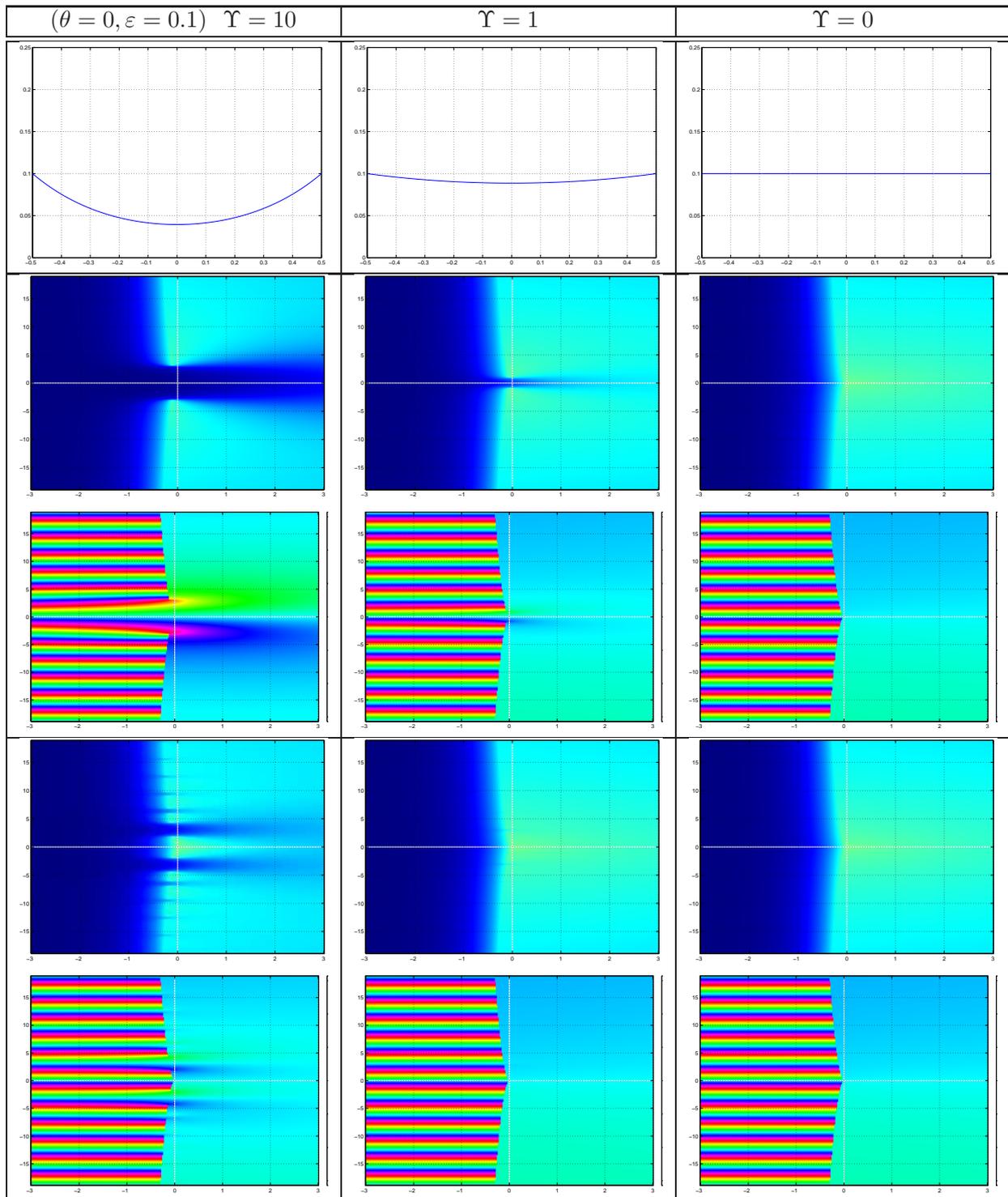


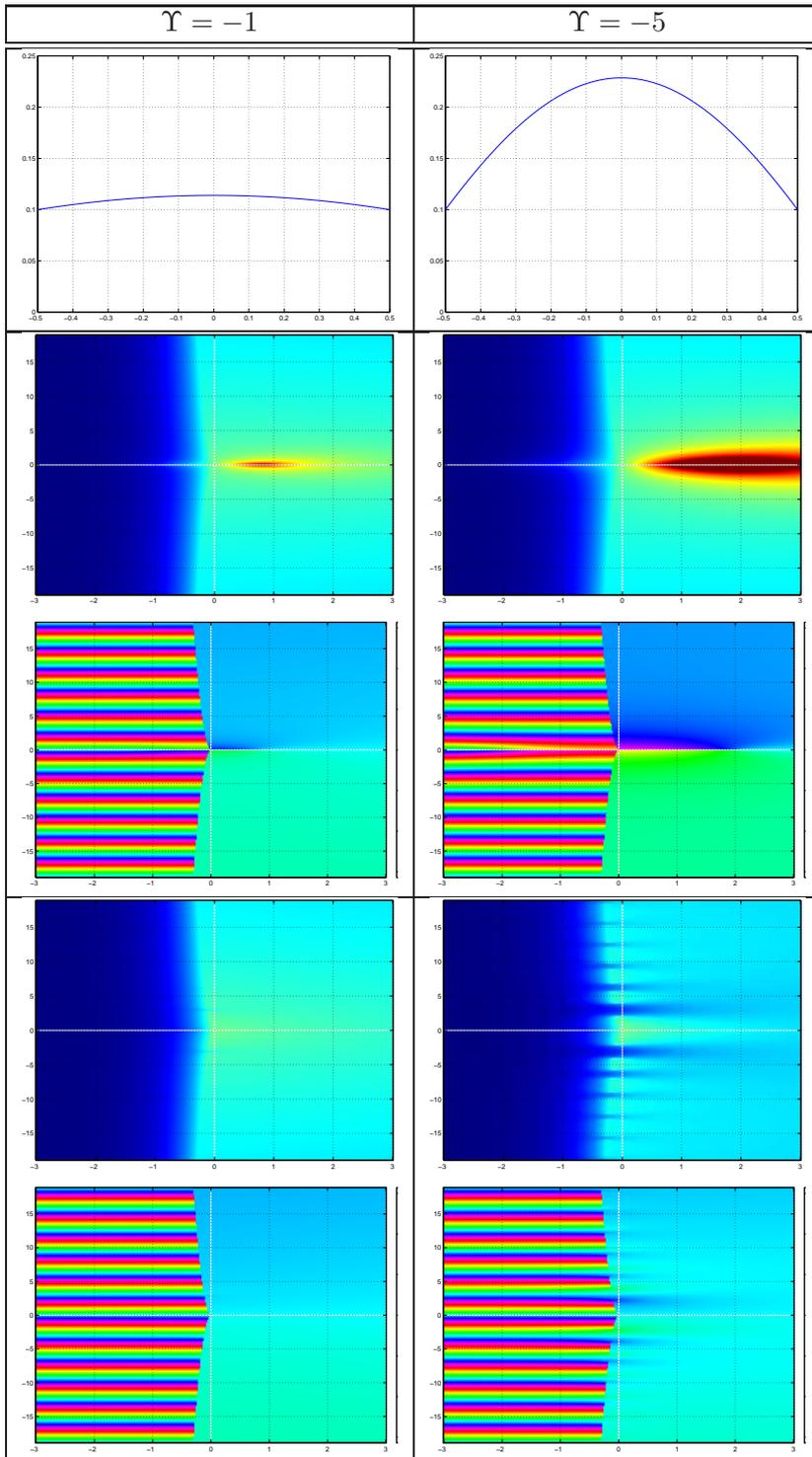


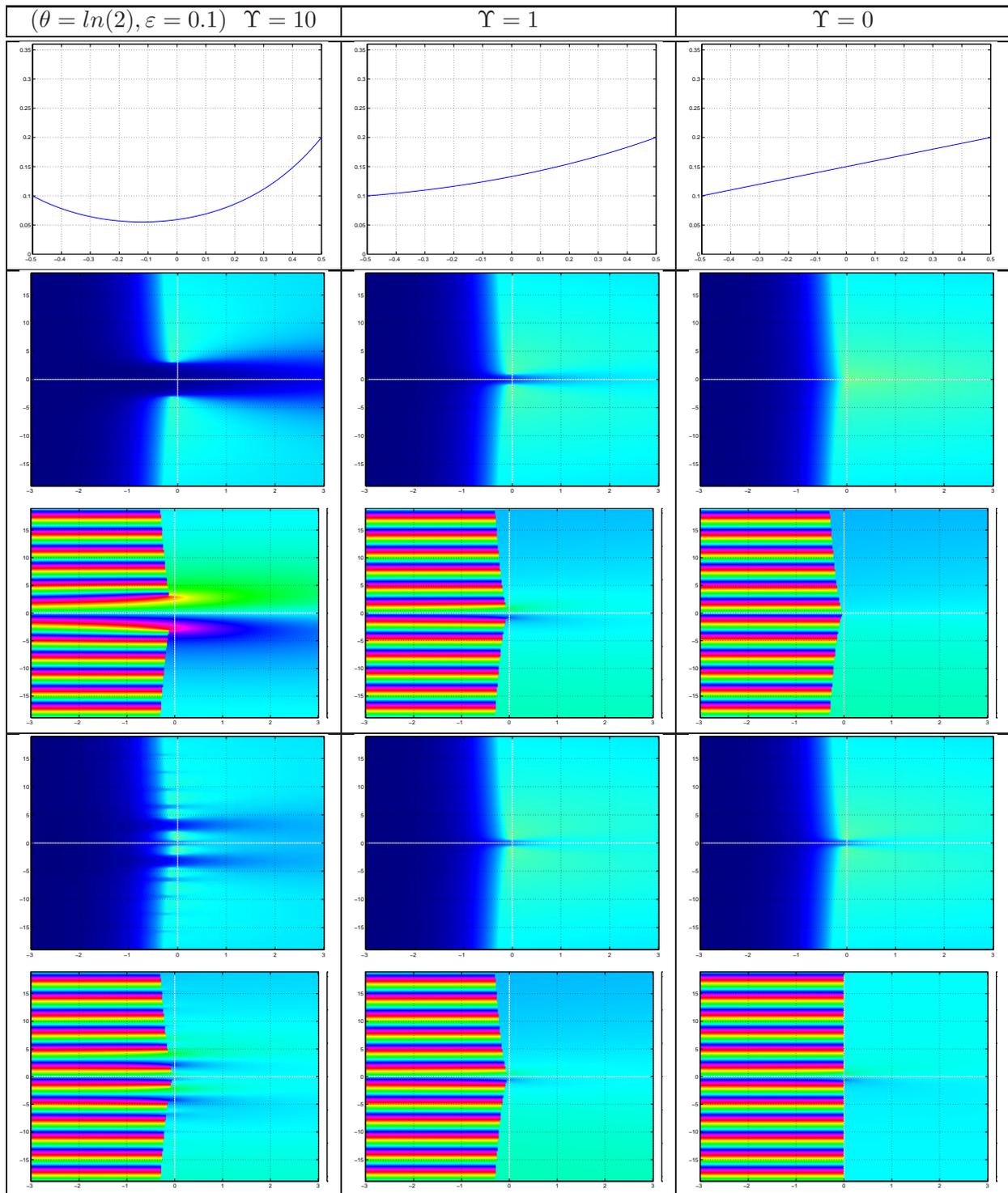


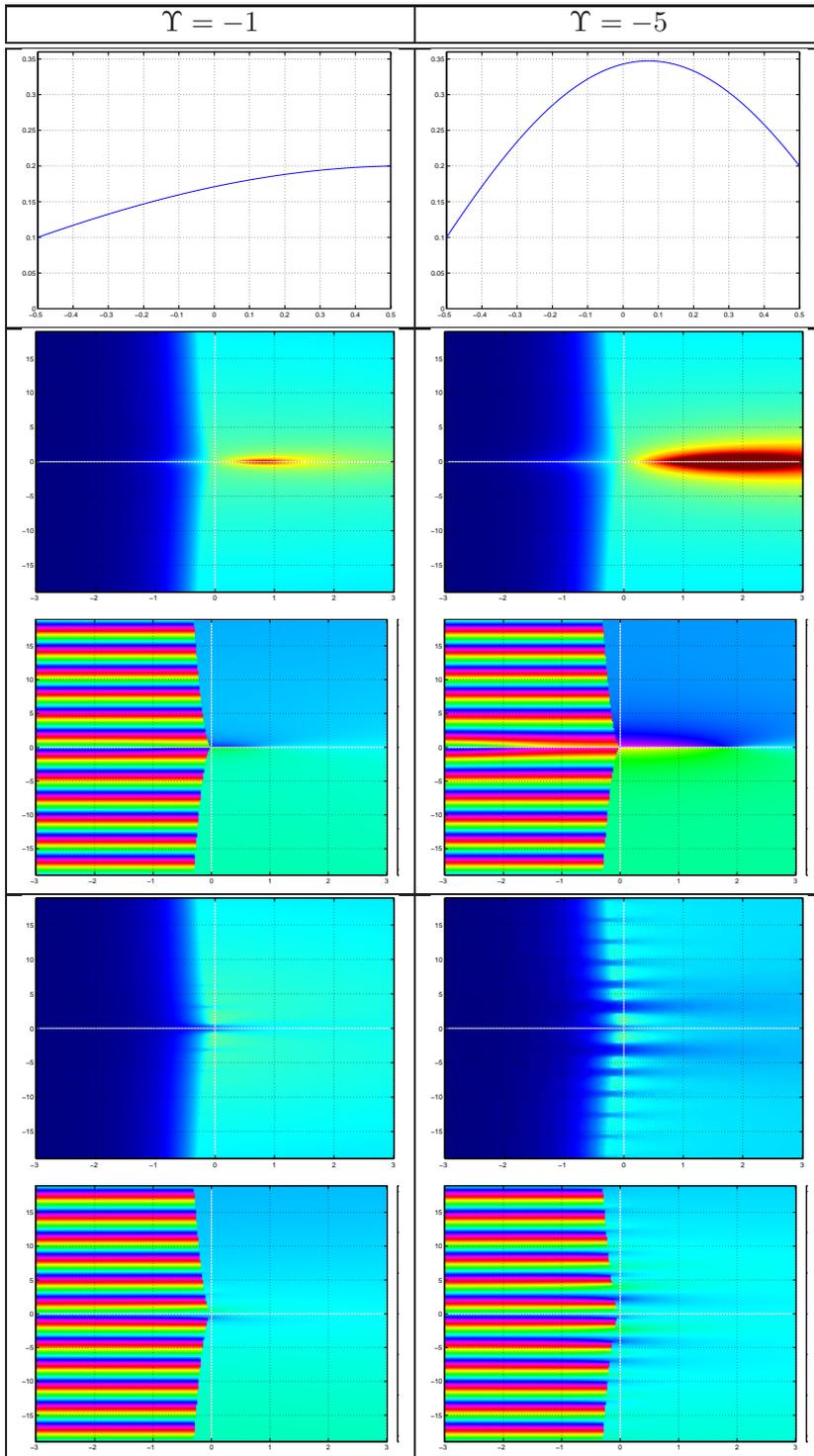


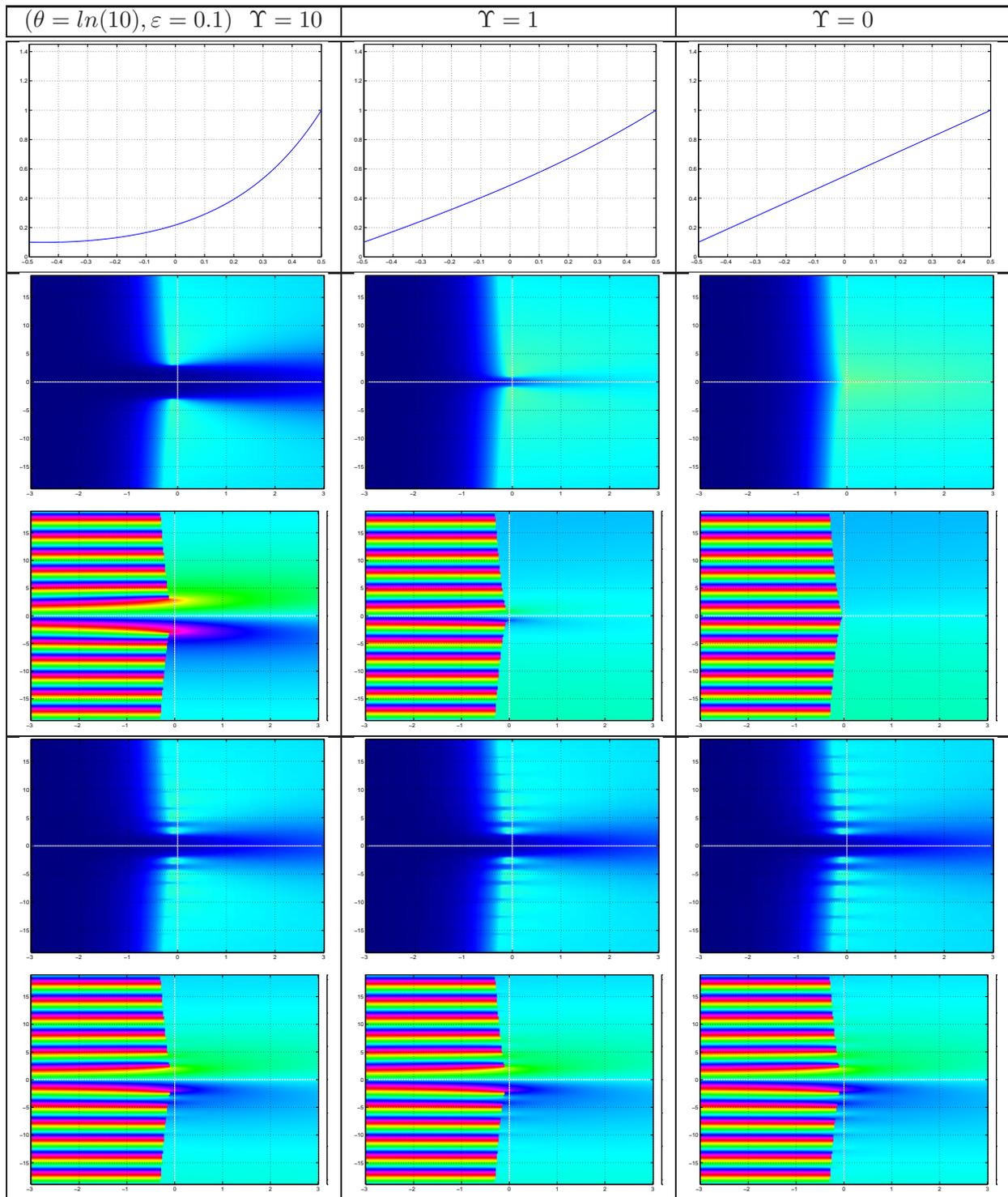


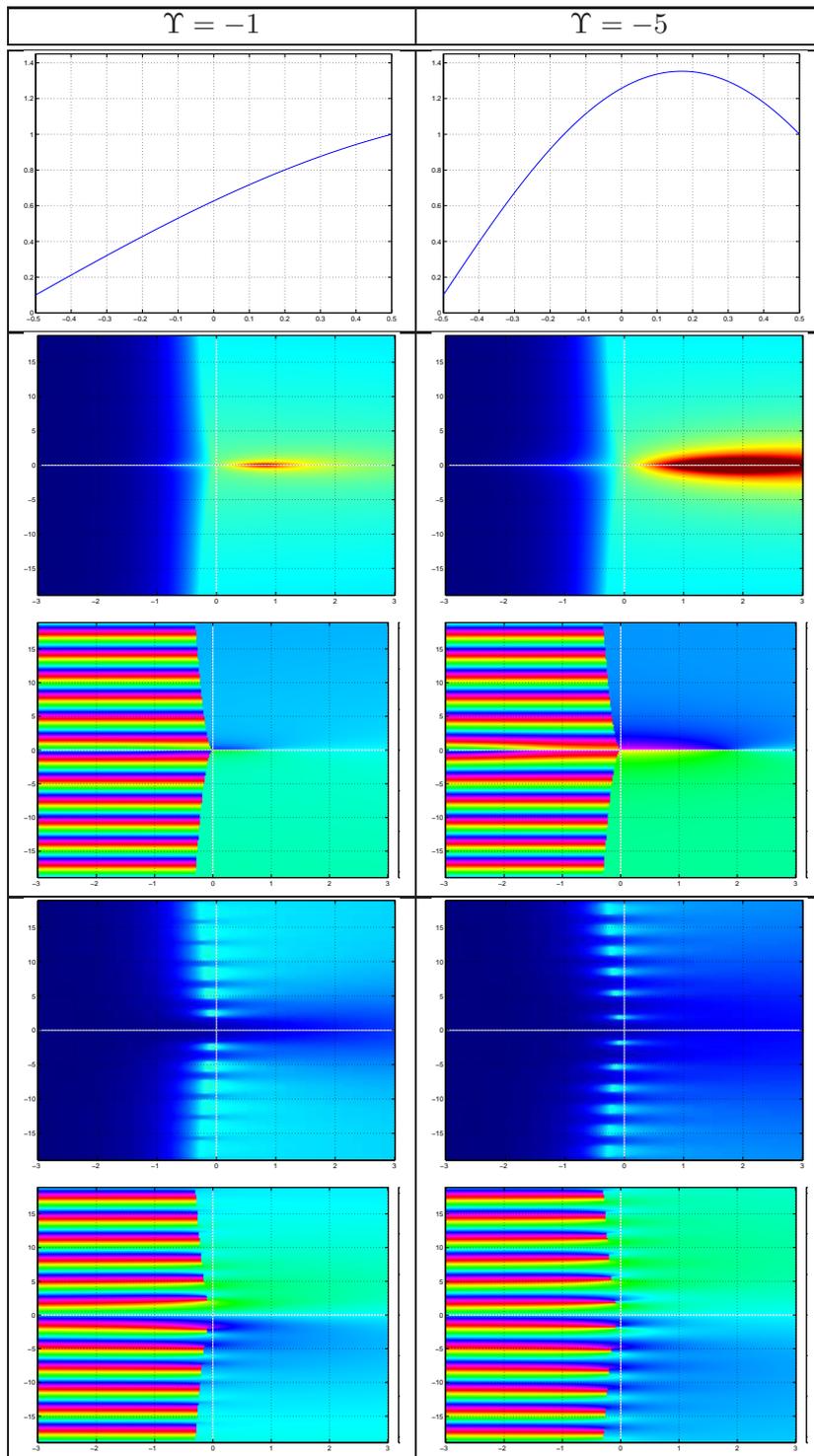












Ces nombreuses figures nous donnent de précieux renseignements sur l'intérêt des propagateurs que nous avons trouvé. Rappelons qu'en raison de la présence de racine complexe, nous nous bornons pour l'instant à considérer les fonctions sur le demi-plan droit de Laplace. Une étude plus approfondie permettrait de tirer de nombreuses informations de la partie des courbes sur \mathbb{C}_0^- .

En premier lieu, il est bon de souligner que, dans le cas des tubes droits (avec ou sans pertes), nous retrouvons l'opérateur de dissipation unitaire défini en section 1.

Ensuite, ces figures nous prouvent qu'il n'est pas absurde de définir comme opérateur de dispersion $D_n(s) = e^s \lambda(s)$. En effet, l'absence de déroulement de phase sur la partie droite des tracés de phase de $D_n(s)$ prouvent que ces opérateurs ne contiennent pas de retard. On en conclue donc que $\lambda(s)$ contient un retard e^{-s} , il s'agit bien d'un opérateur de propagation, au sens où il est constitué d'un retard et d'un opérateur de dispersion (sans retard).

Plus important, nous pouvons remarquer que les nouveaux opérateurs de dispersion (ou de propagation) ont, dans tous les cas, l'heureuse propriété d'avoir un module inférieur à 1. Ainsi, les propagateurs en eux-mêmes sont stables, contrairement aux propagateurs initiaux qui présentent un pôle très important dans \mathbb{C}_0^+ . On remarque aussi que les coupures sur la partie positive de l'axe réel dans les diagrammes de phase de $e^{s-\Gamma(s)}$ dues aux changements de signe successif du rayon quand $\Upsilon < 0$ ont bien été éliminées avec les nouveaux opérateurs. Ce résultat en soit est déjà un très grand progrès dans la décomposition en ondes découplées, il nous assure la stabilité lors du transport. De plus, nous pouvons observer sur la figure 9 que le gain de la boucle interne est égal à λ^2 . La boucle interne est donc elle aussi stable.

Enfin, on remarque une structure de modes non transportés (module plus petit que 1), notamment pour les valeurs de $|\Upsilon|$ grandes. Ces modes, dus probablement à la finitude du tronçon nous assurent que l'information géométrique (finitude du tronçon et positivité du rayon) a bien été transmise dans la matrice de transfert acoustique.

Les figures 15 présentent l'évolution des diagrammes de Bode (module à gauche, phase à droite, même code couleur que précédemment) de $\lambda(s)$ en fonction de la valeur de Υ . Sur une image, chaque ligne correspond à un diagramme de Bode (avec la pulsation ω en abscisse) et la position en ordonnée indique la valeur du paramètre Υ .

Étudions d'abord le premier cas : $\theta^2 = 0$, géométrie parfaitement symétrique. Le cas $\Upsilon = \theta^2 = 0$ correspond au tube droit donc le propagateur est un retard pur, le module vaut 1. Au dessous, (courbure négative), le module est plus petit que 1 et finit par être complètement nul quand on atteint le cas limite $\Upsilon = -\pi^2$. Cela s'interprète de la façon suivante. Quand $\Upsilon = 0$, nous sommes dans le cas d'un tube droit, tout se propage. Quand $\Upsilon = -\pi^2$, le tube concave devient fermé et rien ne se propage, tout est mode, les propagateurs sont nuls. Tout est mode parce que, précisément, $\Upsilon = -\pi^2$ est le seul cas (limite) où on a des vraies conditions frontière : il correspond à un tronçon fermé. On retrouve cette dernière propriété sur l'autre figure qui correspond à un tube dissymétrique. Pour un tube dissymétrique, les basses fréquences ne se propagent pas, même dans le cas des tubes exponentiels (cas $\Upsilon = \theta^2$). Pour un tube dissymétrique qui n'est pas exponentiel, des modes sont retenus, pour $\Upsilon > 0$ et $\Upsilon < 0$. Nous n'avons pas encore aujourd'hui totalement interprété ces modes. La seule chose dont nous sommes sûrs, c'est que ces modes ne sont pas des modes dus à des conditions frontières donc il ne s'agit pas de décomposition modale et ils sont dus à la non exponentialité du profil.

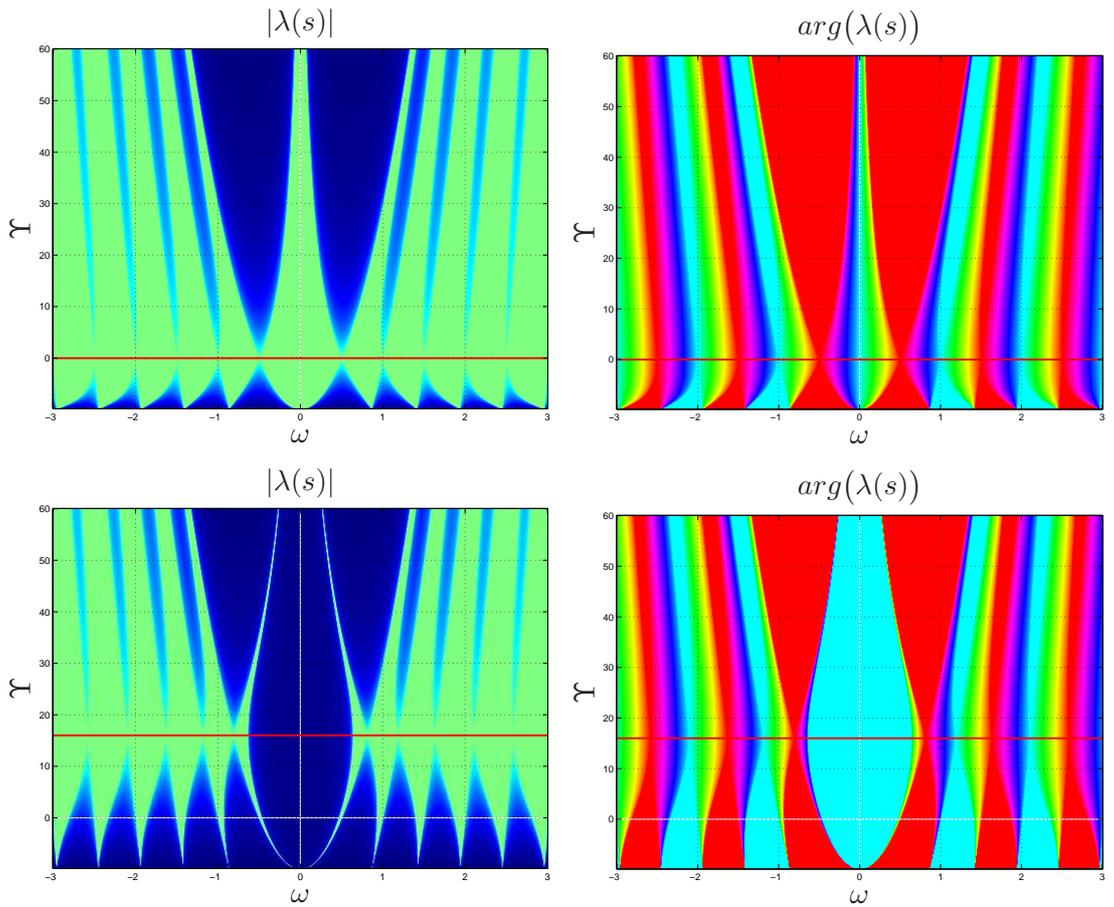


FIGURE 15 – Ces figures présentent l'évolution du diagramme de Bode (module à gauche, phase à droite, même code couleur que précédemment) de $\lambda(s)$ en fonction du paramètre Υ . Dans tous les cas, $\varepsilon = 0$. Dans la première ligne, la ligne rouge représente la valeur $\Upsilon = \theta^2 = 0$, dans la deuxième ligne, la ligne rouge représente la valeur $\Upsilon = \theta^2 = 16$.

Conclusion et perspectives

Nous avons réussi pendant ce stage à mettre à jour un nouveau type d'ondes découplées. Ces ondes intègrent une condition géométrique de réalisabilité du tube : la positivité stricte du rayon. Ainsi, nous pensons pouvoir supprimer le problème existant précédemment lié à des changements de signe virtuels du tube dans les fonctions de réflexions internes. Un premier résultat nous confirme que les propagateurs trouvés sont intéressants car, contrairement aux propagateurs précédents, ils sont stables quelques soient les valeurs des paramètres θ et Υ .

Il reste cependant de nombreux points à approfondir.

Premièrement, l'interprétation des nouveaux propagateurs n'est pas encore très claire et une recherche approfondie dans ce sens sera nécessaire pour continuer le processus de compréhension des phénomènes physiques mis en jeu.

Au delà de la compréhension physique, l'étude est loin d'être finie. Nous avons mis en oeuvre une famille de matrices de transfert paramétrées par deux degrés de liberté et il sera nécessaire d'étudier ces paramètres afin de retrouver, d'une part, une expression de matrice de transfert symétrique par changement d'orientation du tube, et d'autre part, d'étudier la stabilité et la passivité des fonctions de réflexions internes [23, 24]. Car la stabilité des propagateurs n'implique pas forcément la stabilité des fonctions de réflexions internes.

Une fois la stabilité et la passivité des fonctions de réflexions internes assurées, il restera plusieurs étapes avant d'arriver à une véritable structure guides d'ondes stables et simulable à faible coût.

La première consiste en l'approximation des différentes fonctions de transfert qui contiennent des coupures (continuum de pôles) en fonctions contenant un ensemble fini de pôles (représentations intégrales) comme cela a déjà été fait dans [1, 6]. La deuxième consiste en la discrétisation du système complet nécessaire pour la simulation temps-réel.

Plusieurs de ces étapes faisaient partie de mes objectifs initiaux pour ce stage et je n'ai malheureusement pas encore eu la possibilité de mener ces études à terme. J'ai passé du temps sur une première étude de la paramétrisation des fonctions de réflexions internes définies initialement qui n'a malheureusement pas abouti et je me suis finalement dirigé vers la solution de la diagonalisation de la matrice \mathbf{Q} . Les premiers résultats trouvés sur les propagateurs sont plutôt encourageants et j'ai bon espoir que ces travaux servent de point de départ à une recherche approfondie qui permettra enfin de trouver une solution de simulation stable à faible coût des tubes acoustiques basée sur le modèle de Webster-Lokshin à abscisse curviligne quelque soit la géométrie du tube à simuler.

Références

- [1] Thomas Hélie. *Modélisation physique d'instruments de musique en systèmes dynamiques et inversion*. Thèse de doctorat, Université de Paris XI - Orsay, Paris, 2002.
- [2] J. O. Smith. Physical modeling synthesis update. *Computer Music Journal*, 20(2) :44–56, 1996. MIT Press.
- [3] J.L. Kelly and Lochbaum C.C. Speech synthesis. In *Proc. 4th Int. Cong. Acoust.*, pages 1–4, 1962.
- [4] G. P. Scavone. *An Acoustic Analysis of Single-Reed Woodwind Instruments with an Emphasis on Design and Performance Issues and Digital Waveguide Modeling Techniques*. PhD thesis, Music Dept., Stanford University, 1997.
- [5] Th. Hélie, R. Mignot, and D. Matignon. Waveguide modeling of lossy flared acoustic pipes : Derivation of a Kelly-Lochbaum structure for real-time simulations. In *IEEE WASPAA*, pages 267–270, Mohonk, USA, 2007.
- [6] Rémi Mignot. *Réalisation en guides d'ondes numériques stables d'un modèle acoustique réaliste pour la simulation en temps-réel d'instruments à vent*. Thèse de doctorat, Edite de Paris - Telecom ParisTech, Paris, 2009.
- [7] Thomas Hélie, Thomas Hézard, and Rémi Mignot. Représentation géométrique optimale de la perce de cuivres pour la calcul d'impédance d'entrée et de transmittance, et pour l'aide à la lutherie. In *Actes du 10ème Congrès Français d'Acoustique*, 2010.
- [8] D. P. Berners. *Acoustics and signal processing techniques for physical modeling of brass instruments*. PhD thesis, Standford University, 1999.
- [9] E. Ducasse. *Modélisation et simulation dans le domaine temporel d'instruments à vent à anche simple en situation de jeu : méthodes et modès*. PhD thesis, Université du Maine, 2001.
- [10] E. Ducasse. An alternative to the traveling-wave approach for use in two-port descriptions of acoustic bores. *J. Acoust. Soc. Am.*, 112 :3031–3041, 2002.
- [11] J. Gilbert, J. Kergomard, and J. D. Polack. On the reflection functions associated with discontinuities in conical bores. *J. Acoust. Soc. Am.*, 04, 1990.
- [12] Rémi Mignot, Thomas Hélie, and Denis Matignon. Stable realization of a delay system modeling a convergent acoustic cone. In *Mediterranean Conference on Control and Automation*, pages 1574–1579, Ajaccio, France, 2008.
- [13] J. L. Lagrange. Nouvelles recherches sur la nature et la propagation du son. Misc. Taurinensia (Mélanges Phil. Math., Soc. Roy. Turin), 1760-1761.
- [14] D. Bernoulli. Sur le son et sur les tons des tuyaux d'orgues différemment construits. Mém. Acad. Sci. (Paris), 1764.
- [15] A. G. Webster. Acoustical impedance, and the theory of horns and of the phonograph. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.*, 5 :275–282, 1919. Errata, *ibid.* **6**, p.320 (1920).
- [16] E. Eisner. Complete solutions of the Webster horn equation. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 41(4) :1126–1146, 1967.
- [17] G. Kirchhoff. Ueber die einfluss der wärmeleitung in einem gase auf die schallbewegung. *Annalen der Physik Leipzig*, 134, 1868. (English version : R. B. Lindsay, ed., PhysicalAcoustics, Dowden, Hutchinson and Ross, Stroudsburg, 1974).
- [18] A. Chaigne and J. Kergomard. *Acoustique des instruments de musique*. Belin, 2008.
- [19] T. Hélie. Unidimensional models of acoustic propagation in axisymmetric waveguides. *J. Acoust. Soc. Am.*, 114 :2633–2647, 2003.

- [20] H. Haddar, Th. Hélié, and D. Matignon. A webster-lokshin model for waves with viscothermal losses and impedance boundary conditions : strong solutions. pages 66–71, 2003.
- [21] D. Matignon. Asymptotic stability of the Webster-Lokshin model. In *Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS)*, pages 11 p. CD–Rom, Kyoto, Japan, jul 2006. (invited session).
- [22] Thomas Hézard. *Construction de famille d'instruments à vent virtuels*. Projet de fin d'études d'ingénieur, Ecole Nationale Supérieure de l'Electronique et de ses Applications, Cergy-Pontoise, 2009.
- [23] S. Bilbao. *Waves and Scattering Methods for Numerical Simulation*. John Wiley and Sons, 2004.
- [24] Alfred Fettweis. Wave digital filters : Theory and practice. In *Proc. of the IEEE*, volume 74, pages 270 – 327, 1986.

Annexe

Sont présentés ici les nombreux calculs effectués pendant ce travail de stage à partir des travaux présentés dans la thèse de Rémi Mignot. Ces différentes expressions ont été obtenues dans le cadre de plusieurs pistes explorées pour la résolution du problème posé. Un grand nombre de ces pistes ont été infructueuses et n'ont pas été présentées dans le présent document. Néanmoins, nous tenons à intégrer ces expressions dans ce document car elles pourront être utilisées dans la continuité de ces travaux.

1 Algèbre générale

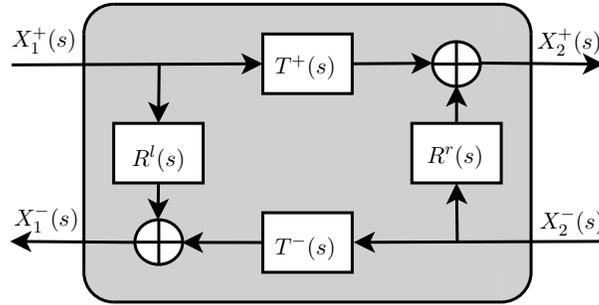


FIGURE 1 – Quadripôle

$$\begin{bmatrix} X_1^- \\ X_2^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1^+ \\ X_2^- \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} X_2^+ \\ X_2^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1^+ \\ X_1^- \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} A_{11} &= R^l & , & \quad A_{12} = T^- & , & \quad A_{21} = T^+ & , & \quad A_{22} = R^r \\ B_{11} &= \frac{T^+T^- - R^lR^r}{T^-} & , & \quad B_{12} = \frac{R^r}{T^-} & , & \quad B_{21} = -\frac{R^l}{T^-} & , & \quad B_{22} = \frac{1}{T^-} \\ A_{11} &= -\frac{B_{21}}{B_{22}} & , & \quad A_{12} = \frac{1}{B_{22}} & , & \quad A_{21} = \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21}}{B_{22}} & , & \quad A_{22} = \frac{B_{12}}{B_{22}} \\ B_{11} &= \frac{A_{12}A_{21} - A_{11}A_{22}}{A_{12}} & , & \quad B_{12} = \frac{A_{22}}{A_{12}} & , & \quad B_{21} = -\frac{A_{11}}{A_{12}} & , & \quad B_{22} = \frac{1}{A_{12}} \end{aligned}$$

2 Adimensionnement

$$\ell \in [a, b] \mapsto x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

$$L = b - a$$

On donnera une version simplifiée des formules de passage avec $a = -\frac{L}{2}$ et $b = \frac{L}{2}$.
Les paramètres dimensionnés sont notés avec un $\tilde{}$.

2.1 Paramètres géométriques dépendant de la translation

2.1.1 Cas général

$x = \mathcal{X}(\ell) = \frac{\ell - \frac{a+b}{2}}{L}$
$\ell = \mathcal{L}(x) = Lx + \frac{a+b}{2}$

$A = \mathbf{V}^T \begin{pmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{a+b}{2L} \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{U}}$	$B = \mathbf{V}^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \tilde{\Upsilon} \frac{a+b}{2} & 0 \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{U}}$
$\tilde{A} = \mathbf{V}^T \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & -\frac{a+b}{2} \end{pmatrix} \mathbf{U}$	$\tilde{B} = \mathbf{V}^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\tilde{\Upsilon}}{L} \frac{a+b}{2} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{U}$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \phi_1 \left(\tilde{\Upsilon} \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 \right) \\ \phi_2 \left(\tilde{\Upsilon} \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 \left(\frac{\tilde{\Upsilon}}{L^2} \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 \right) \\ \phi_2 \left(\frac{\tilde{\Upsilon}}{L^2} \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 \right) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{B} \end{bmatrix}$$

2.1.2 Cas particulier $a = -\frac{L}{2}$ et $b = \frac{L}{2}$

$x = \mathcal{X}(\ell) = \frac{\ell}{L}$
$\ell = \mathcal{L}(x) = Lx$

$A = \frac{1}{L} \tilde{A}$	$B = \tilde{B}$
$\tilde{A} = LA$	$\tilde{B} = B$

2.2 Variables et fonctions de base

2.2.1 Variables indépendantes et coefficients

$t = \frac{c_0}{L} \tilde{t}$	$s = \frac{L}{c_0} \tilde{s}$	$\Upsilon = L^2 \tilde{\Upsilon}$	$\varepsilon = \sqrt{L} \tilde{\varepsilon}$
$\tilde{t} = \frac{L}{c_0} t$	$\tilde{s} = \frac{c_0}{L} s$	$\tilde{\Upsilon} = \frac{1}{L^2} \Upsilon$	$\tilde{\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{L}} \varepsilon$

2.2.2 Rayons, pentes et surfaces

$R(x) = \frac{1}{L} \tilde{R}(\mathcal{L}(x))$	$\frac{dR}{dx}(x) = \frac{1}{L} \frac{d\tilde{R}}{d\mathcal{L}}(\mathcal{L}(x)) = \frac{d\tilde{R}}{d\ell}(\ell)$
$\tilde{R}(\ell) = LR(\mathcal{X}(\ell))$	$\frac{d\tilde{R}}{d\ell}(\ell) = L \frac{dR}{d\mathcal{L}}(\mathcal{X}(\ell)) = \frac{dR}{dx}(x)$

$\sigma(x) = L\zeta(\mathcal{L}(x)) = \frac{R'(x)}{R(x)}$	$S(x) = \pi R(x)^2 = \frac{1}{L^2} \tilde{S}(\mathcal{L}(x))$
$\zeta(\ell) = \frac{1}{L} \sigma(\mathcal{X}(\ell)) = \frac{\tilde{R}'(\ell)}{\tilde{R}(\ell)}$	$\tilde{S}(\ell) = \pi \tilde{R}(\ell)^2 = L^2 S(\mathcal{X}(\ell))$

$$C_\Upsilon : z \mapsto \cosh(\sqrt{\Upsilon} z)$$

$$S_\Upsilon : z \mapsto \frac{\sinh(\sqrt{\Upsilon} z)}{\sqrt{\Upsilon}}$$

$$\tilde{R}(\ell) = LR(\mathcal{X}(\ell)) = \tilde{A} C_{\tilde{\Upsilon}}(\ell) + \tilde{B} S_{\tilde{\Upsilon}}(\ell)$$

$$\tilde{R}'(\ell) = \frac{d\tilde{R}}{d\ell}(\ell) = L \frac{dR}{d\mathcal{L}}(\mathcal{X}(\ell)) = \tilde{A} \tilde{\Upsilon} S_{\tilde{\Upsilon}}(\ell) + \tilde{B} C_{\tilde{\Upsilon}}(\ell)$$

$$R(x) = \frac{1}{L} \tilde{R}(\mathcal{L}(x)) = AC_\Upsilon(x) + BS_\Upsilon(x)$$

$$R'(x) = \frac{dR}{dx}(x) = \frac{1}{L} \frac{d\tilde{R}}{d\mathcal{L}}(\mathcal{L}(x)) = A\Upsilon S_\Upsilon(x) + BC_\Upsilon(x)$$

2.2.3 Autres fonctions

$\Gamma(s) = L\tilde{\Gamma}\left(\frac{c_0}{L}s\right) = \sqrt{s^2 + \Upsilon}$	$e_{ac}(x, t) = \frac{1}{\rho_0 c_0^2 L^2} \tilde{e}_{ac}\left(\mathcal{L}(x), \frac{L}{c_0}t\right)$
$\tilde{\Gamma}(\tilde{s}) = \frac{1}{L} \Gamma\left(\frac{L}{c_0}\tilde{s}\right) = \sqrt{\left(\frac{\tilde{s}}{c_0}\right)^2 + \tilde{\Upsilon}}$	$\tilde{e}_{ac}(\ell, \tilde{t}) = \rho_0 c_0^2 L^2 e_{ac}\left(\mathcal{X}(\ell), \frac{c_0}{L}\tilde{t}\right)$

2.3 Variables d'états

2.3.1 Variables de Kirchoff

$P(x, t) = \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \tilde{P} \left(\mathcal{L}(x), \frac{L}{c_0} t \right)$	$U(x, t) = \frac{1}{c_0 L^2 S(\mathcal{L}(x))} \tilde{U} \left(\mathcal{L}(x), \frac{L}{c_0} t \right)$
$\tilde{P}(\ell, t) = \rho_0 c_0^2 P \left(\mathcal{X}(\ell), \frac{c_0}{L} t \right)$	$\tilde{U}(\ell, t) = c_0 \tilde{S}(\mathcal{X}(\ell)) U \left(\mathcal{X}(\ell), \frac{c_0}{L} t \right)$

$$\begin{cases} \partial_x^2 P(x, t) + 2 \frac{R'(x)}{R(x)} \partial_x P(x, t) - \partial_t^2 P(x, t) = 0 \\ \partial_t U(x, t) + \partial_x P(x, t) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[s^2 + \Upsilon - \partial_x^2 \right] \left(R(x) P(x, s) \right) = 0 \\ s U(x, s) + \partial_x P(x, s) = 0 \end{cases}$$

$$e_{ac}(x, t) = \pi R(x)^2 \frac{P(x, t)^2 + U(x, t)^2}{2}$$

2.3.2 Variables de type ondes planes p^\pm

$p^\pm(x, t) = \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \tilde{p}^\pm \left(\mathcal{L}(x), \frac{L}{c_0} t \right)$
$\tilde{p}^\pm(\ell, t) = \rho_0 c_0^2 p^\pm \left(\mathcal{X}(\ell), \frac{c_0}{L} t \right)$

$$\begin{bmatrix} p^+(x, s) \\ p^-(x, s) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & S(x)/S_c \\ 1 & -S(x)/S_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(x, s) \\ U(x, s) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P(x, s) \\ U(x, s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ S_c/S(x) & -S_c/S(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p^+(x, s) \\ p^-(x, s) \end{bmatrix}$$

$$e_{ac}(x, t) = \frac{1}{2} R(x)^2 \left[\left(1 + \frac{R_c^2}{R(x)^2} \right) \left(p^+(x, t)^2 + p^-(x, t)^2 \right) + 2 \left(1 - \frac{R_c^2}{R(x)^2} \right) p^+(x, t) p^-(x, t) \right]$$

2.3.3 Variables de type ondes sphériques ϕ^\pm

$\phi^\pm(x, t) = \frac{1}{L \rho_0 c_0^2} \tilde{\phi}^\pm \left(\mathcal{L}(x), \frac{L}{c_0} t \right)$
$\tilde{\phi}^\pm(\ell, t) = L \rho_0 c_0^2 \phi^\pm \left(\mathcal{X}(\ell), \frac{c_0}{L} t \right)$

$$\begin{bmatrix} \phi^+(x, s) \\ \phi^-(x, s) \end{bmatrix} = \frac{R(x)}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(x, s) \\ U(x, s) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P(x, s) \\ U(x, s) \end{bmatrix} = \frac{1}{R(x)} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi^+(x, s) \\ \phi^-(x, s) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} (s + \partial_x) \phi^+(x, s) = \sigma(x) \phi^-(x, s) \\ (s - \partial_x) \phi^-(x, s) = -\sigma(x) \phi^+(x, s) \end{cases}$$

$$e_{ac}(x, t) = \pi \left(\phi^+(x, t)^2 + \phi^-(x, t)^2 \right)$$

2.3.4 Variables de type ondes sphériques ψ^\pm

$$\boxed{\begin{array}{l} \psi^\pm(x, t) = \frac{1}{L\rho_0 c_0^2} \tilde{\psi}^\pm \left(\mathcal{L}(x), \frac{L}{c_0} t \right) \\ \tilde{\psi}^\pm(\ell, t) = L\rho_0 c_0^2 \psi^\pm \left(\mathcal{X}(\ell), \frac{c_0}{L} t \right) \end{array}}$$

$$\begin{bmatrix} \psi^+(x, s) \\ \psi^-(x, s) \end{bmatrix} = \frac{R(x)}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(x, s) \\ U(x, s) \end{bmatrix} + \frac{R'(x)}{2s} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} P(x, s)$$

$$\begin{bmatrix} P(x, s) \\ U(x, s) \end{bmatrix} = \frac{1}{R(x)} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi^+(x, s) \\ \psi^-(x, s) \end{bmatrix} + \frac{R'(x)}{sR(x)^2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \psi(x, s)$$

$$\begin{cases} (s + \partial_x) \psi^+(x, s) = -\frac{\Upsilon}{2s} \psi(x, s) \\ (s - \partial_x) \psi^+(x, s) = -\frac{\Upsilon}{2s} \psi(x, s) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} e_{ac}(x, t) &= \frac{1}{2} \rho_0 c_0^2 \pi L^2 \left[\left(1 + \left(1 + \frac{\sigma(x)}{t} \right)^2 \right) \psi^+(x, t)^2 + \left(1 + \left(1 - \frac{\sigma(x)}{t} \right)^2 \right) \psi^-(x, t)^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 \left(2 - \left(\frac{\sigma(x)}{t} \right)^2 \right) \psi^+(x, t) \psi^-(x, t) \right] \end{aligned}$$

3 Convention “tronçon”

3.1 Présentation de la convention “tronçon”

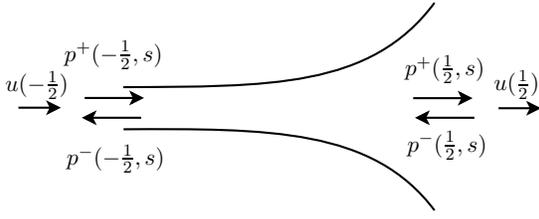


FIGURE 2 – Convention axiale

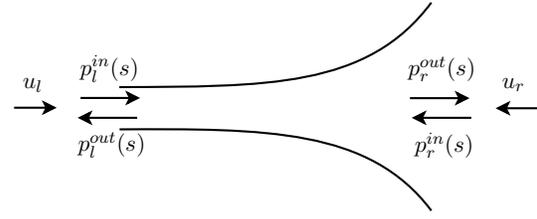


FIGURE 3 – Convention tronçon

$$\sigma(\ell) = \frac{R'(\ell)}{R(\ell)}$$

$$\sigma_l = \frac{R'(-\frac{1}{2})}{R(-\frac{1}{2})} \quad , \quad \sigma_r = -\frac{R'(\frac{1}{2})}{R(\frac{1}{2})}$$

$$\begin{bmatrix} p^+ \\ p^- \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & S/S_c \\ 1 & -S/S_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ U \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P \\ U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ S_c/S & -S_c/S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p^+ \\ p^- \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p_{l/r}^{in} \\ p_{l/r}^{out} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & S_{l/r}/S_c \\ 1 & -S_{l/r}/S_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{l/r} \\ U_{l/r} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P_{l/r} \\ U_{l/r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ S_c/S_{l/r} & -S_c/S_{l/r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{l/r}^{in} \\ p_{l/r}^{out} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \phi^+ \\ \phi^- \end{bmatrix} = \frac{R}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ U \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P \\ U \end{bmatrix} = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi^+ \\ \phi^- \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \phi_{l/r}^{in} \\ \phi_{l/r}^{out} \end{bmatrix} = \frac{R_{l/r}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{l/r} \\ U_{l/r} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P_{l/r} \\ U_{l/r} \end{bmatrix} = \frac{1}{R_{l/r}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{l/r}^{in} \\ \phi_{l/r}^{out} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \psi^+ \\ \psi^- \end{bmatrix} = \frac{R}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ U \end{bmatrix} + \frac{R'}{2s} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} P$$

$$\begin{bmatrix} P \\ U \end{bmatrix} = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi^+ \\ \psi^- \end{bmatrix} + \frac{R'}{sR^2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \psi$$

$$\begin{bmatrix} \psi_{l/r}^{in} \\ \psi_{l/r}^{out} \end{bmatrix} = \frac{R_{l/r}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{l/r} \\ U_{l/r} \end{bmatrix} + \frac{R'_{l/r}}{2s} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} P_{l/r}$$

$$\begin{bmatrix} P_{l/r} \\ U_{l/r} \end{bmatrix} = \frac{1}{R_{l/r}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{l/r}^{in} \\ \psi_{l/r}^{out} \end{bmatrix} + \frac{R'_{l/r}}{sR_{l/r}^2} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sigma_{l/r}}{R'_{l/r}/R_{l/r}} \end{bmatrix} \psi_{l/r}$$

3.2 Fonctions et paramètres de base

$$C_\Gamma(s) = \cosh(\Gamma(s))$$

$$S_\Gamma(s) = \frac{\sinh(\Gamma(s))}{\Gamma(s)}$$

$$T(s) = e^{-\Gamma(s)} = D(s)e^{-s} = T^+(s) = T^-(s)$$

$$D(s) = e^{s-\Gamma(s)}$$

$$R(s) = \frac{s - \Gamma(s)}{s + \Gamma(s)}$$

$$R_{le}(s) = T_{le}(s) - 1 = \frac{s - \Gamma(s) - \sigma_l}{s + \Gamma(s) + \sigma_l} = \frac{2s}{s + \Gamma(s) + \sigma_l} - 1$$

$$R_{re}(s) = T_{re}(s) - 1 = \frac{s - \Gamma(s) - \sigma_r}{s + \Gamma(s) + \sigma_r} = \frac{2s}{s + \Gamma(s) + \sigma_r} - 1$$

$$R_{li}(s) = T_{li}(s) - 1 = -\frac{s - \Gamma(s) + \sigma_l}{s + \Gamma(s) + \sigma_l} = \frac{2\Gamma(s)}{s + \Gamma(s) + \sigma_l} - 1$$

$$R_{ri}(s) = T_{ri}(s) - 1 = -\frac{s - \Gamma(s) + \sigma_r}{s + \Gamma(s) + \sigma_r} = \frac{2\Gamma(s)}{s + \Gamma(s) + \sigma_r} - 1$$

$$k_l = \frac{S_c - S_l}{S_c + S_l} = -\frac{Z_c - Z_l}{Z_c + Z_l}$$

$$k_r = \frac{S_c - S_r}{S_c + S_r} = -\frac{Z_c - Z_r}{Z_c + Z_r}$$

$$R_l^s(s) = -\frac{\sigma_l}{2s + \sigma_l}$$

$$R_r^s(s) = -\frac{\sigma_r}{2s + \sigma_r}$$

$$\sigma_l = \frac{R'(-\frac{1}{2})}{R(-\frac{1}{2})}$$

$$\sigma_r = -\frac{R'(\frac{1}{2})}{R(\frac{1}{2})}$$

3.3 Quadripôles de conversion

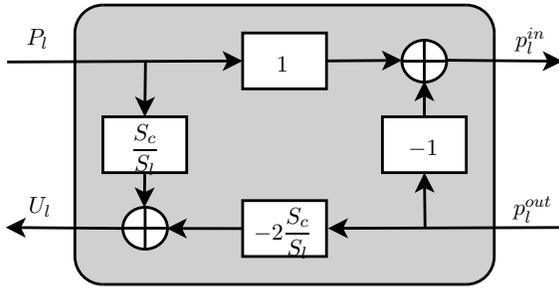


FIGURE 4 - Quadripôle de conversion $(P_l, U_l) \leftrightarrow (p_l^{in}, p_l^{out})$

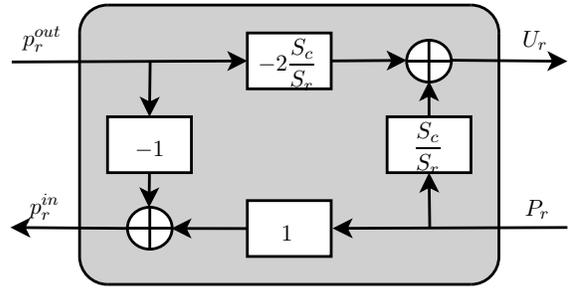


FIGURE 5 - Quadripôle de conversion $(p_l^{in}, p_l^{out}) \leftrightarrow (P_l, U_l)$

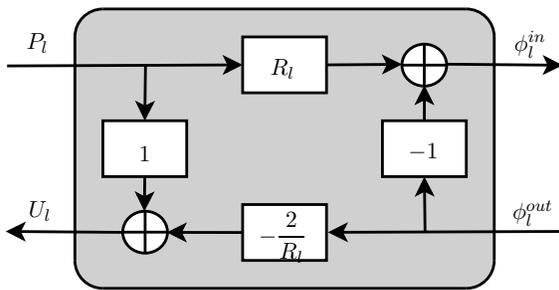


FIGURE 6 - Quadripôle de conversion $(P_l, U_l) \leftrightarrow (\phi_l^{in}, \phi_l^{out})$

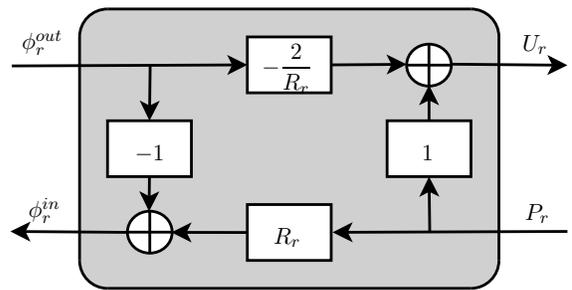


FIGURE 7 - Quadripôle de conversion $(\phi_l^{in}, \phi_l^{out}) \leftrightarrow (P_l, U_l)$

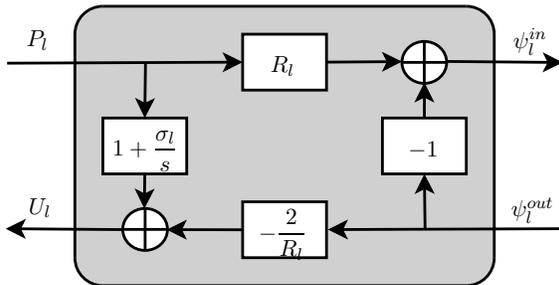


FIGURE 8 - Quadripôle de conversion $(P_l, U_l) \leftrightarrow (\psi_l^{in}, \psi_l^{out})$

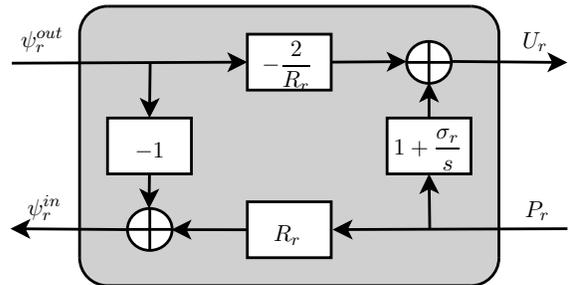


FIGURE 9 - Quadripôle de conversion $(\psi_l^{in}, \psi_l^{out}) \leftrightarrow (P_l, U_l)$

3.4 Fonctions de transfert

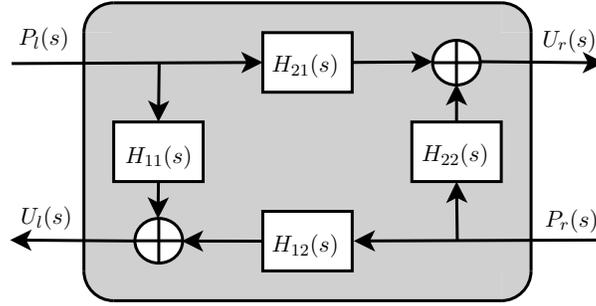


FIGURE 10 – Quadripôle en variables (P, U)

Fonctions de transfert en variables (P, U) Voir figure 10

$$\begin{aligned}
 H_{11}(s) &= \frac{1}{s} \frac{C_{\Gamma}(s) + \sigma_l S_{\Gamma}(s)}{S_{\Gamma}(s)} \\
 H_{22}(s) &= -\frac{1}{s} \frac{C_{\Gamma}(s) + \sigma_r S_{\Gamma}(s)}{S_{\Gamma}(s)} \\
 H_{12}(s) &= -\left(\frac{R_l}{R_r}\right)^3 \frac{1}{s} \frac{1}{S_{\Gamma}(s)} \\
 H_{21}(s) &= \left(\frac{R_r}{R_l}\right)^3 \frac{1}{s} \frac{1}{S_{\Gamma}(s)}
 \end{aligned}$$

Fonctions de transfert en variables (p^{in}, p^{out}) Voir figure 11

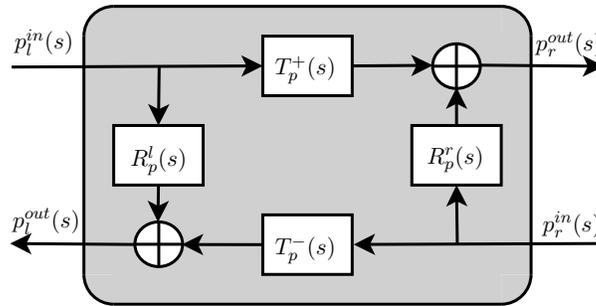


FIGURE 11 – Quadripôle en variables (p^{in}, p^{out})

$$\begin{aligned}
 T_p^+ &= \frac{R_l}{R_r} ((1 + k_l)(1 - k_r)T_{\phi}) / d_p \\
 T_p^- &= \frac{R_r}{R_l} ((1 - k_l)(1 + k_r)T_{\phi}) / d_p \\
 R_p^l &= (k_l + k_l k_r R_{\phi}^r + k_r R_{\phi}^l R_{\phi}^r + R_{\phi}^l - k_r T_{\phi}^2) / d_p \\
 R_p^r &= (k_r + k_r k_l R_{\phi}^l + k_l R_{\phi}^r R_{\phi}^l + R_{\phi}^r - k_l T_{\phi}^2) / d_p \\
 d_p &= 1 + (k_l R_{\phi}^l + k_r R_{\phi}^r + k_l k_r R_{\phi}^l R_{\phi}^r - k_l k_r T_{\phi}^2)
 \end{aligned}$$

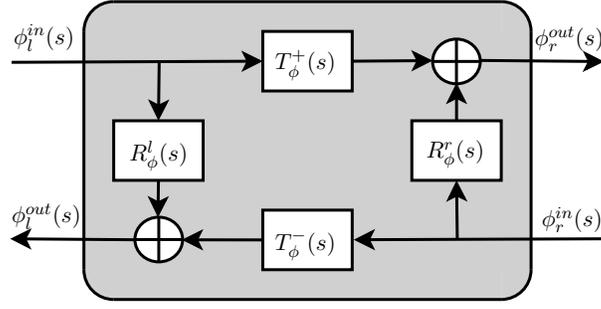


FIGURE 12 – Quadripôle en variable (ϕ^{in}, ϕ^{out})

Fonctions de transfert en variables (ϕ^{in}, ϕ^{out}) Voir figure 12

$$T_\phi(s) = \left[\left(1 + \frac{\sigma_l + \sigma_r}{2s} \right) C_\Gamma(s) + \frac{1}{2} \left(\frac{\Gamma(s)^2}{s} + s + \left(\frac{\sigma_l \sigma_r}{s} + \sigma_l + \sigma_r \right) \right) S_\Gamma(s) \right]^{-1}$$

$$R_\phi^l(s) = \left[- \left(\frac{\sigma_l + \sigma_r}{s} \right) C_\Gamma(s) - \left(\frac{\Gamma(s)^2}{s} - s + \left(\frac{\sigma_l \sigma_r}{s} + \sigma_l - \sigma_r \right) \right) S_\Gamma(s) \right] \frac{T_\phi(s)}{2}$$

$$R_\phi^r(s) = \left[- \left(\frac{\sigma_l + \sigma_r}{s} \right) C_\Gamma(s) - \left(\frac{\Gamma(s)^2}{s} - s + \left(\frac{\sigma_l \sigma_r}{s} - \sigma_l + \sigma_r \right) \right) S_\Gamma(s) \right] \frac{T_\phi(s)}{2}$$

$$T_\phi^+ = \frac{T_{le} T_{ri} T^+}{1 - R_{ri} R_{li} T^- T^+}$$

$$T_\phi^- = \frac{T_{re} T_{li} T^-}{1 - R_{ri} R_{li} T^- T^+}$$

$$R_\phi^l = R_{le} + \frac{R_{ri} T_{le} T_{li} T^+ T^-}{1 - R_{ri} R_{li} T^- T^+}$$

$$R_\phi^r = R_{re} + \frac{R_{li} T_{re} T_{ri} T^+ T^-}{1 - R_{ri} R_{li} T^- T^+}$$

$$R_\phi^l = \left((1 - R_r^s R_\psi) R_l^s + (1 + 2R_l^s) (R_\psi + R_r^s (T_\psi^2 - R_\psi^2)) \right) / d_\phi$$

$$R_\phi^r = \left((1 - R_l^s R_\psi) R_r^s + (1 + 2R_r^s) (R_\psi + R_l^s (T_\psi^2 - R_\psi^2)) \right) / d_\phi$$

$$T_\phi = \left((1 + R_l^s) (1 + R_r^s) T_\psi \right) / d_\phi$$

$$d_\phi = 1 - (R_l^s R_\psi + R_r^s R_\psi - R_l^s R_r^s R_\psi^2 + R_l^s R_r^s T_\psi^2)$$

Fonctions de transfert en variables (ψ^{in}, ψ^{out}) Voir figure 13

$$T_\psi^+(s) = T_\psi^-(s) = T_\psi(s) = \left[C_\Gamma(s) + \frac{1}{2} \left(\frac{\Gamma(s)^2}{s} + s \right) S_\Gamma(s) \right]^{-1}$$

$$R_\psi^l(s) = R_\psi^r(s) = R_\psi(s) = \frac{1}{2} \left(- \frac{\Gamma(s)^2}{s} + s \right) S_\Gamma(s) T_\psi(s)$$

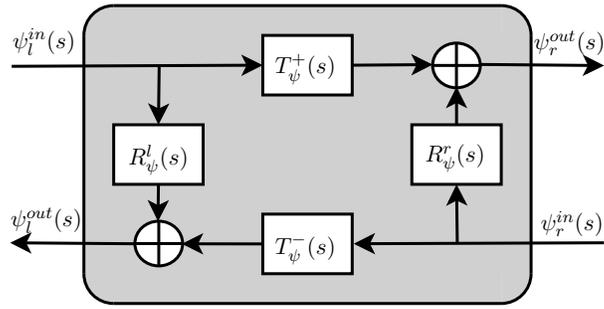


FIGURE 13 – Quadripôle en variables (ψ^{in}, ψ^{out})

$$T_{\psi} = \frac{(1 - R^2)T}{1 - R^2T^2} = D_{\psi}e^{-s} = \frac{(1 - R^2)D}{1 - R^2T^2}e^{-s}$$

$$R_{\psi} = \frac{(1 - T^2)R}{1 - R^2T^2}$$

4 Connexion de deux tubes

4.1 Connexion à régularité au moins \mathcal{C}^1

Voir figures 14 et 15.

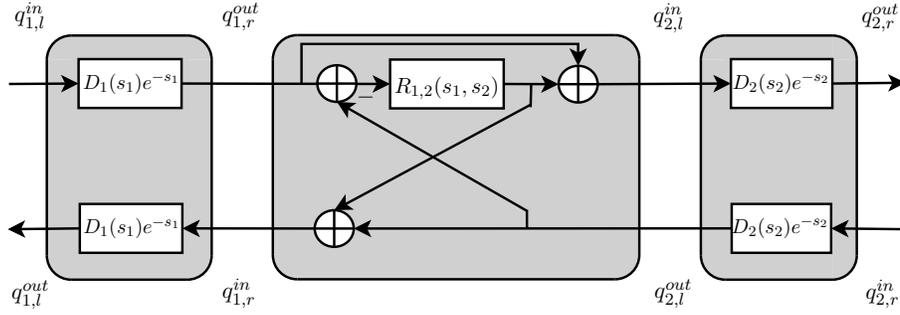


FIGURE 14 – Concaténation à régularité au moins \mathcal{C}^1

$$D_k(s_k) = e^{s_k} - \Gamma_k(s_k)$$

$$\Gamma_k(s_k) = \sqrt{s_k^2 + \Upsilon_k \left(+2\varepsilon_k s_k^{\frac{3}{2}} \right)}$$

$$R_{1,2}(s_1, s_2) = \frac{s_2\Gamma_1(s_1) - s_1\Gamma_2(s_2)}{s_2\Gamma_1(s_1) + s_1\Gamma_2(s_2)}$$

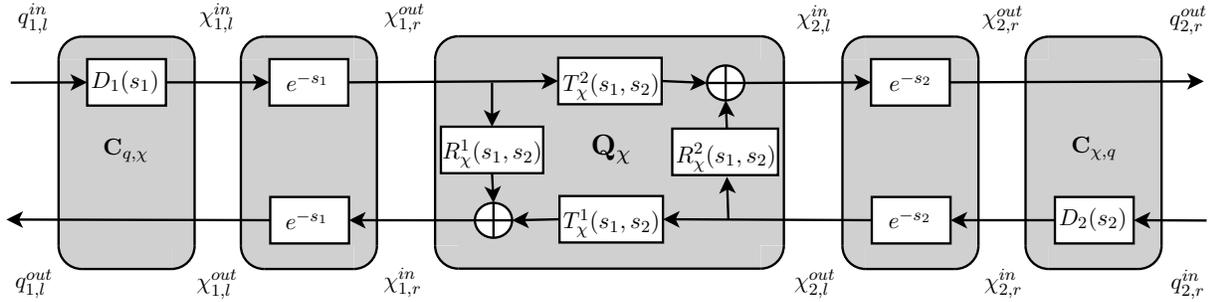


FIGURE 15 – Concaténation à régularité au moins \mathcal{C}^1

$$T_\chi^1(s_1, s_2) = D_1(s_1)(1 - R_{1,2}(s_1, s_2)) = \frac{L_2}{L_1} \frac{2s_1\Gamma_2(s_2)}{s_1\Gamma_2(s_2) + s_2\Gamma_1(s_1)} e^{s_1 - \Gamma_1(s_1)}$$

$$T_\chi^2(s_1, s_2) = D_2(s_2)(1 + R_{1,2}(s_1, s_2)) = \frac{L_1}{L_2} \frac{2s_2\Gamma_1(s_1)}{s_2\Gamma_1(s_1) + s_1\Gamma_2(s_2)} e^{s_2 - \Gamma_2(s_2)}$$

$$R_\chi^1(s_1, s_2) = D_1(s_1)R_{1,2}(s_1, s_2) = \frac{s_2\Gamma_1(s_1) - s_1\Gamma_2(s_2)}{s_2\Gamma_1(s_1) + s_1\Gamma_2(s_2)} e^{s_1 - \Gamma_1(s_1)}$$

$$R_\chi^2(s_1, s_2) = -D_2(s_2)R_{1,2}(s_1, s_2) = \frac{s_1\Gamma_2(s_2) - s_2\Gamma_1(s_1)}{s_2\Gamma_1(s_1) + s_1\Gamma_2(s_2)} e^{s_2 - \Gamma_2(s_2)}$$

4.2 Connexion à régularité au moins \mathcal{C}^0

Voir figures 16 et 17.

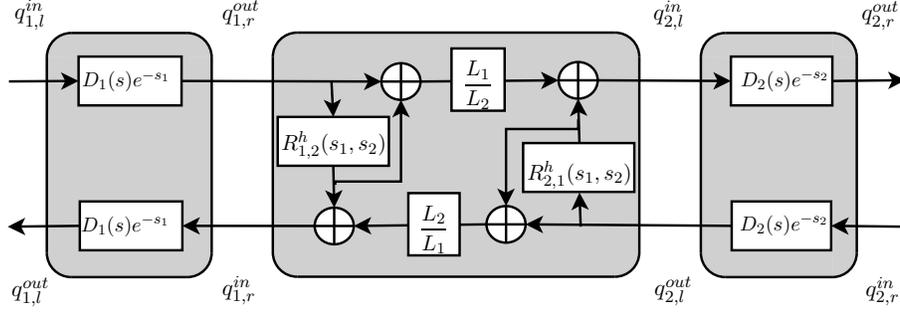


FIGURE 16 – Concaténation à régularité au moins \mathcal{C}^0

$$D_k(s_k) = e^{s_k} - \Gamma_k(s_k)$$

$$\Gamma_k(s_k) = \sqrt{s_k^2 + \Upsilon_k \left(+2\varepsilon_k s_k^{\frac{3}{2}} \right)}$$

$$R_k^h(s_1, s_2) = \frac{\beta_k (s_2 \Gamma_1(s_1) - s_1 \Gamma_2(s_2)) - (s_2 \sigma_{1,r} + s_1 \sigma_{2,l})}{(s_2 \Gamma_1(s_1) + s_1 \Gamma_2(s_2)) + (s_2 \sigma_{1,r} + s_1 \sigma_{2,l})}$$

avec $\beta_{1,2} = 1$ et $\beta_{2,1} = -1$.

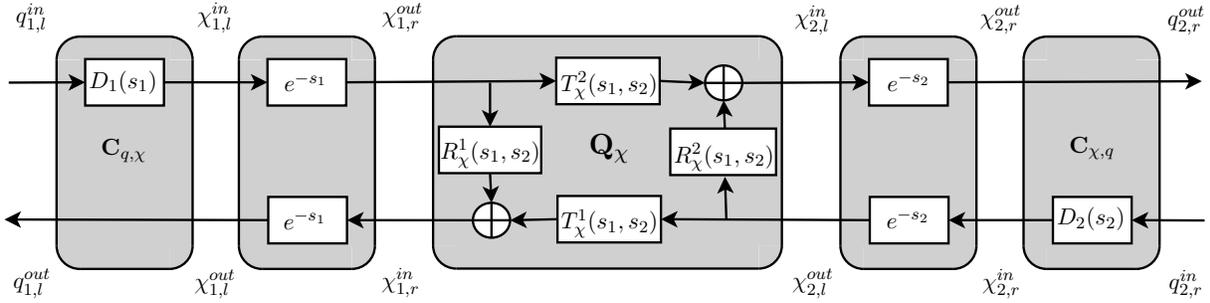


FIGURE 17 – Concaténation à régularité au moins \mathcal{C}^0

$$T_\chi^1(s_1, s_2) = D_1(s_1)(1 - R_{2,1}^j(s_1, s_2)) = \frac{L_2}{L_1} \frac{2s_1 \Gamma_2(s_2)}{(s_2 \Gamma_1(s_1) + s_1 \Gamma_2(s_2)) + (s_2 \sigma_{1,r} + s_1 \sigma_{2,l})} e^{s_1 - \Gamma_1(s_1)}$$

$$T_\chi^2(s_1, s_2) = D_2(s_2)(1 + R_{1,2}^j(s_1, s_2)) = \frac{L_1}{L_2} \frac{2s_2 \Gamma_1(s_1)}{(s_2 \Gamma_1(s_1) + s_1 \Gamma_2(s_2)) + (s_2 \sigma_{1,r} + s_1 \sigma_{2,l})} e^{s_2 - \Gamma_2(s_2)}$$

$$R_\chi^1(s_1, s_2) = D_1(s_1) R_{1,2}^h(s_1, s_2) = \frac{(s_2 \Gamma_1(s_1) - s_1 \Gamma_2(s_2)) - (s_2 \sigma_{1,r} + s_1 \sigma_{2,l})}{(s_2 \Gamma_1(s_1) + s_1 \Gamma_2(s_2)) + (s_2 \sigma_{1,r} + s_1 \sigma_{2,l})} e^{s_1 - \Gamma_1(s_1)}$$

$$R_\chi^2(s_1, s_2) = D_2(s_2) R_{2,1}^h(s_1, s_2) = \frac{(s_1 \Gamma_2(s_2) - s_2 \Gamma_1(s_1)) - (s_2 \sigma_{1,r} + s_1 \sigma_{2,l})}{(s_2 \Gamma_1(s_1) + s_1 \Gamma_2(s_2)) + (s_2 \sigma_{1,r} + s_1 \sigma_{2,l})} e^{s_2 - \Gamma_2(s_2)}$$

4.3 Connexion à régularité quelconque

Voir figures 18 et 19.

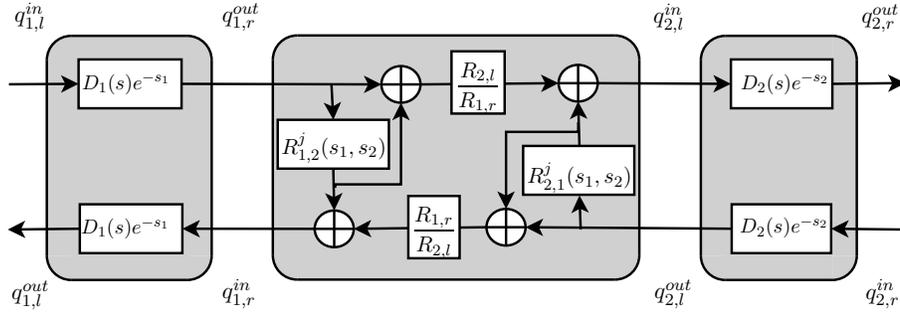


FIGURE 18 – Concaténation à régularité quelconque

$$D_k(s_k) = e^{s_k} - \Gamma_k(s_k)$$

$$\Gamma_k(s_k) = \sqrt{s_k^2 + \Upsilon_k \left(+2\varepsilon_k s_k^{\frac{3}{2}} \right)}$$

$$R_k^j(s_1, s_2) = \frac{\beta_k (s_2 S_{1,r} \Gamma_1(s_1) - s_1 S_{2,l} \Gamma_2(s_2)) - (s_2 S_{1,r} \sigma_{1,r} + s_1 S_{2,l} \sigma_{2,l})}{(s_2 S_{1,r} \Gamma_1(s_1) + s_1 S_{2,l} \Gamma_2(s_2)) + (s_2 S_{1,r} \sigma_{1,r} + s_1 S_{2,l} \sigma_{2,l})}$$

avec $\beta_{1,2} = 1$ et $\beta_{2,1} = -1$.

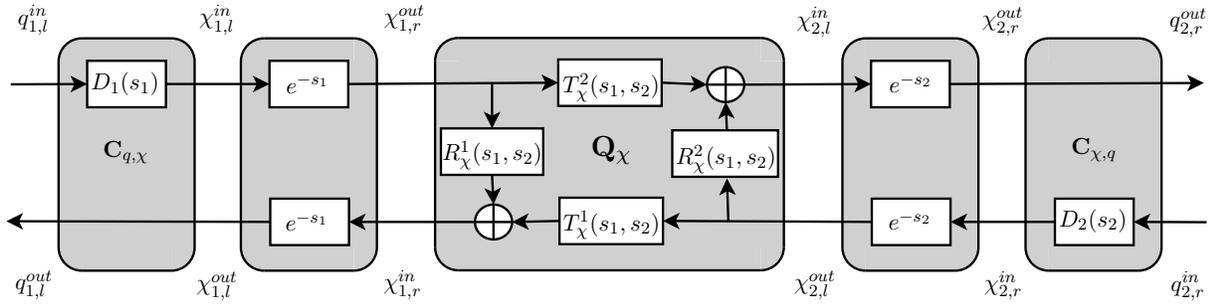


FIGURE 19 – Concaténation à régularité quelconque

$$\begin{aligned} T_{\chi}^1(s_1, s_2) &= D_1(s_1)(1 - R_{2,1}^j(s_1, s_2)) \\ &= \frac{R_{1,r}}{R_{2,l}} \frac{2s_1 \Gamma_2(s_2) S_{2,l}}{(s_2 S_{1,r} \Gamma_1(s_1) + s_1 S_{2,l} \Gamma_2(s_2)) + (s_2 S_{1,r} \sigma_{1,r} + s_1 S_{2,l} \sigma_{2,l})} e^{s_1 - \Gamma_1(s_1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{\chi}^2(s_1, s_2) &= D_2(s_2)(1 + R_{1,2}^j(s_1, s_2)) \\ &= \frac{R_{2,l}}{R_{1,r}} \frac{2s_2 \Gamma_1(s_1) S_{1,r}}{(s_2 S_{1,r} \Gamma_1(s_1) + s_1 S_{2,l} \Gamma_2(s_2)) + (s_2 S_{1,r} \sigma_{1,r} + s_1 S_{2,l} \sigma_{2,l})} e^{s_2 - \Gamma_2(s_2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{\chi}^1(s_1, s_2) &= D_1(s_1) R_{1,2}^j(s_1, s_2) \\ &= \frac{(s_2 S_{1,r} \Gamma_1(s_1) - s_1 S_{2,l} \Gamma_2(s_2)) - (s_2 S_{1,r} \sigma_{1,r} + s_1 S_{2,l} \sigma_{2,l})}{(s_2 S_{1,r} \Gamma_1(s_1) + s_1 S_{2,l} \Gamma_2(s_2)) + (s_2 S_{1,r} \sigma_{1,r} + s_1 S_{2,l} \sigma_{2,l})} e^{s_1 - \Gamma_1(s_1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{\chi}^2(s_1, s_2) &= D_2(s_2) R_{2,1}^j(s_1, s_2) \\ &= \frac{(s_1 S_{2,r} \Gamma_2(s_2) - s_2 S_{1,l} \Gamma_1(s_1)) - (s_2 S_{1,r} \sigma_{1,r} + s_1 S_{2,l} \sigma_{2,l})}{(s_2 S_{1,r} \Gamma_1(s_1) + s_1 S_{2,l} \Gamma_2(s_2)) + (s_2 S_{1,r} \sigma_{1,r} + s_1 S_{2,l} \sigma_{2,l})} e^{s_2 - \Gamma_2(s_2)} \end{aligned}$$

5 Connection avec une impédance passive

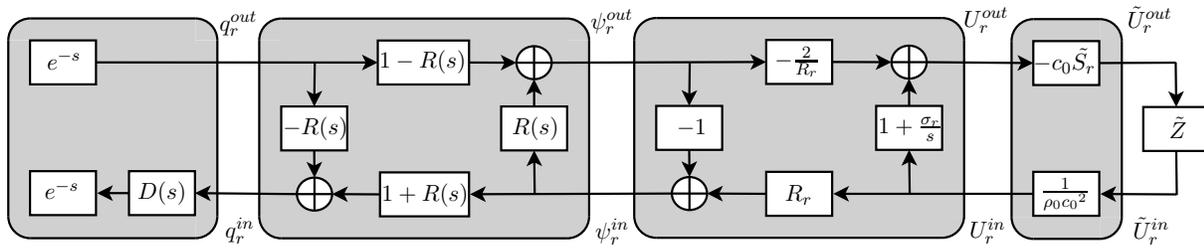


FIGURE 20 – Concaténation avec une impédance passive

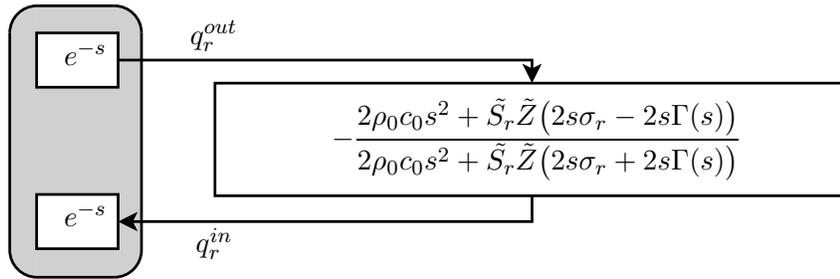


FIGURE 21 – Concaténation avec une impédance passive

6.3 Formes standards équivalentes et connexions

Les trois formes standards fig. 23, fig. 24 et fig. 25 sont équivalentes.

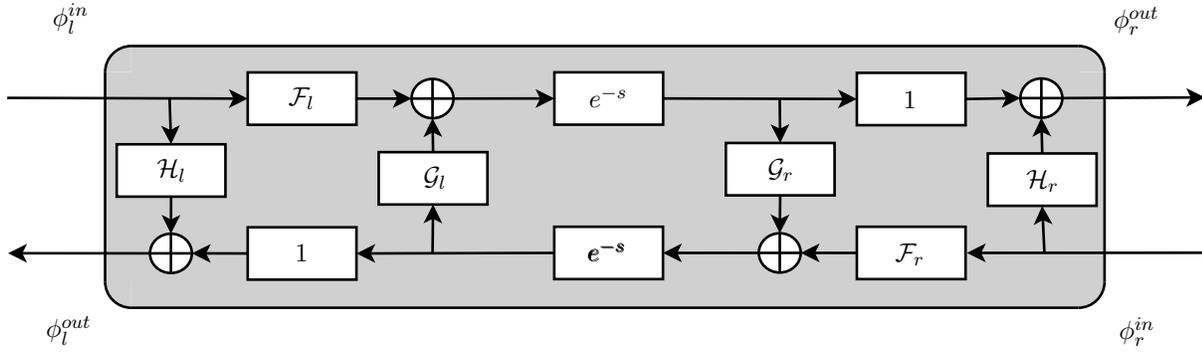


FIGURE 23 – Forme standard 1

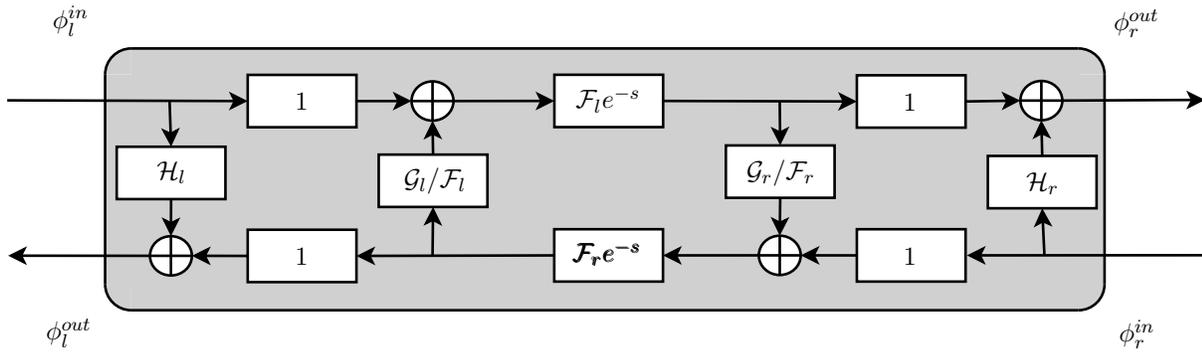


FIGURE 24 – Forme standard 2

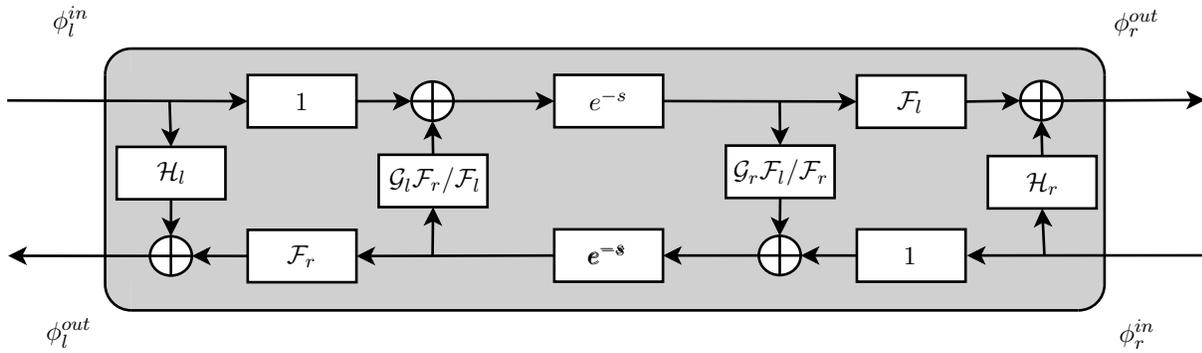


FIGURE 25 – Forme standard 3

6.3.1 Connexion (au moins \mathcal{C}^0) de 2 formes standards 1

Les systèmes des figures 26 et 27 sont équivalents.

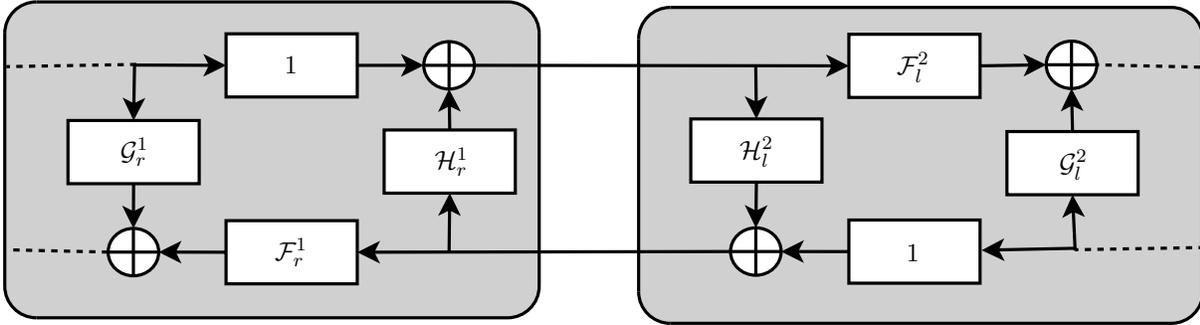


FIGURE 26 – Connexion standard 1

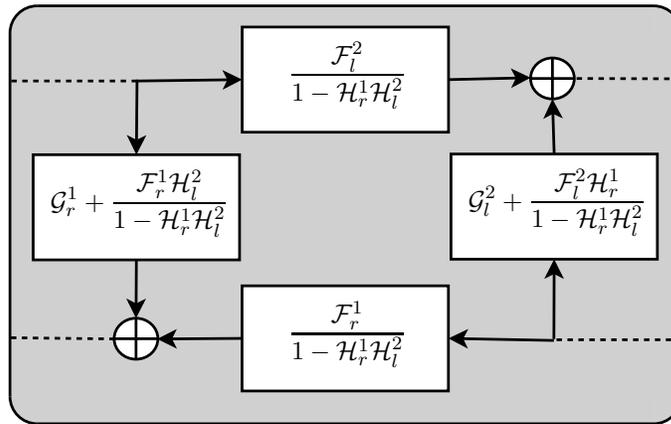


FIGURE 27 – Connexion standard 1

6.3.2 Connexion (au moins \mathcal{C}^0) de 2 formes standards 2

Les systèmes des figures 28 et 29 sont équivalents.

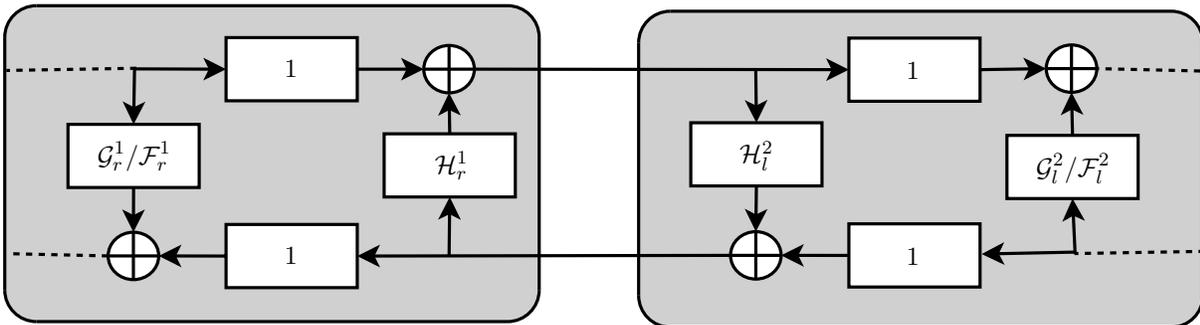


FIGURE 28 – Connexion standard 2

6.3.3 Connexion (au moins \mathcal{C}^0) de 2 formes standards 3

Les systèmes des figures 30 et 31 sont équivalents.

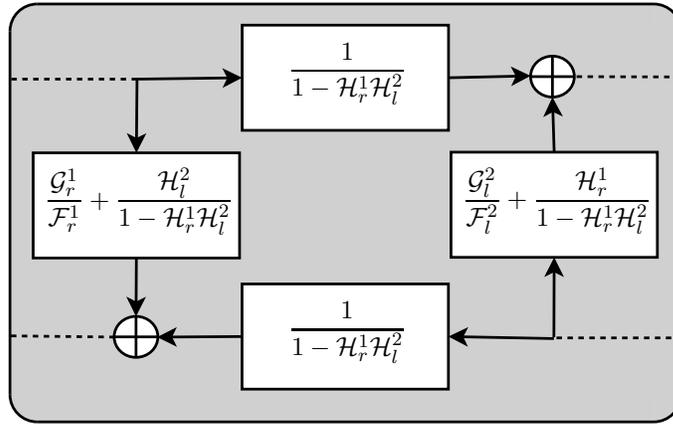


FIGURE 29 – Connexion standard 2

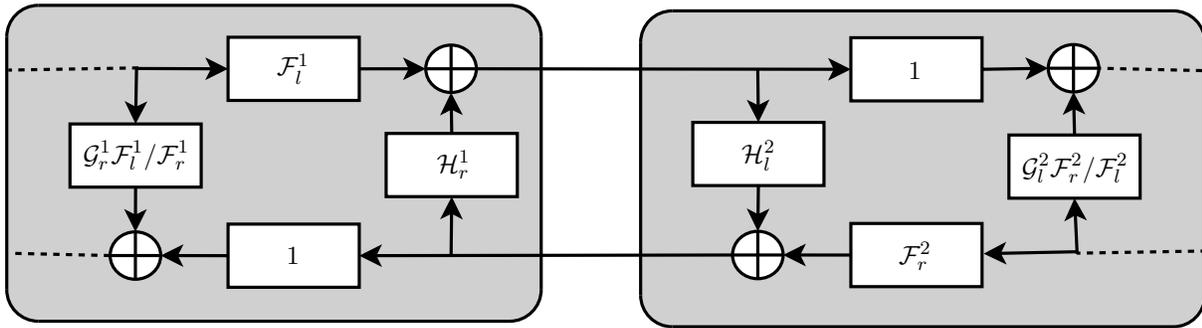


FIGURE 30 – Connexion standard 3

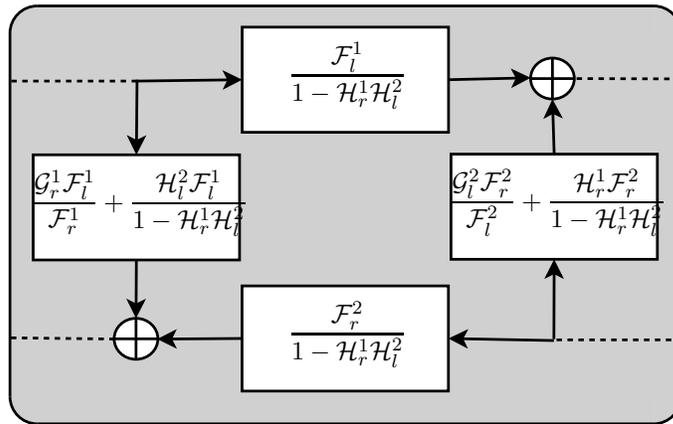


FIGURE 31 – Connexion standard 3

10ème Congrès Français d'Acoustique

Lyon, 12-16 Avril 2010

Représentation géométrique optimale de la perce de cuivres pour le calcul d'impédance d'entrée et de transmittance, et pour l'aide à la lutherie

Thomas Hélie, Thomas Hézard, Rémi Mignot

CNRS UMR 9912 - IRCAM, 1 place Igor Stravinsky, F-75004 Paris,

{thomas.helie,thomas.hezard,remi.mignot}@ircam.fr

Dans cet article, nous nous intéressons à représenter efficacement l'acoustique de tubes à symétrie axiale ayant une perce \mathcal{C}^1 , c'est-à-dire, continue et à dérivée continue. Pour ce faire, nous nous appuyons sur un modèle 1D proche de l'équation des pavillons mais plus raffiné (l'équation dite de "Webster-Lokshin" à abscisse curviligne) ainsi que des modèles simplifiés d'embouchure et de rayonnement à calotte sphérique pour les pavillons. Le modèle de propagation inclut l'effet des pertes visco-thermiques sous l'hypothèse des tubes acoustiques larges (impédance de paroi équivalente de Cremer). De plus, il repose sur des approximations sur la géométrie des isobares plus faibles (quasi-sphéricité au voisinage de la paroi) que les approximations usuelles (ondes planes ou sphériques). Une résolution exacte du modèle de propagation est possible lorsque ses coefficients (Υ quantifiant l'évasement du profil et ε quantifiant les pertes) sont constants. Les profils géométriques admissibles définissent des tronçons. Le profil complet est réalisé par leur concaténation en imposant que leur jonction soit de régularité C^1 . Si la longueur totale est fixée, un tel profil de N tronçons possède exactement $2N + 1$ paramètres libres (N paramètres Υ , $N - 1$ longueurs, et 2 coefficients libres). Un algorithme qui optimise ces paramètres pour tout profil donné a été construit. Il permet d'obtenir des descriptions fidèles d'une perce cible, préservant la régularité C^1 , par un nombre réduit de tronçons (comparativement aux représentations en tubes droits ou coniques). Un formalisme classique en matrices de transfert permet de fournir l'impédance d'entrée et la transmittance de l'instrument. Ce travail est présenté de la façon suivante. Après quelques rappels historiques, nous présentons le modèle acoustique. Puis, nous introduisons une famille de profils paramétrés permettant la résolution exacte des matrices de transfert acoustiques. Nous construisons un algorithme pour estimer les paramètres correspondant à un profil cible. Enfin, nous testons cet algorithme et reconstruisons les impédances d'entrée. Nous comparons ces résultats à des mesures et à ceux obtenus par d'autres méthodes (concaténation de tubes droits, coniques, ou intégration numérique spatiale du modèle original).

1 Sur les équations des pavillons

1.1 Historique abrégé et contexte

Modèle 1D et géométrie Le premier modèle de tube acoustique à dépendance mono-spatiale fut établi par Lagrange [1] et Bernoulli [2]. Cette équation dite "de Webster" [3], abondamment étudiée [4], repose sur des hypothèses qui ont été périodiquement révisées.

Ainsi, pour assurer l'orthogonalité des fronts d'ondes à la paroi, Lambert [5] et Weibel [6] réfutent l'hypothèse initiale d'ondes planes et postulent leur sphéricité. La quasi-sphéricité est validée expérimentalement dans les pavillons aux basses fréquences par Benade et Janson [7]. Puis, Putland [8] montre qu'une propagation à dépendance mono-spatiale ne peut être gouvernée que par une équation de Webster, pour "une certaine coordonnée", et que les ondes planes, cylindriques ou sphériques seules peuvent respecter une telle propriété.

Malgré cette restriction, des raffinements de modèles 1D ont encore été recherchés car ils permettent des calculs d'impédance aisés et la plage fréquentielle non perturbée par les modes transverses reste intéressante pour bon nombre d'instruments à vent. Ainsi, [9] suppose des fronts d'ondes en ellipsoïdes. Dans [10], un modèle exact

est établi dans la carte des isobares, à partir duquel une équation de Webster est obtenue en supposant uniquement la quasi-sphéricité des isobares au voisinage de la paroi (hypothèse retenue dans cet article).

Pertes visco-thermiques Un autre raffinement est la modélisation des pertes visco-thermiques aux parois. Kirchhoff introduit l'effet de conduction thermique et étend la théorie de Stokes. Il fournit de premières solutions simples dans l'espace libre et dans un tube. Il donne la formule de dispersion générale exacte pour un cylindre lorsque le problème est à symétrie de révolution [11] (en l'absence de symétrie, une version exacte généralisée est établie dans [12, éq. (56)]).

Certaines simplifications sont aussi proposées. Ainsi, la théorie de Zwicker et Kosten (cf. e.g. [13, p210]) est établie en séparant les effets de couches limites visqueuses et thermiques dans les équations de départ. Les conditions de validité de cette théorie sont données dans [14, 15] qui exhibent un lien plus direct avec l'équation de dispersion de Kirchhoff. De plus, Cremer établit l'admittance équivalente d'un écran plan réfléchissant des ondes planes pour un angle d'incidence donné [16]. Ce résultat coïncide avec celui de Kirchhoff pour un guide à

section rectangulaire large (épaisseur des couches limites faibles devant les longueurs du rectangle).

Pour ces simplifications, les équations de propagation incluent un terme avec une dérivée temporelle fractionnaire (voir l'équation de Lokshin [17, 18] et aussi [19]). Des solutions exactes de l'équation de Lokshin ont été données par Matignon [20, 21] et mettent en lumière un effet de mémoire longue. La prise en compte de pertes dans l'équation des pavillons établie dans [10] fait apparaître un terme similaire.

Contexte et approche Le modèle considéré ici repose sur l'hypothèse de quasi-sphéricité des isobares au voisinage de parois à admittance de Cremer. Les étapes pour son établissement sont données ci-dessous.

1.2 Equation des ondes et isobares

Dans le système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) , les isobares d'un problème à symétrie d'axe (Oz) ont des descriptions paramétriques (localement au moins) de la forme $r = f(s, u, t)$, $z = g(s, u, t)$ et $\theta \in [0, 2\pi[$, où s indexe une isobare, u est une coordonnée libre. Puisque le niveau de pression ne dépend spatialement que de s , la carte dynamique (f, g) satisfait l'équation implicite

$$\exists p \mid P(z = f(s, u, t), r = g(s, u, t), t) = p(s, t).$$

En exploitant cette équation et le changement de coordonnées $(z, r, t) \rightarrow (s, u, t)$, l'équation des ondes $(\partial_z^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \partial_r^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2)P(z, r, t) = 0$ se réécrit exactement

$$\left(\alpha(s, u, t)\partial_s^2 + \beta(s, u, t)\partial_s + \gamma(s, u, t)\partial_s\partial_t + \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right)p(s, t) = 0, \quad (1)$$

où α, β, γ sont des expressions (détaillées dans [22, 10]) de f, g et leurs dérivées jusqu'à l'ordre 2 en s, u, t .

En appliquant la dérivation ∂_u^k pour $k = 1, 2, 3$ à cette dernière équation, on trouve que, pour tout s, u, t ,

$$\begin{pmatrix} \partial_u\alpha & \partial_u\beta & \partial_u\gamma \\ \partial_u^2\alpha & \partial_u^2\beta & \partial_u^2\gamma \\ \partial_u^3\alpha & \partial_u^3\beta & \partial_u^3\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_s^2 p \\ \partial_s p \\ \partial_s\partial_t p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La nullité du déterminant de la matrice 3×3 fournit donc une condition nécessaire, purement géométrique, pour que la carte isobare corresponde à une propagation.

Dans le cas statique ($\partial_t f = \partial_t g = 0$), une étude similaire montre que les seules cartes admissibles correspondent aux cas connus : ondes planes, cylindriques, sphériques, cartes modales associées à un nombre d'onde k_0 réel (oscillation infinie) ou bien imaginaire pur (onde exponentielle non oscillante). Dans le cas modal, on déduit de l'équation isobare l'invariant géométrique

$$\partial_s \ln \left(g^2 \frac{(\partial_s f)^2 + (\partial_s g)^2}{(\partial_u f)^2 + (\partial_u g)^2} \right) + 2 \left((\partial_s f)^2 + (\partial_s g)^2 \right) s k_0^2 = 0,$$

si on choisit l'index s égal au niveau de la déformée modale (voir [10] pour plus de détails). Ainsi, aucune carte statique ne peut porter une propagation 1D non modale si le tube n'est ni droit, ni conique.

1.3 Approximation 1D pour paroi idéale

Une paroi idéalement immobile et rigide appartient aux lignes de champ de pression (cf. [22, p33] pour les cas dégénérés). En choisissant u orthogonale à s , il existe donc (f, g) et w tels que $f(s, u = w, t) = F(s)$, $g(s, u = w, t) = R(s)$ où F, R est une paramétrisation de la paroi. En évaluant (1) en $u = w$, on trouve les coefficients exacts $\alpha(s, w, t) = 1/(F'(s)^2 + R'(s)^2)$, $\beta(s, w, t) = 0$ et

$$\frac{\gamma(s, w, t)}{\alpha(s, w, t)} = \frac{d}{ds} \left(\ln \left| \frac{R(s)}{F'(s)} \right| \right) + \partial_s \ln |\partial_u g(s, u = w, t)|. \quad (2)$$

La seule information géométrique manquante pour obtenir un modèle 1D via (1) est donc le second terme de (2) qui met en jeu une dérivée d'ordre 1 en u (variation de la ligne de champ lorsqu'on s'éloigne de la paroi).

Pour assurer la compatibilité avec des isobares (i) planes dans les tubes droits, (ii) sphériques dans les cônes, (iii) orthogonales à la paroi, (iv) quasi-sphériques dans les pavillons [7], (v) sans les supposer figées, on retient l'hypothèse suivante : à la paroi, une isobare s'éloigne lentement de son approximation sphérique tangente. Plus précisément, en notant $\zeta(s, u, t)$ l'écart relatif (cf. [22]), on a $\partial_u^k \zeta(s, u = w, t) = 0$ pour $k = 0$ (contact) et $k = 1$ (tangence). En supposant la validité pour $k = 2$ (éloignement plus lent qu'une parabole), on obtient que $\frac{\gamma(s, w, t)}{\alpha(s, w, t)} = 2 \frac{R'(s)}{R(s)}$. Ceci conduit à l'équation de Webster

$$\left(\partial_\ell^2 + 2 \frac{R'(\ell)}{R(\ell)} \partial_\ell - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right) p(\ell, t) = 0, \quad (3)$$

si $s = \ell$ est l'abscisse curviligne mesurant la longueur sur la paroi ($\alpha(s, u = w, t) = 1$).

1.4 Paroi à admittance de Cremer

En présence de pertes visco-thermiques, l'orthogonalité des isobares à la paroi n'est plus valide. Si les couches limites sont d'épaisseur faible devant $R(\ell)$ et le rayon de courbure de ce profil, cette perturbation peut être estimée en approchant l'action de la paroi par son admittance de Cremer [16]. L'hypothèse de coïncidence locale à l'ordre 2 de l'isobare et sa sphère tangente conduit à une version perturbée de (3) donnée par [22, 10]

$$\left(\partial_\ell^2 + 2 \frac{R'(\ell)}{R(\ell)} \partial_\ell - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \frac{2\varepsilon(\ell)}{c^{\frac{3}{2}}} \partial_t^{\frac{3}{2}} \right) p(\ell, t) = 0, \quad (4)$$

où $\partial_t^{\frac{3}{2}}$ est une dérivée fractionnaire [20] et $\varepsilon(\ell) = \kappa_0 \frac{\sqrt{1-R'(\ell)^2}}{R(\ell)}$ quantifie les effets visco-thermiques ($\kappa_0 = \sqrt{l_v} + (\gamma - 1)\sqrt{l_h} \approx 3 \times 10^{-4} \text{ m}^{1/2}$ dans l'air). Cette équation est dite de Webster (cas $\varepsilon = 0$)-Lokshin (cas $R' = 0$).

1.5 Modèle complet, propriétés, validité

On considère ici la propagation dans l'espace des isobares redressées, sous l'hypothèse de leur quasi-sphéricité à la paroi, avec pertes, modélisée par

$$\left(\partial_\ell^2 - \left[\frac{1}{c^2} \partial_t^2 + \frac{2\varepsilon(\ell)}{c^{\frac{3}{2}}} \partial_t^{\frac{3}{2}} + \Upsilon(\ell) \right] \right) [R(\ell) p(\ell, t)] = 0 \quad (5)$$

$$\rho \partial_t v(\ell, t) + \partial_\ell p(\ell, t) = 0 \quad (6)$$

où $\Upsilon = R''/R$. Si R est deux fois dérivable, (5) équivaut à (4). Hors de la couche limite, la vitesse particulière est colinéaire au gradient de pression : elle satisfait l'équation d'Euler dont on tire (6) après projection.

Propriétés du changement de coordonnée $z \rightarrow \ell$

Pour une description de perce $z \mapsto r(z)$, la longueur de la paroi mesurée depuis $z = 0$ est $L(z) = \int_0^z \sqrt{1 + r'(z)^2} dz$ dont on tire $R(\ell) = r(L^{-1}(\ell))$. En dérivant l'expression $R(L(z)) = r(z)$, on trouve que $R'(L(z)) = r'(z)/\sqrt{1 + r'(z)^2}$. On a donc les propriétés suivantes, inhabituelles pour (3-6) : (i) $|R'(\ell)| \leq 1$; (ii) $R'(\ell) = 1$ correspond à une pente verticale. Notons qu'un tube droit reconduit bien aux équations gouvernant les ondes planes ($R'/R = 0$, $\ell = z$), et un cône reconduit aux ondes sphériques ($2R'/R = 2/\ell$). Si une perce finit par une pente verticale, le modèle opère un recollage naturel avec une solution en ondes sphériques.

Validité Le modèle sans perte (3) est exact si $\Upsilon = 0$. Il fournit une approximation intéressante si $|\Upsilon|$ est suffisamment faible ou si les fréquences sont suffisamment basses (voir [23] pour une analyse précise). L'hypothèse 1D est conditionnée par l'absence de modes transverses, qu'on caractérise par

$$f < K^+ (R_{max})^{-1} \text{ avec } K^+ = \frac{1.84c}{2\pi} \approx 631.8 \text{ m.s}^{-1}.$$

Le modèle des pertes suppose que l'épaisseur des couches limites est faible devant le rayon R et le rayon de courbure R_c donné par $\frac{(1+R'(z)^2)^{\frac{3}{2}}}{R''(z)}$ si $s = z$ et par $\frac{\sqrt{1-R'(\ell)^2}}{R''(\ell)}$ si $s = \ell$. La condition la plus contraignante vient de la couche visqueuse. Elle se traduit par (cf. e.g. [13, p212])

$$f > K^- (R_{min})^{-2} \text{ avec } K^- = \frac{\mu}{2\pi\rho} \approx 2.39 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}.$$

2 Solutions exactes pour des géométries paramétrées

2.1 Propagation à coefficients constants

Profils admissibles et régularité Dans le domaine de Laplace (variable s) et pour des conditions initiales nulles, les équations (5-6) se récrivent

$$\left[\left(\left(\frac{s}{c} \right)^2 + 2\varepsilon(\ell) \left(\frac{s}{c} \right)^{\frac{3}{2}} + \Upsilon(\ell) \right) - \partial_\ell^2 \right] \left\{ R(\ell) P(\ell, s) \right\} = 0, \quad (7)$$

$$\rho s \frac{U(\ell, s)}{S(\ell)} + \partial_\ell P(\ell, s) = 0, \quad (8)$$

où $U(\ell, s) = S(\ell) V(\ell)$ avec $S(\ell) = \pi R(\ell)^2$. Ces équations se résolvent analytiquement si ε et Υ sont constants.

Puisque $R''(\ell) - \Upsilon(\ell)R(\ell) = 0$, les profils à Υ constant sont de la forme (avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$)

$$R(\ell) = A \cos(\sqrt{-\Upsilon}\ell) + B \sin(\sqrt{-\Upsilon}\ell), \quad \text{si } \Upsilon < 0,$$

$$R(\ell) = A + B\ell, \quad \text{si } \Upsilon = 0,$$

$$R(\ell) = A \cosh(\sqrt{\Upsilon}\ell) + B \sinh(\sqrt{\Upsilon}\ell), \quad \text{si } \Upsilon > 0.$$

Ces familles peuvent être décrites par la forme unifiée

$$R(\ell) = A C_\Upsilon(\ell) + B S_\Upsilon(\ell), \quad (9)$$

1. Remarque : on vérifie que $\varepsilon(\ell) = \kappa_0 R_c(\ell)\Upsilon(\ell)$ (si $\Upsilon \neq 0$).

où $(\Upsilon, \ell) \mapsto C_\Upsilon(\ell) = \phi_1(\Upsilon \ell^2)$ et $(\Upsilon, \ell) \mapsto S_\Upsilon(\ell) = \ell \phi_2(\Upsilon \ell^2)$ sont des fonctions infiniment dérivables, construites à partir des fonctions analytiques sur \mathbb{C}

$$\phi_1 : z \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{(2k)!} \quad \left(= \cosh \sqrt{z} \right),$$

$$\phi_2 : z \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{(2k+1)!} \quad \left(= \frac{\sinh \sqrt{z}}{\sqrt{z}} \text{ pour } z \neq 0 \right).$$

Excepté le cas où R est constant, cette famille de profils ne conduit pas à une fonction ε constante. Aussi, pour un intervalle $[0, L]$ suffisamment court, on approche ε par sa valeur moyenne $\varepsilon(\ell) \approx \frac{1}{L} \int_0^L \varepsilon(\ell) d\ell$. Ceci définit un tronçon dont le profil géométrique est décrit par les 4 paramètres $\{A, B, \Upsilon, L\}$ et dans lequel la propagation est caractérisée par les constantes Υ , ε et c .

Matrice de transfert acoustique d'un tronçon

En notant $X_\ell(s) = [P(\ell, s), U(\ell, s)]^T$, une résolution analytique de (7-8) avec Υ et ε constants sur $[a, b]$ conduit à

$$X_b(s) = \mathbf{T}_{b,a}(s) X_a(s),$$

où $\mathbf{T}_{b,a}(s) = \text{diag}\left(\frac{L}{R(b)}, \frac{\pi R(b)}{\rho s}\right) \mathbf{M}_{b,a}(s) \text{diag}\left(\frac{R(a)}{L}, \frac{\rho s}{\pi R(a)}\right)$ est une matrice de déterminant 1 et, en notant $\Delta(z) = [\cosh z, (\sinh z)/z]^T$,

$$[\mathbf{M}_{b,a}(s)]_{11} = [1, \sigma_a] \Delta(L\Gamma(s)),$$

$$[\mathbf{M}_{b,a}(s)]_{12} = [0, -1] \Delta(L\Gamma(s)),$$

$$[\mathbf{M}_{b,a}(s)]_{21} = [\sigma_b - \sigma_a, \sigma_a \sigma_b - (L\Gamma(s))^2] \Delta(L\Gamma(s)),$$

$$[\mathbf{M}_{b,a}(s)]_{22} = [1, -\sigma_b] \Delta(L\Gamma(s)),$$

où $\Gamma(s)$ est une racine carrée de $\left(\frac{s}{c}\right)^2 + 2\varepsilon\left(\frac{s}{c}\right)^{\frac{3}{2}} + \Upsilon$, $\sigma_\ell = \frac{R'(\ell)}{R(\ell)/L}$ définit une *pente normalisée* avec $L = b - a$.

2.2 Jonctions de tronçons à régularité \mathcal{C}^1

Concaténation de tronçons et contraintes de régularité

Nous considérons la jonction à régularité \mathcal{C}^1 de N tronçons de longueurs L_n (paramètres laissés libres). Le profil complet décrit par les $4N$ paramètres $\{A_n, B_n, \Upsilon_n, L_n\}_{n \in [1, N]}$ est donné par

$$R(\ell) = \sum_{n=1}^N R_n(\ell) \mathbf{1}_{[\ell_{n-1}, \ell_n]}(\ell), \quad \forall \ell \in [0, \ell_N] \quad (10)$$

avec $R_n(\ell) = A_n C_{\Upsilon_n}(\ell) + B_n S_{\Upsilon_n}(\ell)$ et $\{\ell_n = \sum_{k=1}^n L_k\}_{0 \leq n \leq N}$ où $\ell_1, \dots, \ell_{N-1}$ sont les abscisses des points de raccordement entre tronçons.

La condition de régularité \mathcal{C}^1 aux jonctions s'exprime par les $2(N-1)$ contraintes d'égalité suivantes :

$$\forall n \in [1, N-1], \quad \begin{cases} R_n(\ell_n) = R_{n+1}(\ell_n), \\ R'_n(\ell_n) = R'_{n+1}(\ell_n). \end{cases} \quad (11)$$

On remarque que R est linéaire en les paramètres A_n et B_n . L'ensemble de ces équations forme donc un système linéaire (de dimension $2(N-1)$) en les $(2N)$ paramètres $\{A_n, B_n\}_{1 \leq n \leq N}$. En faisant le choix de représenter les deux degrés de liberté par $\{A_1, B_1\}$, la résolution analytique du système conduit à des solutions de la forme $[A_n, B_n]^T = \mathbf{Q}_n [A_1, B_1]^T$ pour $2 \leq n \leq N$ (cf. [24]).

Le nombre de degrés de liberté d'un tel profil à N tronçons vaut donc $4N - 2(N - 1) = 2N + 2$. Avec les choix faits ci-dessus, les paramètres libres sont A_1 , B_1 et $\{\Upsilon_n, L_n\}_{1 \leq n \leq N}$.

Matrice de transfert globale Du point de vue acoustique, le raccord de deux tronçons est réalisé en écrivant la continuité de l'état acoustique X_ℓ à la jonction. Cette continuité fait sens au moins dès que² le raccord est à régularité \mathcal{C}^1 . En itérant ce procédé pour raccorder successivement les tronçons, on trouve que $X_{\ell_N}(s) = \mathbf{T}_{\ell_N, \ell_0}(s) X_{\ell_0}(s)$ avec

$$\mathbf{T}_{\ell_N, \ell_0} = \mathbf{T}_{\ell_N, \ell_{N-1}} \mathbf{T}_{\ell_{N-1}, \ell_{N-2}} \cdots \mathbf{T}_{\ell_1, \ell_0}. \quad (12)$$

On retrouve le formalisme standard en produits de matrices de transfert comme dans le cas du raccordement de tubes droits sous l'hypothèse d'ondes planes (cf. e.g. [13, p.293]).

3 Estimation de la géométrie

On s'intéresse ici à un profil de régularité \mathcal{C}^1 , de longueur L , pour lequel Υ n'est pas constant a priori.

3.1 Cible et objectif

En pratique, une perce est généralement décrite par un relevé de $M + 1$ points, de la forme $(z_m, \mathcal{T}(z_m))$ ou $(\ell_m, \underline{R}(\ell_m))$. Souvent, le maillage spatial n'est pas régulier : le fabricant ou le luthier ajustent la finesse du pas du relevé pour que son interpolation affine par morceaux fournisse une description suffisamment fidèle pour reproduire la perce. Pour ce choix d'interpolation, les conversions exactes $z \leftrightarrow \ell$ sont immédiates et préservent le type d'interpolation. Mais, la régularité \mathcal{C}^1 est perdue.

On considère ici qu'on dispose d'une telle interpolation $\ell \mapsto \underline{R}(\ell)$, affine par morceaux, continue, construite à partir d'un relevé de points d'un profil cible à régularité initialement \mathcal{C}^1 . L'objectif est de représenter le profil original par le modèle (10-11) avec un nombre N de tronçons significativement inférieur à M , visant à

1. régénérer une version \mathcal{C}^1 du profil,
2. disposer d'une description du profil fiable et à peu de paramètres,
3. profiter du formalisme (12) avec la précision offerte par le modèle de Webster-Lokshin,
4. disposer d'une description analytique à peu de paramètres de l'acoustique du résonateur.

3.2 Distance et paramètres libres

A la différence des splines dont les paramètres sont contrôlés par les points de jonctions (de "tronçons polynomiaux"), on souhaite rendre, globalement sur $\ell \in [0, L]$, la cible interpolée \underline{R} et le modèle R aussi proches que possible. On choisit de mesurer cette proximité sur $[0, L]$ par la déviation quadratique moyenne standard

$$d_L(\underline{R}, R) = \frac{1}{L} \int_0^L (\underline{R}(\ell) - R(\ell))^2 d\ell.$$

2. Voir [22, p.66] pour une discussion de la compatibilité de cette hypothèse avec celle de quasi-sphéricité des isobares.

Puisque \underline{R} est affine par morceaux et R de la forme (9) par morceaux, cette intégrale s'exprime analytiquement en fonction de $(\ell_m, \underline{R}(\ell_m))_{0 \leq m \leq M}$ et des paramètres du modèle R à N tronçons (10-11). Cette expression est utilisée pour éviter le calcul numérique de l'intégrale et accélérer significativement l'algorithme d'optimisation.

Parmi les $2N+2$ paramètres libres du modèle R , une partie peut être réservée pour minimiser $d_L(\underline{R}, R)$ et une autre pour résoudre de nouvelles contraintes telles que

$$\mathbf{1} \text{ préservation de la longueur totale : } \sum_{n=1}^N L_n = L.$$

\mathbf{k} ($0 \leq k \leq 4$) conditions aux extrémités de la forme $F(\ell_c) = \underline{F}(\ell_c)$ avec $F = R$ ou R' et $\ell_c = 0$ ou L .

Le nombre de degrés de liberté de R devient $2N+1-k$.

Une manière simple de contraindre la longueur totale est de remplacer L_N par $L - \sum_{n=1}^{N-1} L_n$ dans R . Une manière simple d'imposer deux conditions aux extrémités ($k=2$) est de résoudre le problème linéaire associé, en les paramètres $\{A_1, B_1\}$. Dans ce cas, les $2N-1$ paramètres libres restants sont donnés par le vecteur

$$\theta = [\Upsilon_1, \dots, \Upsilon_N, L_1, \dots, L_{N-1}]^T,$$

dont dépend le profil modèle qu'on note alors R_θ et le critère associé à minimiser est donné par

$$\mathcal{C}_L(\theta) = d_L(\underline{R}, R_\theta).$$

Dans la suite, nous considérons ce cas avec les contraintes d'égalité $\underline{R}(0) = R(0)$ et $\underline{R}'(0) = R'(0)$.

3.3 Algorithme

La minimisation de \mathcal{C}_L est un problème non linéaire et non convexe. Pour obtenir une solution satisfaisante à partir d'algorithmes d'optimisation numérique standard³, nous adoptons la solution pragmatique suivante.

Initialisation :

- Initialiser θ par $\Upsilon_1 = \dots = \Upsilon_N = 0$ et $L_1 = \dots = L_N = L/N$ de sorte que $\ell_n = nL/N$ (ou valeurs données par l'utilisateur, cf. perspectives),
- Minimiser $\mathcal{C}_{\ell_1}(\theta)$ en Υ_1 ; mettre à jour θ ($[\theta]_1 \leftarrow \Upsilon_1^*$).

Itérations pour n allant de 2 à N : Minimisation de $\mathcal{C}_{\ell_n}(\theta)$ selon

1. la variable Υ_n (*mise à jour de θ*),
2. puis, les variables $\Upsilon_1, \dots, \Upsilon_n$ (*idem*),
3. puis, les variables $\Upsilon_1, \dots, \Upsilon_n, L_1, \dots, L_{n-1}$ avec $L_n = \ell_n - \sum_{k=1}^{n-1} L_k$ (*idem*).

En pratique, ces étapes conduisent à une solution proche de l'optimum global. Si l'on souhaite avoir des contraintes à droite ($\underline{F}(L) = F(L)$), on ajoute une dernière étape. Le modèle n'étant linéaire en aucun des paramètres $[\theta]_k$, la résolution du lagrangien associé serait délicate. On pénalise le critère en ajoutant des termes du type $\epsilon(\underline{F}(L) - F(L))^2$. On fait croître $\epsilon > 0$ jusqu'à ce que l'erreur commise sur la contrainte soit plus faible qu'un seuil fixé.

3. Ici, nous avons utilisé les fonctions (sous Matlab) `fminbnd` pour les optimisations selon une variable et `fminsearch` pour les optimisations selon plusieurs variables.

4 Applications et comparaisons

Nous considérons les trois profils cibles suivants : $R_1(\ell) = 0.3\ell^3 - 0.45\ell^2 + 0.194\ell + 0.0075$, $R_2(\ell) = 0.0025 + \ell^4$ polynômes à partir desquels les descriptions \underline{R}_1 et \underline{R}_2 affines par morceaux sont générées (pas de 1 mm) et la description \underline{R}_3 d'un trombone à partir d'un relevé de perce⁴. Ces profils tracés en figure 1 satisfont $|\underline{R}'_k| < 1$.

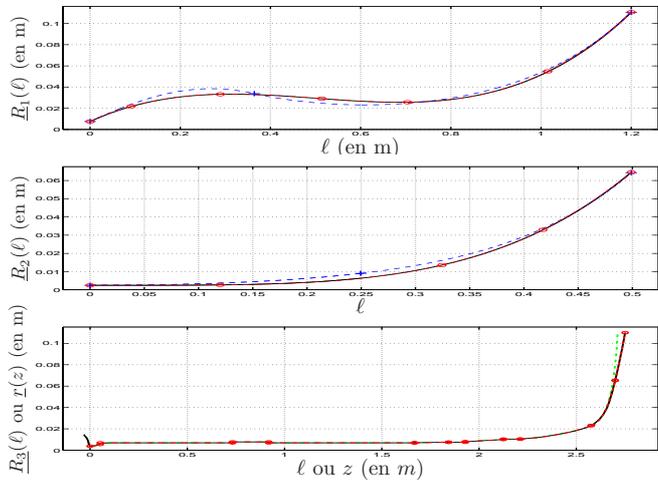


FIGURE 1 – Profils de test \underline{R}_k (-). Pour \underline{R}_1 et \underline{R}_2 : exemples d'approximation optimale avec 2 et 4 ou 6 tronçons (- - + et - - o). Perce originale $r_3(z)$ (- · - ·), $\underline{R}_3(\ell)$ (-) et approximation avec 11 tronçons (- - o).

Profil \underline{R}_1 Sur la figure 1, on peut observer les résultats de l'algorithme (avec les 4 contraintes aux extrémités) pour $N = 2$ et $N = 4$ ou $N = 6$ tronçons (les jonctions sont localisés par les marqueurs + ou o).

Pour illustrer les performances de l'algorithme, la figure 2 présente les erreurs normalisées moyennes (-o) $E_2^{moy} = \sqrt{d_L(\underline{R}_1, R_1)} / \|\underline{R}_1\|_2$ et maximales (-·-o) $E_2^{max} = \max_{\ell \in [0, L]} |\underline{R}_1(\ell) - R(\ell)| / \|\underline{R}_1\|_2$ pour $N \in \{3, 4, 5, 6\}$, avec contrainte sur $R(\ell)$ et $R'(\ell)$.

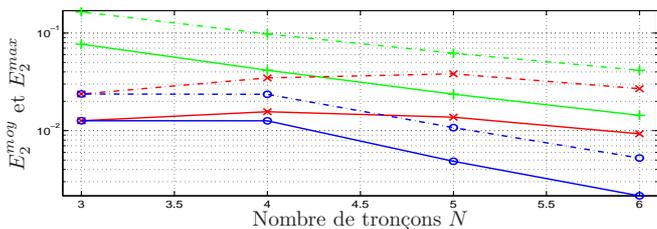


FIGURE 2 – Profil \underline{R}_1 : erreurs E_2^{moy} et E_2^{max} .

Pour illustrer l'intérêt des étapes, on représente les erreurs E_2^{moy} (-) et E_2^{max} (-·-) pour plusieurs versions de l'algorithme. Si l'étape 3 est retirée (variante 1, courbes +), les erreurs sont très supérieures. Ceci confirme l'intérêt d'optimiser les longueurs L_n . Si l'étape 3 n'est réalisée qu'à la dernière itération $n = N$ (variante 2, x), on améliore les résultats de la variante 1 mais sans retrouver la qualité originale : l'optimiseur numérique atteint un minimum local moins bon.

Un travail sur l'initialisation pourrait améliorer tous ces résultats et permettre de retrouver la même qualité

avec la variante 2 (qui réduit considérablement le temps de calcul de l'optimisation).

Profil \underline{R}_2 Ce profil évasé a été approché par 128 tubes droits (R_2^a , $L_n = L/128$), 64 cônes (R_2^b , $L_n = L/64$), 2 et 4 tronçons (R_2^c et R_2^d) aux paramètres optimisés (figure 1). Après calcul des matrices de transfert globales et concaténation en $\ell = L$ avec l'impédance bouchon idéalement nulle, on trouve les impédances d'entrée données en figure 3. Ces impédances sont à comparer à la référence obtenue par résolution numérique⁵ de (7-8). On observe que deux tronçons

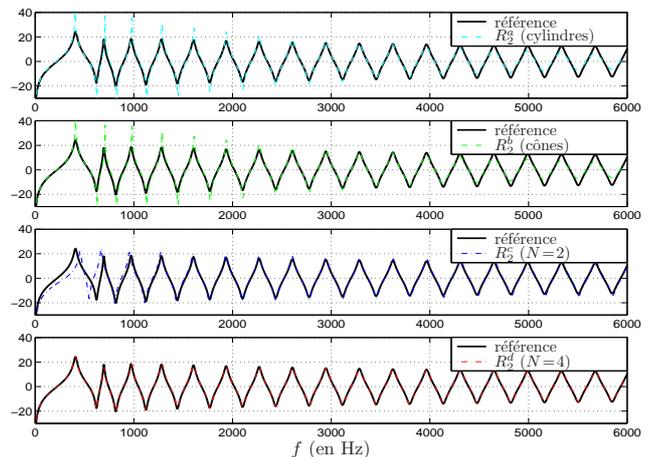


FIGURE 3 – Module (en dB) des impédances d'entrée calculées pour les profils R_2^b (- - ·), R_2^c (- · -) et R_2^d (- · - ·), comparées à la référence (-).

sont insuffisants pour obtenir des résultats fiables mais que 4 tronçons (soit 16 paramètres géométriques $\{A_n, B_n, \Upsilon, L_n\}_{1 \leq n \leq 4}$) donnent des résultats déjà satisfaisants tant géométriquement que pour l'impédance.

Profil \underline{R}_3 L'impédance d'entrée d'un trombone avec une embouchure a été mesurée (figure 4). Cette

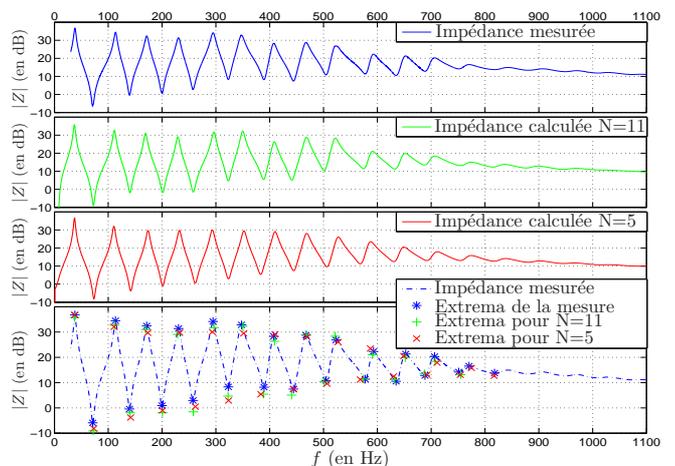


FIGURE 4 – Impédance d'entrée mesurée sur un trombone et versions calculées pour $N = 11$, $N = 5$ et comparaisons (voir [25] pour plus de détails).

impédance a été calculée à partir du formalisme (12) en considérant la matrice de transfert d'une embouchure

4. Nous remercions R. Caussé de nous avoir fourni ces données.

5. La fonction utilisée est ode23 sous Matlab.

simplifiée (masse, compliance et résistance acoustique, cf. [26]) et l'impédance de rayonnement d'une sphère dont la partie inscrite dans le cône tangent au profil en $\ell=L$ est pulsante [27, Modèle (M2)].

5 Conclusion et perspectives

Le calcul de matrices de transfert par concaténation de tronçons de tubes à R''/R constant a été rappelé pour le modèle de propagation dit de “Webster-Lokshin” à abscisse curviligne. Un algorithme qui détermine les paramètres géométriques des tronçons optimisés pour approcher une cible à régularité C^1 a été proposé. Grâce à cet algorithme, le modèle géométrique génère des représentations satisfaisantes de cibles avec peu de paramètres. De plus, lorsque la cible est bien approchée, les impédances acoustiques calculées sont fiables de sorte que l'outil complet pourrait s'intégrer à terme dans une plateforme d'aide à la lutherie (en particulier pour les pavillons). Enfin, ces représentations permettent aussi de construire des simulations temps réel (de type guide d'ondes) pour la synthèse sonore [25].

Parmi les perspectives, des discontinuités de profils, la présence de trous, clapets (etc), entre chaque zone C^1 optimisée pourrait être intégrées en définissant des raccords à volume nul et en introduisant des masses ajoutées suivant le principe donné par exemple dans [13, p.302-332]. Par ailleurs, un travail sur les paramètres d'initialisation de l'algorithme proposé en 3.3 pourrait permettre d'accélérer l'optimisation sans dégrader les résultats, en n'exécutant l'étape 3 qu'à la dernière itération. Enfin, la représentation à peu de paramètres d'une perce devrait permettre d'envisager une optimisation sur des impédances (ou immitance) cibles ou d'autres critères acoustiques, et plus seulement sur un critère géométrique.

Remerciements

Les auteurs remercient J. Kergomard et D. Matignon pour les renseignements bibliographiques et P.-D. Dekoninck pour les travaux initiaux sur l'estimation de profils géométriques. Ce travail fait partie du projet ANR Consonnes.

Références

- [1] J. L. Lagrange. Nouvelles recherches sur la nature et la propagation du son. Misc. Taurinensia (Mélanges Phil. Math., Soc. Roy. Turin), 1760-1761.
- [2] D. Bernoulli. Sur le son et sur les tons des tuyaux d'orgues différemment construits. Mém. Acad. Sci. (Paris), 1764.
- [3] A. G. Webster. Acoustical impedance, and the theory of horns and of the phonograph. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.*, 5 :275–282, 1919. Errata, *ibid.* **6**, p.320 (1920).
- [4] E. Eisner. Complete solutions of the Webster horn equation. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 41(4) :1126–1146, 1967.
- [5] R. F. Lambert. Acoustical studies of the tractrix horn. I. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 26(6) :1024–1028, 1954.
- [6] E. S. Weibel. On Webster's horn equation. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 27(4) :726–727, 1955.
- [7] A. H. Benade and E. V. Jansson. On plane and spherical waves in horns with nonuniform flare. I. Theory of radiation, resonance frequencies, and mode conversion. *Acustica*, 31 :79–98, 1974.
- [8] G. R. Putland. Every one-parameter acoustic field obeys Webster's horn equation. *J. Audio Eng. Soc.*, 6 :435–451, 1993.
- [9] J. Agulló, A. Barjau, and D. H. Keefe. Acoustic propagation in flaring, axisymmetric horns : I. A new family of unidimensional solutions. *Acustica*, 85 :278–284, 1999.
- [10] Thomas Hélie. Mono-dimensional models of the acoustic propagation in axisymmetric waveguides. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 114 :2633–2647, 2003.
- [11] G. Kirchhoff. Ueber die einfluss der wärmeleitung in einem gase auf die schallbewegung. *Annalen der Physik Leipzig*, 134, 1868. (English version : R. B. Lindsay, ed., PhysicalAcoustics, Dowden, Hutchinson and Ross, Stroudsburg, 1974).
- [12] M. Bruneau, P. Herzog, J. Kergomard, and J.-D. Polack. General formulation of the dispersion equation bounded visco-thermal fluid, and application to some simple geometries. *Wave motion*, 11 :441–451, 1989.
- [13] A. Chaigne and J. Kergomard. *Acoustique des instruments de musique*. Belin, 2008.
- [14] J. Kergomard. *Champ interne et champ externe des instruments à vent*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, 1981.
- [15] J. Kergomard. Comments on wall effects on sound propagation in tubes. *J. Sound Vibr.*, 98(1) :149–153, 1985.
- [16] L. Cremer. On the acoustic boundary layer outside a rigid wall. *Arch. Elektr. Uebertr.* **2**, 235, 1948.
- [17] A. A. Lokshin. Wave equation with singular retarded time. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 240 :43–46, 1978. (russe).
- [18] A. A. Lokshin and V. E. Rok. Fundamental solutions of the wave equation with retarded time. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 239 :1305–1308, 1978. (russe).
- [19] J.-D. Polack. Time domain solution of Kirchhoff's equation for sound propagation in viscothermal gases : a diffusion process. *J. Acoustique*, 4 :47–67, 1991.
- [20] D. Matignon. *Représentations en variables d'état de modèles de guides d'ondes avec dérivation fractionnaire*. PhD thesis, Université de Paris XI Orsay, 1994.
- [21] D. Matignon and B. d'Andréa Novel. Spectral and time-domain consequences of an integro-differential perturbation of the wave PDE. In *Int. Conf. on mathematical and numerical aspects of wave propagation phenomena*, volume 3, pages 769–771. INRIA-SIAM, 1995.
- [22] Thomas Hélie. *Modélisation physique d'instruments de musique en systèmes dynamiques et inversion*. Thèse de doctorat, Université de Paris XI - Orsay, Paris, 2002.
- [23] S. Rienstra. Webster's horn equation revisited. *SIAM J. Appl. Math.*, 65(6) :1981–2004, 2005.
- [24] Thomas Hézard. *Construction de famille d'instruments à vent virtuels*. Projet de fin d'études d'ingénieur, Ecole Nationale Supérieure de l'Electronique et de ses Applications, Cergy-Pontoise, 2009.
- [25] Rémi Mignot. *Réalisation en guides d'ondes numériques stables d'un modèle acoustique réaliste pour la simulation en temps-réel d'instruments à vent*. Thèse de doctorat, Edite de Paris - Telecom ParisTech, Paris, 2009.
- [26] N H. Fletcher and T. D. Rossing. *The Physics of Musical Instruments*. Springer-Verlag, New York, USA, 1998.
- [27] Thomas Hélie and Xavier Rodet. Radiation of a pulsating portion of a sphere : application to horn radiation. *Acta Acustica*, 89 :565–577, 2003.