GUERINO MAZZOLA

*Musica e matematica: due movimenti aggiunti tra formule e gesti**

Alla memoria di Wolfgang Graeser
per la sua anticipazione visionaria
di un pensiero dinamico
della musica come azione.

1. *L'eredità di Graeser.*

Quando il ventenne matematico e musicologo Wolfgang Graeser, preso da un attacco di depressione, si impiccò nella sua casa a Berlino il 13 giugno 1928, aveva al suo attivo la pubblicazione di due opere maggiori: il trattato *Bachs «Kunst der Fuge»* [1924], scritto all'età di diciassette anni, che rivoluzionò la teoria della musica in generale e, in particolare, la nostra comprensione dell'opera postuma di Bach, e il volume intitolato *Der Körpersinn* [1927], scritto l'anno precedente al suicidio e che aprí la visione di Graeser su ciò che l'autore stesso chiamò un pensiero e una comprensione di tipo «dinamico faustiano» della musica, della danza e delle altre espressioni artistiche. Quest'ultima opera trae ispirazione dall'esperienza profonda di Graeser fatta durante una classe di danza nella quale si trattava di seguire il tema principale dell'*Arte della fuga* di Bach e che suscitò in questo modo un legame esistenziale fra le sue ricerche simboliche astratte e l'incorporamento reale di questi simboli nella danza [Zurlinden 1935].

In altre parole, l'eredità di Graeser testimonia la tensione profonda causata dalla musica nella sua permanente oscillazione tra fatticità della compressione formulare e sviluppo gestuale del fare. E questo testimonia la convinzione e l'intuizione di un talento ingegnoso in un'utopia di coerenza fra questi due poli ontologici. Ma nonostante i risultati ottenuti, Graeser non fu mai veramente capito da musicisti, teorici e filosofi della musica. La sua tensione letteralmente suicida impedí in qualche modo alle menti accademiche di avvicinare questo campo del sapere, un po' come ci volle piú di un secolo per convincere i filosofi a prendere sul serio la «filosofia con il martello» di Nietzsche.

Quando cominciai ad applicare la geometria algebrica di Grothendieck

* Desidero ringraziare Guerino Mazzola e Claudio Bartocci per avermi puntualmente assistito durante la traduzione di questo difficile saggio. Un ringraziamento speciale va all'amico filosofo Edoardo Acotto per la sua rilettura attenta della traduzione, in particolare, ma non solo, per quanto riguarda la terminologia filosofica impiegata dall'autore. [*N.d.T.*].

e la teoria modulare dei quiver di Gabriel, assieme al paradigma funtoriale soggiacente, a questioni di teoria musicale alla fine degli anni Settanta, ho provato la stessa sensazione di essere considerato come incoerente se non schizofrenico, oscillando tra l'astrazione del formalismo matematico nella teoria musicale da un lato e la mia attività di pianista free jazz dall'altro. Ma sentivo di *dover fare entrambe le attività di ricerca*: la riflessione scientifica attraverso la compressione delle formule e la ricerca artistica di una gestualità sonora nell'espressione libera. Mi ci vollero degli anni, in effetti, per intraprendere la ricerca seria di una teoria coerente comprendente le formule e i gesti nella musica. L'episodio chiave fu la conferenza che diedi all'IRCAM di Parigi il 18 maggio 2002, nella quale cercai invano di spiegare il mio gioco pianistico nel free jazz attraverso lo stesso formalismo matematico che avevo descritto abbondantemente nel volume *The Topos of Music* [Mazzola et al. 2002]. Quella conferenza risultò essere un evento drammatico dal momento in cui realizzai che non erano le formule matematiche che controllavano e davano forma alla mia improvvisazione, ma gesti reali, enunciazioni non guidate da astrazioni legate alle formule, semplicemente dita danzanti, ovvero: un mondo totalmente diverso della realtà musicale.

Solamente grazie a un lungo sforzo, non solo dal punto di vista personale ma anche rispetto al dibattito scientifico, mi è stato possibile capire e accettare il fatto che la musica ha una dimensione ontologica che dalla fatticità simbolica permette di arrivare alla dinamica gestuale; piú esattamente, che la musica accetta le formule in quanto rappresentazioni compatte di fatti, ma non può essere realizzata se non attraverso un movimento dinamico che prende le distanze da queste stesse formule in direzione di uno sviluppo gestuale, legato al fare, ovvero alla realizzazione del potere dinamico di queste formule nell'interpretazione musicale. In altre parole, a un'intelligenza incorporata. Come afferma Theodor W. Adorno [1956]: «interpretare la musica: fare musica». La musica si realizza unicamente nell'interpretazione. La celebre psicologa della musica Helga de la Motte-Haber [1982, p. 232] afferma che pensare la musica è sempre pensare *nella* musica. E il teorico della musica Robert Hatten [2004, p. 113] si chiede: «Vista l'importanza del gesto nell'interpretazione, perché non abbiamo una teoria comprensiva [globale] del gesto nella musica?»

Questo movimento dalle formule ai gesti risulta essere fondamentale per una comprensione superiore della musica. Ho capito quest'aspetto solamente quando mi sono posto la questione di come matematica e musica siano in relazione e interagiscano in maniera coerente e solidale. Ho imparato che nella musica c'è sempre una sorta di nucleo rappresentato dalle formule che necessita di essere espresso attraverso l'azione interpretativa. In una prospettiva storica questo era già il caso nella scuola pitagorica, nella quale il simbolo metafisico della *tetraktys* doveva essere «eseguito» al monocordo o alla lira per essere compreso. Oggigiorno una tale formula potrebbe essere uno

schema cadenziale, modulante o contrappuntistico, o, per esempio, una *Grundgestalt* dodecafonica. Ma le composizioni musicali sarebbero prive di senso se si riducessero alla pura esposizione di queste formule. Formule pure che non siano immerse nella viva conoscenza sono forme vuote, allo stesso modo in cui i gesti che non sviluppano germi di pensiero sono soltanto monotone gesticolazioni. La musica ha bisogno dello spartito, la cui organizzazione processuale irradia le formule musicali attraverso una molteplicità di questioni interpretative, come afferma Adorno [2001, p. 250], e lo spartito necessita l'esecuzione, nella quale i gesti assegnati sono risuscitati e diventano viva conoscenza.

Questo asse ontologico dell'incorporamento, stratificato nella fatticità, processualità, gestualità, aggiunge una quarta dimensione ai tre assi ontologici tradizionali [Mazzola 2007, cap. XXIV, 6] della comunicazione (stratificata attraverso la poiesi, il livello neutro e il livello estesico), della realtà (fisica, mentale e psicologica) e della semiotica (espressione, significazione e contenuto). Il che significa che la dimensione ontologica della musica è certamente molto piú che la pura fatticità e come tale richiede un approccio matematico radicalmente differente rispetto alla pura alchimia delle formule.

La creazione di una teoria matematica *totale* della musica non è solamente una sfida per l'elaborazione di un'architettura concettuale adeguata, ma può avere ripercussioni all'interno della matematica stessa, in particolare sulla questione di come la dimensione dell'incorporamento potrebbe spingere i matematici a ripensare i loro livelli concettuali. Questo capovolgimento di prospettiva era già stato intuito da Gilles Châtelet [1993, p. 32], nella sua critica del concetto fregeano di funzione matematica in quanto opposta ai gesti:

> Il gesto è elastico, può raggomitolarsi su se stesso, saltare al di là di sé e ripercuotersi, laddove la funzione non offre che la forma del transito da un termine esteriore ad un altro termine esteriore, laddove l'atto si esaurisce nel proprio risultato. Il gesto ha quindi a che vedere con il polo implicito della relazione[1].

A parte la formulazione idiosincratica, questa intuizione ha un nucleo duro: essa critica l'astrazione statica della funzione fregeana, un fatto che è mascherato dalla rappresentazione grafica intuitiva delle funzioni come frecce e dalla terminologia standard oltremodo suggestiva, che definisce funzioni le «mappe», «trasformazioni», come se le funzioni fossero legate a ogni tipo di movimento – il che non è vero, evidentemente.

Questa ripercussione nella matematica è non solo il tipo di effetto noto dalla fisica, nella quale il ragionamento fisico provoca un'estensione del for-

[1] Utilizziamo la traduzione proposta da Andrea Cavazzini, che ringraziamo per avercela gentilmente fornita, nell'edizione italiana (*Le poste in gioco del mobile*, Mimesis, Milano-Udine 2010). [*N.d.T.*].

malismo matematico – come nel caso, per esempio, delle distribuzioni di Laurent Schwartz. È piuttosto una penetrazione nell'interiorità della concettualizzazione matematica, penetrazione che la manda in frantumi al fine di liberare le dinamiche originarie. Il mio saggio vuole descrivere questa vibrazione fra musica e matematica, questa pulsazione in entrambe le direzioni che spiega, in ultima istanza, che cosa accade veramente nel legame dinamico fra matematica e musica. Vorremmo dare questa spiegazione anche per rendere maggiormente comprensibile la ragione per la quale, a nostro avviso, questi due campi della conoscenza umana sono cosí profondamente intrecciati: essi coincidono nell'atto ma fanno cose estremamente diverse. *Mentre la musica svolge formule in gesti, la matematica avvolge e comprime gesti in formule.* In un approccio categoriale, si potrebbe pensare alla musica e alla matematica come a due movimenti opposti tra formule e gesti, ovvero due funtori aggiunti fra la categoria delle formule e la categoria dei gesti:

$$\text{formule} \underset{\text{matematica}}{\overset{\text{musica}}{\rightleftarrows}} \text{gesti}$$

Questa immagine suggerisce che musica e matematica sono profondamente connesse, dato che i funtori aggiunti sono mutualmente determinati in maniera univoca. Di conseguenza ogni deformazione nella musica crea un impulso nella forma della matematica, e viceversa. Nonostante la natura leggermente circolare di questa metafora d'aggiunzione, essa offre una buona idea di come musica e matematica possano interagire intimamente senza per questo essere identificate (in opposizione non solo al punto di vista pitagorico ma ugualmente alla prospettiva di fisici teorici, quali Roger Penrose [2004, p. 109], che sembrano avanzare l'idea di un'identità sostanziale fra la matematica e la fisica).

In questo contesto i gesti in musica potrebbero essere l'analogo delle stringhe nella fisica. Non solo in quanto oggetti matematici curvi, ma anche da un punto di vista concettuale: come nella teoria delle corde le particelle puntiformi sono sostituite da stringhe, cosí, nella teoria musicale e matematica dei gesti, concetti puntuali sono sostituiti da stringhe di concetti o, per riprendere una celebre idea di Châtelet [1993, p. 32]: il gesto avvolge prima di catturare e disegna il proprio svolgimento ben prima di denotare o esemplificare. Può sorprendere che una tale dinamica gestuale possa giocare un ruolo maggiore nella matematica, ma fu Grothendieck (di nuovo lui!) che rese estremamente plausibile questo punto.

Chiariamo. Facendo un passo indietro e osservando la matematica dalla prospettiva dell'incorporamento, il livello piú fattuale di questa scienza è rappresentato dalle sue formule, sorta di oggetti pronti per l'uso, in grado di essere applicati senza alcuna comprensione profonda dei concetti dai quali

emanano. A un livello piú tecnico, la matematica si sviluppa attraverso teorie, schemi operazionali e diagrammi processuali che offrono potenti strategie per capire o risolvere problemi o rispondere a questioni aperte. Ma questo è soltanto il livello dell'educazione accademica, della cultura codificata e dell'utilizzazione sistematica della conoscenza matematica. L'opera di Nicolas Bourbaki potrebbe essere considerata come il prototipo di questo livello d'incorporamento processuale. Essa corrisponde allo spartito musicale in quanto offre l'«impianto industriale» a partire dal quale le formule si sedimentano.

Ma l'attività matematica, la creazione di campi concettuali e teorie associate è in realtà radicalmente diversa rispetto a questi catechismi e processi schematizzati. Yves André, rappresentante francese di spicco della geometria algebrica d'ispirazione grothendieckiana, ha affermato (comunicazione personale) che, in questo livello della creazione matematica, i gesti cominciano a giocare un ruolo di pivot, un ruolo per il quale Grothendieck ha proposto una splendida e profonda metafora, piú precisamente la ben nota spiegazione delle due strategie di base per risolvere problemi, congetture o questioni matematiche, come descritto in Grothendieck [1985, pp. 552-53]:

> la prima [strategia] è quella del martello e dello scalpello, allorquando il problema posto è visto come una grossa noce, dura e liscia, dalla quale si tratta di estrarre il nocciolo. [...] Il principio è semplice: si mette la lama dello scalpello contro il guscio e si dà un grosso colpo di martello. Se è necessario si ricomincia in diversi punti, sino a quando il guscio si spacca – e si è soddisfatti. [...] Potrei illustrare la seconda strategia a partire dalla stessa immagine della noce da aprire. [...] Si pone la noce in un liquido emolliente, perché no semplicemente dell'acqua, di tanto in tanto si strofina la noce affinché l'acqua penetri meglio, e per il resto si lascia che il tempo faccia il suo corso. Il guscio si ammorbidisce nel corso delle settimane e i mesi successivi – e quando il tempo è arrivato basta una lieve pressione della mano e il guscio della noce si apre come fosse un avocado maturo! [...] Il lettore, per quanto poco familiare con alcuni dei miei lavori, non avrà alcuna difficoltà a riconoscere quale dei due approcci prediligo.

Applicare la seconda strategia richiede una conoscenza profonda del guscio della «noce», il che significa da un punto di vista dell'impresa matematica soggiacente che dobbiamo essere in grado di sentire il rivestimento concettuale, l'interfaccia fra gli strati interni ed esterni che definiscono il problema e delimitarlo attraverso regioni note. Questa dialettica di ammorbidimento progressivo e paziente del guscio concettuale è chiara nelle interminabili sequenze di propagazioni concettuali nelle dimostrazioni di Grothendieck, sorta di danza châteliana di gesti concettuali, che sfrega il guscio sino a quando il problema si dissolve con un semplice movimento della mano. Abbiamo offerto un esempio esplicito di questa tecnica [Mazzola 2007, cap. XIV] sotto il titolo di «dévissage de l'identité», un ammorbidimento del rivestimento della rigida dicotomia fra intervalli consonanti e dissonanti attraverso simmetrie contrappuntistiche nell'anello dei numeri duali

$\mathbb{Z}_{12}[\varepsilon]$ costruito a partire dall'anello $\mathbb{Z}_{12}$ delle classi di altezze del temperamento equabile.

Nel seguito daremo una descrizione sommaria del movimento della teoria matematica della musica di fuoriuscita dalla sua dimensione formulare propria della prigione fregeana (come magnificamente esemplificato dal teorema di classificazione delle varietà musicali) per giungere allo schematismo processuale della teoria delle categorie, simboleggiato dal paradigma trasformazionale nella teoria musicale moderna occidentale e, infine, nel suo sviluppo gestuale verso una teoria matematica dei gesti che incontra non solo la sostanza musicale nell'atto esecutivo dell'interpretazione, ma che offre anche una ricostruzione della sostanza gestuale dal punto di vista della teoria astratta delle categorie.

2. *I topoi per la musica e la prigione della fatticità di Frege legata all'insieme potenza.*

È ben noto che le scienze sono sempre strettamente legate alla matematica contemporanea, nella misura in cui aspirano alle descrizioni piú eleganti e formalizzate dei propri modelli e teoremi. In momenti storici critici, come ad esempio nella fisica all'epoca degli esperimenti di Galileo con il concetto a quel tempo arcano di quantità di moto, fu una matematica all'avanguardia (in questo caso l'invenzione del calcolo infinitesimale ad opera di Leibniz e Newton) quella che aprí nuovi poteri concettuali alle scienze.

Nei tentativi di applicare la concettualizzazione e il ragionamento matematico alla musica, dopo il primo approccio geometrico alla teoria musicale ad opera di Eulero (*Tentamen novae theoriae musicae*, 1739), che definí gli spazi del temperamento naturale come $\mathbb{Z}$-moduli liberi sulla base formata dai logaritmi di 2 (per il rapporto d'ottava 2/1), 3 (per il rapporto di quinta 3/2) e 5 (per il rapporto di terza 5/4), nel XX secolo abbiamo assistito all'utilizzazione di concetti matematici via via piú contemporanei, dalla combinatoria alle teorie probabilistiche, dalla teoria dei gruppi all'algebra lineare e all'analisi. Alla fine del secolo, questi sforzi arrivarono al piú potente linguaggio matematico: la teoria dei topoi, sviluppata da Grothendieck per la geometria algebrica a partire dalla teoria dei fasci, seguendo le idee di Jean Leray e Henri Cartan, e completata dal punto di vista logico da Charles Ehresman, William Lawvere e Myles Tierney. È sorprendente che, ben avanti l'applicazione musicale, la teoria dei topoi sia stata proposta come fondamento per l'informatica teorica da Dana Scott, ma ancor piú sorprendente è il fatto che solo recentemente, e in ogni caso dopo le applicazioni musicali elaborate da chi scrive, la teoria dei topoi sia stata proposta come approccio fondazionale alla fisica teorica, e questo grazie a John Baez, Andreas Dring, Chris Isham e molti altri.

Vi sono tre giustificazioni per l'applicazione della teoria dei topoi alla musica: storica, teorica e tecnologica. La ragione *storica* risiede nella prima opera di Graeser sull'arte della fuga di Bach, dove si legge:

> La proprietà di simmetria gioca nella musica un ruolo talmente importante che merita di essere considerata in primo luogo. È nell'*Arte della fuga* che è possibile riconoscere in modo particolarmente flagrante la sua quasi illimitata sovranità [Graeser 1924, pp. 13-14].

Graeser parla di simmetrie nel senso di applicazioni affini, non semplicemente permutazioni astratte; il suo approccio è del tipo algebra lineare e fa entrare in gioco isometrie e corpi rigidi. Questo suggerisce una «geometria dei toni», titolo che ho dato al mio secondo volume [Mazzola 1990] in riferimento a Graeser. Ma Graeser introdusse nel suo lavoro anche uno stile di linguaggio matematico completamente differente. Egli descrive una forma contrappuntistica nel seguente modo:

> Indichiamo la collezione di cose qualsiasi nella sua totalità come un insieme di queste cose e le cose stesse come gli elementi dell'insieme; in questo modo avremo l'immagine seguente di una forma contrappuntistica: una forma contrappuntistica è un insieme di insiemi di insiemi.
>
> Suona un po' strano, ma vedremo presto cosa abbiamo immaginato dietro questa definizione. Costruiamo un brano contrappuntistico. Abbiamo innanzitutto il tema, che è una collezione di note determinate, quindi un insieme i cui elementi sono le note. A partire da questo tema costruiamo uno sviluppo qualsiasi. Questo sviluppo sarà sempre una collezione di entrate dei vari temi presa come un tutto, e quindi un insieme i cui elementi sono i temi. Dato che i temi sono essi stessi insiemi di note, lo sviluppo sarà un insieme di insiemi. E una forma contrappuntistica, un brano musicale contrappuntistico è una collezione di determinati sviluppi in un tutto, e quindi un insieme, i cui elementi sono insiemi di insiemi, al punto che potremmo dire: un insieme di insiemi di insiemi [Graeser 1924, p. 17].

Graeser applicava la teoria degli insiemi di Cantor e Dedekind che rappresentava, a quel tempo, uno sviluppo rivoluzionario nella matematica moderna. Dal nostro punto di vista questi due stili (rispettivamente l'algebra lineare e la teoria degli insiemi) sono incompatibili, nel senso che iterazioni di insiemi potenza non sono oggetti naturali per l'algebra lineare e, viceversa, l'algebra lineare non è un livello naturale della teoria degli insiemi (per quanto essa possa essere costruita a partire dalla teoria degli insiemi). Mentre l'algebra lineare rappresenta le note musicali come dei punti in moduli opportuni, essa non definisce insiemi potenza iterati per le note musicali come concetti derivati dall'algebra lineare, come richiesto dalla definizione graeseriana di forma contrappuntistica. In termini di teoria dei topoi, questo significa che la categoria dei moduli non ammette un classificatore di sotto-oggetti Ω e oggetti potenza Ω^X. Dall'altro lato, la categoria **Sets** degli insiemi è un topos e ammette quindi un classificatore di sotto-oggetti $\Omega = 2 = \{0, 1\}$ e oggetti potenza Y^X (in particolare insiemi potenza Ω^X), ma essa è completamente non algebrica e, di conseguenza, né la categoria dei moduli né quella degli insiemi sono sufficientemente ricche da comprendere sia le simmetrie di Graeser sia la sua idea di forma contrappuntistica.

2.1. Prefasci, Yoneda e il Software RUBATO®.

La soluzione minimale di categoria[2] che possa esprimere sia i classificatori di sotto-oggetti sia gli oggetti potenza cosí come le strutture algebriche (affini) è il topos dei prefasci $\mathbf{Mod}^@$ sulla categoria $\mathbf{Mod}$ dei moduli e morfismi di-affini. I suoi oggetti sono i funtori controvarianti a valori negli insiemi (i prefasci) $F : \mathbf{Mod} \rightarrow \mathbf{Sets}$ e i suoi morfismi sono le trasformazioni naturali fra questi prefasci.

La ragione *teorica* per la scelta del topos $\mathbf{Mod}^@$ è legata al lemma di Yoneda. Non vogliamo soltanto lavorare in un topos ma anche legare l'approccio classico al topos senza perdita d'informazione. Il lemma di Yoneda permette esattamente questo: l'immersione di Yoneda

$$\mathbf{Mod} \rightarrow \mathbf{Mod}^@ : M \mapsto \mathrm{Hom}(-, M) = @M$$

è pienamente fedele, cosicché due moduli sono isomorfi se e soltanto se i loro prefasci associati lo sono. Piú precisamente, se F è un prefascio e A è un modulo, allora si ha un'applicazione biiettiva $\mathrm{Hom}(@A, F) \xrightarrow{\sim} F(A)$. Per questo utilizziamo la notazione $A@F$ per indicare $F(A)$. Seguendo Grothendieck, chiamiamo un morfismo $p : @A \rightarrow F$, ovvero un elemento $p \in A@F$, un *punto* di F d'indirizzo pari ad A. Il lemma significa quindi che il fatto di conoscere tutti gli insiemi di morfismi $\mathrm{Hom}(A, M) = A@M$ e le loro applicazioni insiemistiche $@f : B@M \rightarrow A@M$ per i morfismi di-affini $f : A \rightarrow B$ determina completamente il modulo M. Per esempio, l'insieme sottostante M è in corrispondenza biiettiva con l'insieme $@M(0) = 0@M$ dei punti di M d'indirizzo zero (ovvero del prefascio associato $@M$). Ritorneremo in seguito su tale architettura e daremo degli esempi concreti di teoria della musica per illustrare la potenza di questo linguaggio.

Ma vi è una ragione *tecnologica* per passare alla teoria dei topoi. La musica è tutt'altro che un gioco intellettuale. Per dimostrare che qualcosa è veramente pertinente in musica è necessario, a un certo punto, fare musica, eseguire un esperimento, un po' come la fisica teorica senza prove sperimentali non sarebbe altro che un gioco delle perle di vetro. Nella ricerca musicale questi esperimenti sono condotti abitualmente attraverso simulazioni computazionali di composizioni, analisi o interpretazioni. Nei vari software sviluppati da chi scrive e dai suoi collaboratori negli ultimi venticinque anni (*presto*® per la composizione [Mazzola et al. 2002, cap. XLIX] e RUBATO® per la composizione, l'analisi e l'interpretazione [*ibid.*, parte X; http://www.rubato.org], i principî concettuali, ovvero la ricerca di un formato adeguato per gli oggetti musicali, rappresentati in classi orientate-oggetti in Objective-C o in Java, divennero sempre piú importanti a causa del fatto che l'interazione delle componenti software era profondamente dipendente dall'intercambiabilità degli oggetti.

[2] Tutte le categorie alle quali ci riferiamo sono per ipotesi localmente piccole.

Per raggiungere questo scopo abbiamo sviluppato il linguaggio dei *denotatori* e delle *forme*. Senza entrare nei dettagli di questo linguaggio, possiamo dire che esso si divide in due parti corrispondenti rispettivamente a un impianto architettonico e a un substrato matematico. È quest'ultimo che si riferisce esplicitamente a un topos, piú precisamente il topos $\mathbf{Mod}^@$. Questo approccio è stato implementato con successo da Gérard Milmeister [2009]. Le proprietà del topos utilizzate per programmare gli oggetti musicali sono da un lato gli oggetti del tipo insiemi potenza menzionati precedentemente e dall'altro lato gli oggetti legati ai concetti di limiti e colimiti. Piú esattamente, i limiti sono onnipresenti nei paradigmi di programmazione dato che essi rappresentano liste, tabelle, vettori e cosí via. Ma da un punto di vista teorico eravamo piú concentrati sulle costruzioni di tipo insiemi potenza, dal momento che gli oggetti tradizionali della teoria della musica sono insiemi di note (come gli accordi o i profili melodici) in moduli di parametri opportuni, o ancora insiemi di insiemi, e cosí via, come Graeser aveva ben visto. Ritorneremo sugli oggetti di tipo limite e colimite in un topos applicati alla musica nella sezione successiva.

2.2. Funtori per Fux e Riemann.

Per ora concentriamoci sugli oggetti di tipo insieme potenza nella teoria della musica. Mostreremo come, pur partendo da oggetti assai elementari, si possano generare oggetti di tipo sempre piú funtoriale. Prendiamo ad esempio gli oggetti piú comuni di tipo insieme potenza, gli accordi in quanto sottoinsiemi $V \subset \mathbb{Z}_{12}$ di classi di altezze. Nel nostro impianto funtoriale, un tale accordo è un insieme di punti a indirizzo 0, vale a dire $V \subset 0@\mathbb{Z}_{12}$ nel funtore rappresentabile $@\mathbb{Z}_{12}$ dato dalla costruzione di Yoneda. Abbiamo per esempio la triade della tonica $Tc = \{0, 4, 7\}$ e la triade dominante $Dt = \{7, 11, 2\}$ nella tonalità di *do* maggiore (la classe di altezza *do* è rappresentata dallo 0 e cosí via).

Nella teoria della musica occidentale, e di fatto sin dai tempi antichi delle categorie intervallari dei pitagorici, l'armonia ha rappresentato il problema principale. Essa tratta delle regole di combinazione sintattica di accordi in rapporto al loro significato semantico. L'iniziativa piú ambiziosa nella teoria dell'armonia fu il tentativo di Hugo Riemann di attribuire a ogni accordo possibile *Ch* [sic!] una funzione semantica che rifletta la relazione dell'accordo a una data tonalità X. Piú precisamente, si tratta di attribuire loro il valore T (tonica), D (dominante) o S (sottodominante), in modo tale da esprimere la loro funzione in una data tonalità X. Questa attribuzione *definisce* infatti la tonalità, ovvero possiamo scrivere $T = X(Ch)$, $D = X(Ch)$ o $S = X(Ch)$ e considerare X come una funzione $X : Ch \mapsto T, D, S$ definita sull'insieme degli accordi. Questo progetto non fu comunque mai portato a termine. Solo accordi elementari (come le triadi maggiori o minori o altri accordi tradizionali) possono essere associati a tali valori, mentre la logica che si vorrebbe armonica sembra venir meno per diverse ragioni persino per questi accordi semplici[3]. Questa impossibilità fu una delle ragioni principali della dissociazione della teoria musicale moderna dai principî dell'armonia, come esemplificato paradigmaticamente dall'emancipazione della dissonanza nella tecnica dodecafonica di Arnold Schönberg.

Nella sua felice (ri)costruzione della logica armonica secondo i principî di Riemann, Thomas Noll [1995] dovette considerare degli accordi piú generali, piú esattamente il monoide

$$\mathrm{Trans}(V,W) = \langle f \in \mathbb{Z}_{12}@\mathbb{Z}_{12} \mid f(V) \subset W \rangle$$

generato dai morfismi affini $f \in \mathbb{Z}_{12}@\mathbb{Z}_{12}$ da V in W. Questi insiemi *transporter* non sono accordi tradizionali a indirizzo zero, bensí accordi d'indirizzo pari a $\mathbb{Z}_{12}$, vale a dire accordi «autoindirizzati». Per questo l'architettura musicale richiede degli indirizzi piú generali che i banali indirizzi pari a zero. Il *transporter* $\mathrm{Trans}(Dt, Tc)$ fu concepito come l'insieme delle *consonanze relative riemanniane* da Dt a Tc nell'armonia di Noll. Questo insieme evidenzia il seguente rapporto singolare con il contrappunto classico codificato da Johann Joseph Fux nel 1725 in *Gradus ad Parnassum*.

In contrapposizione all'armonia, il contrappunto si concentra sulla composizione di piú linee melodiche. Essenzialmente esso definisce regole che determinano quali note della linea del *cantus firmus* di base possono essere suonate in corrispondenza delle note della seconda linea, chiamata *discantus*. La teoria di Fux è costruita sul caso piú elementare, chiamato *prima specie* o *nota-contro-nota.* Questo significa che data una linea melodica corrispondente al *cantus firmus* (costruita seguendo le regole compositive del canto gregoriano), a ogni sua nota deve essere contrapposta una nota della linea del *discantus* seguendo un certo numero di regole. La regola piú importante è che gli intervalli fra il *cantus firmus* e le note del corrispondente *discantus* devono essere consonanti, ossia elementi appartenenti all'insieme degli intervalli consonanti modulo l'ottava $cs = \{0, 3, 4, 7, 8, 9\} \subset \mathbb{Z}_{12}$. La seconda regola forte proibisce la successione immediata delle quinte (pari a un intervallo uguale a 7), ovvero le «quinte parallele». In ogni caso, i principî che governano le regole contrappuntistiche sono tutt'altro che evidenti. In particolare, le quinte parallele sono considerate come disturbanti (un argomento di tipo psicologico). Per meglio comprendere la base strutturale delle regole contrappuntistiche, il contrappunto di prima specie è stato modellizzato attraverso l'uso di numeri duali [Mazzola et al. 2002, parte VII]. Ciò permette di dedurre le regole per la specie nota-contro-nota, in particolare la regola che proibisce le quinte parallele, a partire dall'unico morfismo $AK(x) = 5x + 2$ che scambia fra di loro l'insieme degli intervalli consonanti cs e il suo complementare contenente gli intervalli dissonanti $ds = \{1, 2, 5, 6, 10, 11\}$. Questo modello ha il vantaggio di permettere composizioni contrappuntistiche basate su dicotomie intervallari diverse dal caso classico consonanza/dissonanza. Si consideri l'insieme $\mathrm{Cons} = \{x + \varepsilon k \mid x \in \mathbb{Z}_{12}, k \in cs\}$ degli intervalli contrappuntistici consonanti rappresentati come numeri duali con componente consonante infinitesima k e cantus firmus x e si prenda l'accordo «autoindirizzato»

$$\mathrm{Trans}(\mathrm{Cons}, \mathrm{Cons}) = \langle f \in \mathbb{Z}_{12}[\varepsilon]@\mathbb{Z}_{12}[\varepsilon] \mid f(\mathrm{Cons}) \subset \mathrm{Cons} \rangle.$$

Si ha quindi un'applicazione iniettiva canonica $i : \mathbb{Z}_{12}@\mathbb{Z}_{12} \rightarrowtail \mathbb{Z}_{12}[\varepsilon]@\mathbb{Z}_{12}[\varepsilon]$, e la relazione assicura che

$$\mathrm{Trans}(Dt, Tc) = \mathrm{Trans}(\mathrm{Cons}, \mathrm{Cons})\big|_i .$$

Questa relazione fra contrappunto fuxiano e armonia riemanniana resta un fatto miracoloso, e le sue conseguenze non sono ancora state completamente studiate. Allo stesso modo restano incomprese le relazioni profonde fra armonia e contrappunto che hanno dato origine a una serie di approcci catalogati sotto il titolo di teoria del «movimento delle parti» (*voice leading*).

Sottoinsiemi $C \subset A@M$ di moduli a indirizzo A possono essere visti come punti $C \in A@2^{@M}$, dove per definizione $A@2^{@M} = 2^{A@M}$ è la valutazione del funtore $2^{@M}$ all'indirizzo A. Questo funtore è non rappresentabile e abbiamo quindi automaticamente a che fare con prefasci non rappresentabili. Ciò significa che costruzioni iterate di tipo insieme potenza domanderebbero sottoinsiemi in prefasci non rappresentabili, come per esempio un insieme di accordi o altre forme contrappuntistiche definite da Graeser.

Resta il fatto che un sottoinsieme non è un prefascio, e per questa ragione introduciamo per ogni sottoinsieme $C \subset A@F$ di punti d'indirizzo pari ad A di ogni prefascio F un sottoprefascio associato $\widehat{C} \subset @A \times F$. Esso è definito all'indirizzo B attraverso $B@\widehat{C} = \{(f : B \to A, c.f) \mid c \in C\}$. Si tratta di una costruzione di tipo oggetto-potenza dal momento che i sottoprefasci di $@A \times F$ sono esattamente gli elementi di $A@\Omega^F$. Questa costruzione è stata applicata in modo sistematico in una teoria topologica dell'armonia, come esposto in [Mazzola 2007, cap. XXIV, 2]. In altre parole: l'architettura funtoriale non è un generico *nonsense* matematico, ma incontra la realtà della teoria matematica della musica.

Questo impianto funtoriale genera una categoria *Loc* di strutture locali

[3] Per comprendere le ragioni fondamentali di una tale impossibilità, legate alla non orientabilità del nastro armonico, si veda la discussione illuminante di Carl Dahlhaus [1966] e i nostri commenti in Mazzola et al. [2002, cap. 13.4.2.1], oltre alla breve descrizione che daremo nel § 2.4.

di tipo insieme potenza, chiamate *composizioni locali*, nel seguente modo: gli oggetti della categoria (le composizioni locali) sono i sottofuntori $K \subset @A \times F$, vale a dire elementi di $A@\Omega^F$. Chiamiamo A l'indirizzo e F lo spazio ambiente (di base) di K. Date due composizioni locali $K \subset @A \times F$ e $L \subset @B \times G$, un morfismo $f/\alpha : K \to L$ è una coppia che consiste in una trasformazione naturale $f : K \to L$ e un morfismo di modulo $\alpha : A \to B$ tale che esiste una trasformazione naturale $h : F \to G$ che rende commutativo il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\text{inclusione}"] \arrow[d, "f"'] & @A \times F \arrow[d, "@\alpha \times h"] \\ L \arrow[r, "\text{inclusione}"] & @B \times G \end{tikzcd}$$

Questa categoria contiene la sottocategoria piena *ObLoc* delle composizioni locali *oggettive* $K = \widehat{C}$ e la sottocategoria *LocMod* delle composizioni locali oggettive $C \subset A@M$ con spazi ambiente rappresentabili (modulari) $F = @M$. Restringendo il tutto alla categoria $_R Mod$ dei moduli su un anello commutativo fissato R (con morfismi R-affini), otteniamo la categoria $_R LocMod \subset {}_R ObLoc$ di composizioni locali oggettive o composizioni locali R-modulari. Le categorie delle composizioni locali sono state classificate per un numero importante di casi, come quello degli accordi (a indirizzo pari a zero o «autoindirizzati») o profili melodici in spazi di classi di altezze e punti d'attacco [Mazzola et al. 2002, cap. XI, 3]. Non ci occuperemo in questa sede di classificazione delle composizioni locali, trattandosi di un caso particolare della classificazione delle varietà globali in musica, chiamate *composizioni globali*, che discuteremo ampiamente piú avanti (§ 2.4).

2.3. Cambiamenti d'indirizzo in *Structures pour deux pianos* di Boulez.

Gli indirizzi generali abbondano in musica, cosí come i cambiamenti d'indirizzo $\alpha : A \to B$ che permettono di definire transizioni funtoriali $B@F \to A@F$. Per esempio una serie dodecafonica può essere modellizzata come un punto di $\mathbb{Z}_{12}$ d'indirizzo pari a $\mathbb{Z}^{11}$. La serie retrograda è semplicemente la serie $S.r$, dove r è il cambio di indirizzo su $\mathbb{Z}^{11}$ definito dalla permutazione $r(e_i) = e_{11-i}$ della base affine canonica $e_0 = (0, 0, \ldots, 0)$, $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, …, $e_{11} = (0, 0, \ldots, 1)$. Il cambio d'indirizzo funtoriale non è soltanto un mero esercizio accademico, ma permette di comprendere meglio strategie compositive piú avanzate come, per esempio, l'approccio seriale utilizzato da Pierre Boulez nelle celebri *Structures pour deux pianos*. Abbiamo descritto questo

approccio in dettaglio in Mazzola et al. [2009]. Ne diamo qui un breve cenno per illustrare e sottolineare ancora una volta la nostra posizione riguardo la naturalità del punto di vista funtoriale nella teoria della musica, l'analisi, la composizione e l'interpretazione.

Il problema all'origine delle *Structures* di Boulez è che il materiale seriale, e piú precisamente une serie $S_P \in \mathbb{Z}^{11}@P$ estesa a ogni spazio P di parametri (classi di altezze, punti di attacco, durate, intensità e *modes de jeu*), non può essere maneggiato uniformemente attraverso l'applicazione di trasformazioni dodecafoniche. Un'inversione sulle classi di altezze potrebbe avere senso a differenza della stessa operazione applicata sugli attacchi. Il principio seriale crea problemi non sulla serie ma sulle sue trasformazioni. Piú precisamente, come si potrebbe trasferire, per esempio, l'inversione sulle classi di altezze a quella sugli attacchi? La risposta di Boulez è tanto semplice quanto moderna! Interpretata da un punto di vista algebrico, essa corrisponde a dire che ogni simmetria f nello spazio delle classi di altezze $\mathbb{Z}_{12}$ utilizzata per creare una serie trasformata $f \circ S_{pitch}$ a partire dalla serie (di classi di altezze) $S_{pitch} : \mathbb{Z}^{11} \to \mathbb{Z}_{12}$ può anche generare la stessa serie trasformata attraverso un cambio di indirizzo $C_f : \mathbb{Z}^{11} \to \mathbb{Z}^{11}$ tale che $f \circ S_{pitch} = S_{pitch}.C_f$ (notiamo che non vale l'inverso). Per questo motivo serie trasformate possono essere generate attraverso cambi d'indirizzo, non attraverso trasformazioni dei rispettivi spazi ambiente. La soluzione di Boulez segue direttamente: al posto di cercare trasformazioni su attacchi e altri spazi di parametri problematici, è sufficiente operare innanzitutto il cambio C_f d'indirizzo opportuno associato a tale serie. Per esempio, se S_{attack} è la serie degli attacchi, la sua trasformata rispetto all'applicazione f a valori nello spazio delle classi di altezze corrisponde a $S_{attack}.C_f$. Con questo artificio, Boulez riesce a costruire un intero bestiario di serie a valori in tutti questi spazi di parametri attraverso l'uso di un cambio d'indirizzo canonico. Boulez utilizza una matrice 12×12, che indicheremo con Q, e che è definita come segue: la sua linea i-esima $Q(i, -)$ è il cambio di base associato alla trasposizione[4] pari alla differenza fra la serie di classi di altezze S_{pitch} alla posizione i e 1. Questa matrice è equivalente a un cambio d'indirizzo $Q : \mathbb{Z}^{11} \boxtimes \mathbb{Z}^{11} \to \mathbb{Z}^{11}$ sul prodotto tensoriale affine[5] $\mathbb{Z}^{11} \boxtimes \mathbb{Z}^{11}$ definito sulla base affine $(e_i \boxtimes e_j)$ attraverso $Q(e_i \boxtimes e_j) = e_{Q(i,j)}$. Attraverso un cambio d'indirizzo di questo tipo $\xi : \mathbb{Z}^{11} \boxtimes \mathbb{Z}^{11} \to \mathbb{Z}^{11}$, applicato a ogni serie $S_P : \mathbb{Z}^{11} \to P$ otteniamo dodici serie a valori in questo spazio via il cambio d'indirizzo $S_P \cdot \xi$ della serie seguito dalla restrizione alla i-esima linea di ξ. In maniera equivalente basta anteporre il cambio d'indirizzo (!) $row_i : \mathbb{Z}^{11} \to \mathbb{Z}^{11} \boxtimes \mathbb{Z}^{11}$ definito da $row_i(e_j) = e_i \boxtimes e_j$. Utilizzando questa tecnica Boulez

[4] Se x è un elemento di un modulo M, indichiamo con T^x l'operazione di traslazione $y \mapsto x + y$ su M. Se M è un modulo di (classi) di altezze musicali, T^x è detta «trasposizione pari a x».

[5] Questo prodotto è il modulo universale rispetto alle mappe diaffini anziché alle mappe lineari usuali. Per i dettagli su questa costruzione rinviamo a Mazzola et al. [2002, E.3.3].

costruisce delle serie di serie per i due pianoforti e per le diverse sezioni del brano musicale attraverso nuovi cambi d'indirizzo ξ che utilizzano semplici operazioni geometriche su Q.

L'implementazione di queste tecniche funtoriali su RUBATO® permette di ottenere composizioni generalizzate, che sono generate algoritmicamente dalla procedura di cambiamento d'indirizzo descritta precedentemente (si vedano Milmeister [2009]; Mazzola et al. [2009]). Nella nostra composizione, intitolata *restructures*, che fu realizzata per una presentazione in omaggio a Boulez all'IRCAM nel dicembre 2007, abbiamo applicato la procedura a dodici strumenti[6].

2.4. Varietà musicali.

Le strutture locali, come confermato dall'intuizione di Graeser sulle forme contrappuntistiche, sono ovviamente insufficienti per descrivere fenomeni musicali: la teoria della musica ha a che fare con raggruppamenti sintattici in periodi, unità melodiche, famiglie di accordi o forme piú ampie, come interi movimenti (per esempio l'allegro in una forma-sonata e cosí via). Queste «carte» locali formate dai gruppi di eventi non sono di solito né disgiunte né ordinate in modo gerarchico attraverso inclusioni. Questo ci induce a sviluppare un'architettura formale basata sulle varietà musicali globali e tale da permettere di confrontare due rappresentanti di queste varietà, descrivere le loro relazioni e, se possibile, classificarle, ovvero calcolare le loro classi d'isomorfismo. È interessante notare che le varietà matematiche furono introdotte da Bernhard Riemann nel suo scritto di abilitazione del 1854, lo stesso anno in cui Eduard Hanslick pubblicò il suo celebre saggio *Vom Musikalisch-Schönen* [1854], nel quale vi è un riferimento esplicito a strutture musicali globali. Per un resoconto storico piú completo sulle varietà musicali nella teoria, analisi e composizione rinviamo a Mazzola et al. [2009, cap. XIII, 1].

A parte l'anticipazione di Graeser, queste varietà musicali furono applicate sin dal principio nella moderna teoria matematica della musica. Diamo un'occhiata innanzitutto a una delle migliori illustrazioni di tale struttura globale, della quale daremo poi la descrizione formale. Nell'armonia tonale si è soliti arricchire le scale che generano le diverse tonalità con accordi significativi dal punto di vista armonico. Nell'armonia occidentale, gli accordi triadici corrispondenti ai sette gradi in una scala diatonica $Dia_x = T^x\{0, 2, 4, 5, 7, 9, 11\}$ sulla tonica $x \in \mathbb{Z}_{12}$ sono i sottoinsiemi di tre elementi $I_x = T^x\{0, 4, 7\}$, $II_x = T^x\{2, 5, 9\}$, $III_x = T^x\{4, 7, 11\}$, $IV_x = T^x\{5, 9, 0\}$, $V_x = T^x\{7, 11, 2\}$,

[6] La composizione *restructures* può essere scaricata all'indirizzo http://www.encyclospace.org/special/restructures.mp3.

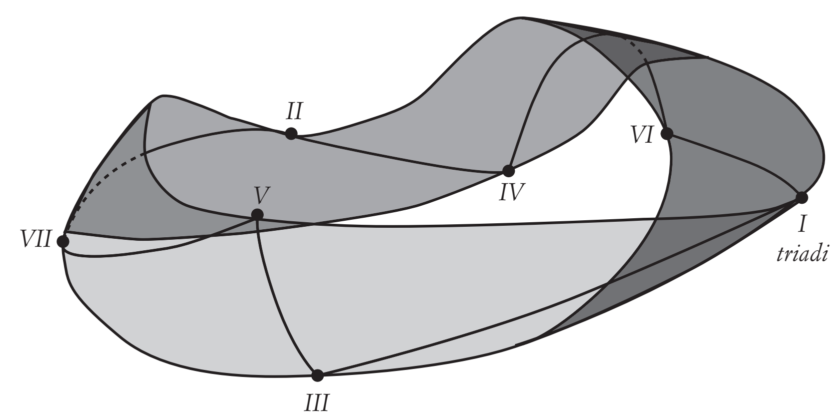
$VI_x = T^x\{9, 0, 4\}$, $VII_x = T^x\{11, 2, 5\}$. I gradi I, IV, V corrispondono ad accordi maggiori, i gradi II, III, VI ad accordi minori e VII a un accordo diminuito. Il ricoprimento di Dia_x attraverso queste triadi è indicato con $Dia_x^{(3)}$. Schönberg fu il primo teorico della musica a interessarsi alle relazioni *geometriche* di questi gradi rispetto alle note comuni: tracciò una linea in corrispondenza di coppie di gradi aventi almeno una nota in comune e chiamò questa costruzione il *nastro armonico* della tonalità $Dia_x^{(3)}$. Da un punto di vista matematico egli definí in questo modo lo 1-scheletro del nervo $N(Dia_x^{(3)})$ del ricoprimento. Ma la forma veramente interessante[7] è il nervo completo $N(Dia_x^{(3)})$, che chiameremo analogamente «nastro armonico» della tonalità $Dia_x^{(3)}$. I suoi 0-simplessi sono i sette gradi, e questi generano una forma geometrica bidimensionale che risulta essere un nastro di Möbius (figura 1).

Nel bordo del nastro armonico è possibile leggere una successione significativa dal punto di vista musicale e corrispondente al ciclo delle quinte *IV*, *I*, *V*, *II*, *VI*, *III*, *VII*. Ogni nota della scala musicale è rappresentata da una superficie triangolare e due triangoli sono legati fra loro da un segmento se e solo se i rispettivi toni definiscono una terza che connette due gradi. Triadi maggiori e minori aventi in comune un intervallo di terza o di quinta so-

[7] Il nostro esempio è una bella illustrazione di quanto sia utile avere a disposizione concetti matematici ben sviluppati quando si fa matematica e musica.

Figura 1.

Il nastro armonico è un nastro di Möbius. Nel suo bordo ritroviamo la sequenza delle quinte. L'assenza di un'orientazione globale è responsabile del fallimento del tentativo da parte di Hugo Riemann di costruire una teoria funzionale dell'armonia.



no considerati ugualmente nella cosiddetta teoria *neoriemanniana*, una teoria dell'armonia fondamentale nella tradizione americana [Cohn 1998] e nella quale il cosiddetto *Tonnetz* corrisponde al ricoprimento del totale cromatico attraverso triadi maggiori e minori. Il nostro nastro di Möbius è costruito tagliando il *Tonnetz* lungo la linea delle quinte (ad eccezione della triade diminuita)[8]. L'interesse della struttura di nastro di Möbius $N(Dia_x^{(3)})$ risiede nel fatto che tale nastro è una superficie non orientabile: la parte superiore e quella inferiore coincidono. Questo risultato fonda un argomento importante che sancisce l'impossibilità di costruire un'armonia basata sulla teoria delle funzioni in accordo con l'idea originaria di Hugo Riemann [Mazzola et al. 2002, cap. XIII, 4.2.1]. Il nastro armonico è una struttura di base nella teoria della modulazione tonale dell'autore [*ibid.*, cap. XXVII, 1], teoria che è in totale accordo con i risultati ottenuti da Schönberg [1966] nell'armonia tradizionale.

Strutture globali di questo tipo abbondano nella teoria musicale. Diamo quindi la definizione generale di una tale varietà musicale basandoci sulla categoria delle composizioni locali modulari su un anello commutativo R e con indirizzo dato da un modulo A:

Definizione 1. *Una* composizione globale modulare in corrispondenza di un indirizzo *A è il dato di:*

- *un ricoprimento I di un insieme finito G con sottoinsiemi non vuoti $G_i \subset G$, $i \in I$;*
- *un atlante $(K_i)_{i \in I}$ dato da composizioni locali modulari $K_i \subset A@M_i$, d'indirizzo pari ad A a valori in R-moduli M_i;*
- *un insieme di applicazioni biiettive $g_i : G_i \xrightarrow{\sim} K_i$ per ogni $i \in I$;*
- *condizioni d'incollamento sulle sottocomposizioni $K_{ij} \subset K_i$ definite dalle intersezioni $G_i \cap G_j$ e dalle applicazioni biiettive g_i, g_j: abbiamo degli ${}_R LocMod$-isomorfismi $g_j g_i^{-1} / Id_A : K_{ij} \xrightarrow{\sim} K_{ji}$ per ogni coppia di indici i, j.*

Con tali oggetti definiamo la categoria ${}_R GlobMod$ delle composizioni globali R-modulari. I morfismi sono le mappe evidenti fra sottoinsiemi sottostanti tali che definiscono morfismi sulle carte dell'atlante. Tralasciando i dettagli, è importante sottolineare il fatto che una tale varietà musicale è legata a un dato ricoprimento dell'insieme sottostante. Questo differisce dalle varietà matematiche nelle quali si considera il colimite dei ricoprimenti. Nel caso musicale ciò non avrebbe senso visto che la selezione di insiemi costituenti il ricoprimento è un tratto caratteristico di un dato approccio analitico, come abbiamo visto precedentemente nel caso del nastro armonico. Notiamo inoltre che non tutte le composizioni globali sono definite da un ricoprimento di composizioni locali predefinite, come nel caso di una tonalità $Dia_x^{(3)}$. Vi sono composizioni globali che non sono isomorfe ad alcun ricoprimento di questo tipo [cfr. Mazzola et al. 2002, cap. XVI, 1, esempio 31]; tali composizioni globali sono dette *non interpretabili*.

[8] Il riferimento a Riemann è comunque erroneo, dato che fu Eulero il primo a considerare il *Tonnetz*. In termini moderni, questo è lo $\mathbb{Z}$-sottomodulo dello spazio reale $\mathbb{R}$ delle altezze generato dai logaritmi log(3/2) e log(5/4) degli intervalli di quinta e di terza maggiore nell'intonazione naturale che sono linearmente indipendenti sui razionali. Si tratta quindi di una griglia bidimensionale, da cui il nome «Tonnetz».

Per quanto questa categoria sia assai ampia, vi è un buon numero di famiglie di composizioni globali che possono essere completamente classificate. Vi è persino uno spazio geometrico canonico, e piú precisamente uno schema nel senso della geometria algebrica di Grothendieck, tale che i suoi punti a valori in un anello corrispondono a classi d'isomorfismo di determinate composizioni globali modulari. Discuteremo questo risultato, noto come il teorema di classificazione per le composizioni globali, nel paragrafo successivo.

La parte cruciale di questa discussione è la natura generale degli oggetti con i quali abbiamo avuto a che fare sino ad ora. Abbiamo visto che le composizioni locali sono interpretate come punti d'indirizzo pari ad A in prefasci di tipo insieme potenza Ω^F. Questo è l'impianto basato sulla teoria dei topoi secondo il quale questi oggetti sono sotto-oggetti $K \subset @A \times F$ definiti attraverso funzioni caratteristiche $\chi_K : @A \times F \to \Omega$. Dall'interpretazione logica della teoria dei topoi sappiamo che l'insieme $A@\Omega^F$ di sottofuntori di $@A \times F$ è un'algebra di Heyting, ossia un'algebra logica intuizionistica definita dalla struttura di algebra di Heyting su Ω [MacLane e Moerdijk 1994, pp. 201-3]. Le composizioni locali sono quindi i valori logici in un'algebra di Heyting e questi sono definiti come sotto-oggetti tramite le funzioni caratteristiche di Gottlob Frege. Si tratta di un'astrazione cruciale, dal momento che nulla deve essere noto qui a parte il fatto che un certo sotto-oggetto è semplicemente il morfismo di fibra caratteristico sul valore di verità $\top : 1 \to \Omega$. Questa è la massima astrazione da ogni proprietà del sotto-oggetto legata al contenuto. Non è necessario sapere nulla sul sotto-oggetto, a eccezione del fatto che i suoi punti hanno valore «true». In questo linguaggio, le cose sono ridotte alla pura fatticità di essere vere, vale a dire, in un linguaggio piú wittgensteiniano, a «essere il caso».

Questo aspetto della teoria dei topoi corrisponde alla pura riduzione fregeana degli oggetti in quanto collezioni di ciò che «è il caso». Le composizioni globali sono persino piú di questo, nel senso che sono incollamenti di oggetti locali verità, corrispondenti alle loro carte. Questo è palese nel nostro nastro armonico dal momento in cui il nervo è l'espressione geometrica della configurazione dell'intersezione, che non è nient'altro che il sistema di congiunzioni logiche delle carte corrispondenti ai gradi in una scala diatonica, carte che non sono «false» (cioè la loro intersezione è non vuota). Per essere piú chiari, i morfismi fra composizioni locali e globali sono un arricchimento della collezione di oggetti nelle categorie delle composizioni locali. Ma tali morfismi non sono parte degli oggetti, essi sono esterni a questi ultimi. Gli oggetti sono rigorosamente *ready-mades* fattuali di tipo fregeano, la cui storia generativa, ovvero i processi che hanno permesso di ottenerli, resta a noi inaccessibile. Questo aspetto logico della teoria delle composizioni locali e globali fa parte dell'attitudine matematica che David Lewin [1987, p. 20] ha definito come «cartesiana», in quanto derivante dal punto di vista puramente esternalista sulle cose «fuori da qui», *res extensae* cartesiane. Siamo del parere che esse siano persino meno che *res extensae*, dato che sono caratterizzate unicamente dal fatto di essere o meno il caso, nulla che possa legarle a una proprietà specifica dello spazio (funtoriale) inglobante; le chiameremo «fregeane» piuttosto che «cartesiane». Questo si concilia perfettamente con la linea di pensiero secondo la quale il lemma di Yoneda è cosí centrale in questo contesto basato sulla teoria dei topoi. Infatti la filosofia del lemma di Yoneda è che esso rimpiazza applicazioni astratte in categorie con trasformazioni naturali fra prefasci a valori su insiemi, e ciò significa che possiamo riformulare le applicazioni astratte in termini di sistemi di funzioni insiemistiche nel senso di Frege. Riassumendo, la teoria funtoriale delle composizioni locali e globali nell'architettura concettuale del topos $\mathbf{Mod}^{@}$ è un impianto moderno e in qualche modo universale di tutto ciò che può essere costruito nello spirito fregeano della fatticità modellizzata dal punto di vista logico.

3. *Classificazione delle varietà musicali: ovvero come spalancare la prigione a limiti e processi.*

Il carattere statico e di tipo «scatola nera» della teoria matematica della musica basata sulle costruzioni di tipo insiemi potenza è stato criticato da numerosi teorici della musica e musicologi, poiché questo approccio non permette di rappresentare nessun tipo di dinamica musicale, sia essa nella costruzione processuale della musica o nel suo carattere cruciale che risulta irriducibile a puro movimento psicologico [Spanier 1966, p. 169], per non parlare del carattere gestuale piú astratto presente in numerosa musica pura, come nel quartetto op. 131 di Beethoven o nel trio per archi op. 45 di Schönberg [Cherlin 1998]. Ciò non significa che i risultati ottenuti attraverso la teoria matematica della musica basata sugli insiemi potenza siano irrilevanti, ma risulta necessario decodificare queste formule ermetiche.

3.1. Network.

Nel suo tentativo di aprire la prigione fregeana, Lewin [1987, p. 159] ha proposto una «teoria trasformazionale» ispirata alla celebre questione: «Se sono in s e desidero raggiungere t, quale gesto caratteristico devo eseguire per giungervi?» La sua proposta non rappresenta comunque la soluzione completa, in quanto egli introduce movimenti ma non gesti reali. La teoria di Lewin tende verso un linguaggio processuale, che rappresenta in un certo senso una riscoperta della teoria delle categorie in musica e che è divenuta assai importante sotto il titolo di *Network di Klumpenhouwer* [Lewin 1990]. Vediamo come questi diagrammi permettono di aprire la prigione fregeana.

Discutiamo innanzitutto il caso insiemistico. Consideriamo un sottoinsieme $K \subset X$ di un insieme X. La funzione caratteristica $\chi_K : X \to \Omega$ invia gli elementi di K in $1 \in \Omega$. Ciò significa che abbiamo un diagramma commutativo d'insiemi:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] \arrow[d, "!"'] & X \arrow[d, "\chi_K"] \\ 1 \arrow[r, "\top"] & \Omega \end{tikzcd}$$

In altre parole, gli elementi $k \in K$ sono le soluzioni $x = k$ dell'«equazione fregeana» $\chi_K \circ x = \top$. Simbolizziamo questo fatto con l'applicazione $\chi_K/! : x \to \top$, che mette in relazione la «variabile» x con l'«elemento fisso di verità» $\top$ attraverso la «funzione fregeana» $\chi_K/!$. In questa riformulazione di elementi insiemistici, l'approccio diagrammatico è una generalizzazione diretta. Innanzitutto si può generalizzare l'elemento fisso di verità che diventa una variabile, in seguito la funzione caratteristica che diventa una funzione generica, infine si può generalizzare il caso di una funzione a un diagramma contenente tali funzioni. Piú precisamente, per ogni categoria $\mathcal{C}$ si consideri la categoria $\int_{\mathcal{C}}$ dei $\mathcal{C}$-punti. Identificando gli oggetti $A \in \mathcal{C}$ con i funtori rappresentabili $@A \in \mathcal{C}^{@}$ via il lemma di Yoneda, gli oggetti di $\int_{\mathcal{C}}$ diventano le trasformazioni naturali $x : A \to F$, dove $A \in \mathcal{C}$ e $F \in \mathcal{C}^{@}$ (ovvero, grazie a Yoneda, gli elementi $x \in F(A)$). I morfismi da $x : A \to F$ a $y : B \to G$ sono le coppie f/α tali che il diagramma seguente commuta:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "x"] \arrow[d, "\alpha"'] & F \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "y"] & G \end{tikzcd}$$

Questa è la generalizzazione evidente del diagramma fregeano precedente. Ne segue che un $\mathcal{C}$-network è semplicemente un diagramma $\delta : \Delta \to \int_{\mathcal{C}}$ di $\mathcal{C}$-punti. Diamo ora due esempi interessanti da un punto di vista musicale di un tale network per illustrare la potenza della concettualizzazione precedente (si veda Mazzola e Andreatta [2006] per una discussione approfondita). Il primo esempio è emblematico del cambio di paradigma proposto da Lewin. In Mazzola [1985, pp. 30-32] abbiamo considerato accordi (insiemi di classi di altezze di $\mathbb{Z}_{12}$) che erano stati definiti come network di diagrammi semplici. Un classico esempio è dato dall'accordo di *do* maggiore $Tc = \{0, 4, 7\}$. Come insieme non ha struttura interna, nessun processo che ci dica come è stato generato: l'accordo è semplicemente «dato». Tale lacuna è risolta grazie a uno ${}_{\mathbb{Z}}\mathbf{Mod}$-network

$$\delta = 0 \xrightarrow{T^7 3} 7 \underset{T^7 3}{\overset{T^7 3}{\rightleftarrows}} 4$$

sul digrafo[9]

$$\Delta = \bullet \longrightarrow \bullet \rightleftarrows \bullet$$

allo zero-indirizzo con tre spazi rappresentabili $@\mathbb{Z}_{12}$ nei suoi vertici, tre spazi di morfismi identici $T^7 3$ e il cambiamento d'indirizzo zero ovunque. I valori $x = 0, 7, 4$ nei vertici stanno per i punti $x : 0 \to @\mathbb{Z}_{12} : 0 \mapsto 0, 7, 4$. Abbiamo classificato tutti gli accordi generati da una singola applicazione a partire da un punto fissato (come in questo caso con l'applicazione $T^7 3$ e il punto 0) in Mazzola [1985, pp. 30-32] e rappresentato in questo modo la maggior parte degli accordi tradizionali nell'armonia occidentale. Tali accordi sono detti «accordi circolari» (*circle chords*) e sono all'origine della ricostruzione dell'armonia riemanniana ad opera di Thomas Noll [1995].

Network d'indirizzo zero aventi nei loro vertici gli spazi $@\mathbb{Z}_{12}$ e isomorfismi affini quali applicazioni corrispondono ai network di Klumpenhouwer a cui abbiamo accennato precedentemente, e sono gli oggetti base della teoria trasformazionale. La necessità d'indirizzi piú generali è mostrata chiaramente dal seguente esempio di network di una serie dodecafonica s in quanto insieme di punti $\mathbb{Z}^{11} \to @\mathbb{Z}_{12}$. Nel network seguente i simboli Us, Ks, KUs stanno rispettivamente per inversione, retrogrado e retrogradazione dell'inversione della serie s:

[9] Scegliamo la terminologia «digrafo», utilizzata nella teoria delle categorie e nella teoria dei grafi per indicare un multigrafo orientato; nella teoria delle rappresentazioni esso è detto un «quiver».

$$\begin{tikzcd} s \arrow[r, "Id/T^{11}.-1"] \arrow[d, "T^{11}.-1/Id"'] & Ks \arrow[d, "T^{11}.-1/Id"] \\ Us \arrow[r, "Id/T^{11}.-1"] & KUs \end{tikzcd}$$

La retrogradazione $Id/T^{11}.-1$ è un semplice cambio d'indirizzo senza trasformazione dello spazio, come già discusso precedentemente; l'inversione $T^{11}.-1/Id$ è una semplice trasformazione dello spazio senza cambio d'indirizzo.

Dal punto di vista matematico, i network sono legati alla seconda grande costruzione alla base della definizione di un topos: i limiti (e il loro concetto duale, ovvero i colimiti). Intuitivamente, i limiti sono una generalizzazione di un sistema di equazioni. Questo è esattamente ciò che abbiamo considerato quando abbiamo definito la categoria $\int_{\mathcal{C}}$ dei $\mathcal{C}$-punti. Utilizzando la notazione precedente, un morfismo $f/\alpha : x \to y$ in questa categoria è una coppia di punti x, y che risolve l'equazione $f \circ x = y.\alpha$ definita da un diagramma di due applicazioni:

$$A@F \xrightarrow{A@f} A@G \xleftarrow{\alpha@G} B@G.$$

Di conseguenza, un $\mathcal{C}$-punto $\delta : \Delta \to \int_{\mathcal{C}}$ è un elemento del limite del diagramma derivato da δ inserendo le due applicazioni opposte «numeratore»/«denominatore» per ogni applicazione di Δ.

3.2. Il network classificante delle composizioni globali.

Sinora abbiamo visto che il passaggio dalle costruzioni di tipo insiemi potenza ai processi espressi da network è un'estensione naturale dell'equazione di verità fattuale fregeana $\chi_K \circ x = \top$ a un sistema di equazioni piú generali che sono rappresentate da diagrammi di $\mathcal{C}$-punti. Abbiamo anche visto come le soluzioni di tali diagrammi siano essenzialmente elementi del limite, e come questo completi l'armamentario basato sulla teoria dei topoi. Il passaggio è quindi da una dichiarazione statica di elementi a un sistema di equazioni che, come una sorta d'impianto industriale, valuta candidati potenziali (i $\mathcal{C}$-punti nei loro vertici) a essere soluzioni delle equazioni date. I network risultanti non sono solo insiemi, ma i loro elementi sono legati fra loro da condizioni generative espresse da equazioni. Potrebbe non esserci alcuna soluzione, e le equazioni che li definiscono restano date.

Questo fatto permette di indirizzare l'attenzione dalle soluzioni (oggetti fattuali) allo schema costruttivo (il processo «industriale»). Ma a parte questo cambiamento concettuale, vi è anche un meraviglioso cambiamento teorico nella direzione dei network che ha luogo nel processo di elaborazione del teorema di classificazione delle composizioni globali. Ciò significa che anche senza pensare in termini di network, le composizioni globali evocano i network nel momento in cui si affronta il problema del calcolo delle loro classi d'isomorfismo. Fortunatamente possiamo esporre le idee centrali senza entrare nei dettagli assai tecnici della geometria algebrica su spazi di moduli. La classificazione di composizioni globali fa uso di uno strumento classico, ovvero la desingolarizzazione.

Nel nostro caso ciò significa che, data una composizione globale, i suoi punti non sono necessariamente in posizione generica. Per esempio, può succedere che, anziché definire un triangolo, tre punti nello spazio degli attacchi-altezze siano allineati o che quattro punti nello spazio attacchi-altezze-intensità, anziché definire un tetraedro, siano coplanari e persino allineati. Questa è una delle ragioni principali per le quali esistono composizioni globali non interpretabili (abbiamo menzionato questo punto nel § 2.4). La desingolarizzazione della composizione globale G^I è quindi il primo passo verso una comprensione migliore delle composizioni globali. Ogni G^I ammette una tale desingolarizzazione, composizione globale chiamata *risoluzione* di G^I e che indicheremo con Γ. Dal punto di vista combinatorio essa non è diversa da G^I: ha lo stesso numero di punti e la stessa taglia e configurazione delle carte locali. Ma all'interno di ciascuna carta Γ_i di Γ i punti sono in posizione generica, il che significa che se Γ_i ha k_i punti, allora le loro differenze reciproche nello spazio ambiente generano uno spazio di dimensione $k_i - 1$. Per esempio, se $k_i = 4$, allora le tre differenze generano uno spazio tridimensionale o, in altre parole, i quattro punti definiscono un tetraedro. L'esempio in figura 2 mostra una tale composizione globale. Questa ha sei punti (indicati da 1 a 6) e le tre carte seguenti non tutte singolari visto che i loro quattro punti giacciono in un piano: $G_1 = \{1, 2, 3, 4\}$, $G_2 = \{1, 2, 5, 6\}$, $G_3 = \{3, 4, 5, 6\}$. Le carte sono incollate in tre coppie di punti: (1, 2), (5, 6) e (3, 4). La patologia in questo caso è l'incollamento dei punti 1 e 2 che è torto, come mostrato in figura. Questa composizione globale è non interpretabile. Ma la sua risoluzione Γ è interpretabile, come mostrato nella figura: le sue carte vivono in uno spazio tridimensionale e sono non singolari. Infatti, ciascuna delle carte Γ_1, Γ_2 e Γ_3 genera un tetraedro.

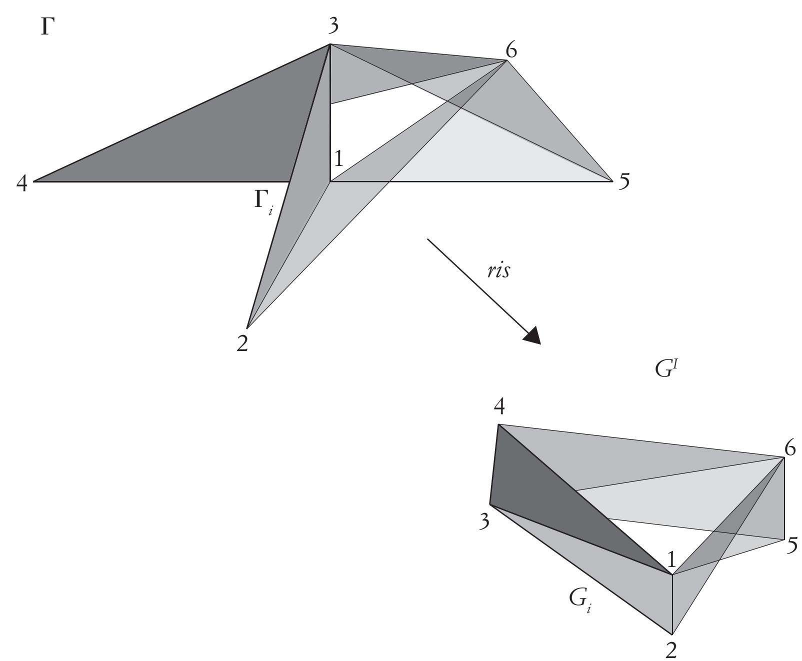
La classificazione risiede ora in due fatti: innanzitutto la risoluzione è un oggetto «libero», non ha parametri nascosti; inoltre le funzioni affini su G^I possono essere utilizzate per ricostruire G^I a partire della sua interpretazione: prendiamo il nervo $N(\Gamma)$ che è inviato in maniera biiettiva nel nervo $N(G^I)$ attraverso il morfismo biiettivo *ris* (che in generale non è un isomorfismo!) come mostrato in figura 2. Per ogni simplesso $\sigma \in N(\Gamma)$ il modulo $\mathbf{Aff}(ris(\sigma))$

delle funzioni affini sull'intersezione delle carte nell'immagine del simplesso $ris(\sigma)$ può essere retratto attraverso *ris* a un sottomodulo $F_\sigma \subset \mathbf{Aff}(\sigma)$ del modulo delle funzioni affini nelle intersezioni delle carte nel simplesso σ. Prendendo per ogni punto x in un simplesso σ di Γ la sua valutazione su F_σ si ottiene un'immersione $x \mapsto \dot{x} \in F^*_\sigma$ nel modulo lineare duale di F_σ. Si può mostrare che questo ricostruisce G^I a meno di isomorfismi sotto alcune condizioni, come affermato nel seguente teorema di classificazione [Mazzola et al. 2002, cap. xv, 3.2, teorema 18]:

Teorema 1 (Classificazione geometrica delle composizioni globali). *Sia A un modulo localmente libero di rango finito su un anello commutativo R. Si consideri la composizione globale G^I d'indirizzo A con le seguenti proprietà* (*)*:*

Figura 2.

La risoluzione Γ di una composizione globale G^I. Essa è inviata biiettivamente in G^I e la carta Γ_i corrisponde alla carta G_i.



– *i moduli* $R.G_i$ *generati dalle carte* G_i *ovvero da tutte le differenze* $x - y$, *con* $x, y \in G_i$ *all'interno dello spazio delle carte, sono localmente liberi di rango finito;*
– *i moduli delle funzioni affini* $\mathbf{Aff}(G_i)$ *sono proiettivi.*

Allora esiste un sottoschema J di un R-schema proiettivo di tipo finito i cui punti $\omega : Spec(S) \to J$ *sono in corrispondenza biunivoca con le classi d'isomorfismo di composizioni globali modulari all'indirizzo* $S \otimes_R A$ *aventi le due proprietà precedenti* (*).

La ricostruzione della composizione globale G^I a partire da funzioni affini è basata sul sistema totale di queste funzioni sul nervo della risoluzione Γ. Piú esattamente, il nervo $N(\Gamma)$ definisce un digrafo i cui vertici sono i simplessi σ e le cui frecce $\sigma \to \tau$ sono le inclusioni $\sigma \subset \tau$. Per ogni coppia $\sigma \to \tau$ si hanno le corrispondenti funzioni lineari di restrizione $r(\sigma, \tau) : \mathbf{Aff}(\sigma) \to \mathbf{Aff}(\tau)$. Se prendiamo lo spazio $S(\mathbf{Aff}(\sigma))$ dei sottospazi lineari di $\mathbf{Aff}(\sigma)$ per ogni simplesso σ, allora la restrizione $r(\sigma, \tau)$ induce un'applicazione $S(\sigma, \tau) : S(\mathbf{Aff}(\sigma)) \to S(\mathbf{Aff}(\tau))$ per proiezione. Questa definisce un diagramma d'insiemi di sottospazi, ed è chiaro che il sottospazio $F_\sigma \in S(\mathbf{Aff}(\sigma))$ ottenuto a partire da G^I – come descritto sopra – forma un elemento del limite $A@\lim_{N(\Gamma)} S(\mathbf{Aff}(\sigma))$ (scriviamo questo come il valore di un prefascio all'indirizzo A, dal momento in cui quest'indirizzo è scelto implicitamente e di fatto definisce un prefascio; per i dettagli rinviamo a Mazzola et al. [2002, capp. xv-xvi]). In altre parole: le funzioni affini retratte da G^I sono network (d'indirizzo A) che possono essere classificati nella composizione globale libera definita dalla risoluzione Γ di G^I.

Riassumendo, abbiamo mostrato che l'utilizzazione della nozione di limite nel nostro approccio alla teoria musicale basato sui topoi ci ha spinti sia dal punto di vista musicale sia dal punto di vista teorico ad arricchire il quadro concettuale in direzione di un approccio processuale volto a una migliore comprensione analitica della classificazione degli oggetti del tipo insiemi potenza. Per completare questa immagine dobbiamo aggiungere che alcuni tipi di network locali e globali[10] permettono la costruzione di composizioni (locali e globali) associate di tipo funtoriale e, per questa ragione, la classificazione di queste ultime può aiutare a ottenere la classificazione dei relativi network (rinviamo a Mazzola [2004] per i dettagli). La classificazione completa dei network è comunque tutt'altro che risolta.

[10] La nostra costruzione precedente di network è infatti di tipo locale e i network globali possono essere definiti facilmente attraverso incollamenti di network locali utilizzando le tecniche usuali [Mazzola 2004].

4. *I gesti e l'illusione delle frecce: una ripercussione musicale sulla matematica.*

Sinora l'architettura matematica basata sulla teoria dei topoi è stata utile per stabilire il livello fregeano della fatticità derivata dall'insieme potenza nella teoria musicale. Essa si è dimostrata inoltre capace di costituire una concettualizzazione essenziale per lo sviluppo processuale della fatticità attraverso l'uso di limiti, e abbiamo compreso che persino la classificazione di oggetti del tipo insiemi potenza (composizioni globali) può essere modellizzata dalla parte basata sui limiti nel senso della teoria dei topoi. Che cosa manca, possiamo quindi domandarci? Ciò non è sufficiente per ammettere che la teoria dei topoi è la chiave per tutto ciò di cui abbiamo bisogno nell'impresa di capire e gestire la musica?

Ovviamente ciò non basta, dato che nella composizione musicale e nell'interpretazione i processi descritti da diagrammi di $\mathcal{C}$-punti mancano dell'incorporamento gestuale, siano essi movimenti fisici o entità piú astratte in spazi di pensiero musicale e artistico. Per meglio capire il problema, torniamo alla citazione di David Lewin: «Se sono in *s* e desidero raggiungere *t*, quale gesto caratteristico devo eseguire per giungervi?» L'autore aggiunge in seguito che considera il soggetto della questione precedente non come un viaggiatore o un osservatore astratto, ma come un ballerino che si muove all'interno della musica, un po' come l'idea avanzata da Helga de la Motte-Haber di pensare la musica come un'identificazione virtuale con l'oggetto musicale.

Il riferimento ai gesti, all'incorporamento e alla teoria di questi fenomeni in musica è di estrema importanza. Citiamo ancora una volta Adorno [2001, p. 247]:

> Da questo segue che il compito dell'interprete sarebbe quello di fissare le note con un'attenzione insistente, in modo tale che esse subiscono a un certo punto una metamorfosi; ma senza diventare immagini del movimento dell'anima dell'autore – benché esse lo siano, seppur accidentalmente – bensí come curve sismografiche che il corpo stesso della musica ha lasciato dietro di sé nella sua scossa spirituale.

L'artista che interpreta deve penetrare lo spartito sino a quando le vibrazioni gestuali tornano alla vita rivelando il corpo della musica. Questo riferimento alla dimensione corporale è condivisa anche da Cecil Taylor, mostro sacro del piano free jazz: «La musica occidentale non presuppone alcun coinvolgimento corporale. [...] Cerco di imitare al pianoforte i salti che un ballerino fa nello spazio». Quest'affermazione è estremamente significativa, in quanto apre la definizione della musica all'atto creativo non basato necessariamente sullo spartito. La musica può essere mediata attraverso lo spartito, ma entrambe le citazioni, quella di Adorno come quella di Taylor, rivelano che il livello piú profondo della creatività risiede al di là delle note, in una sorta di dimensione corporale e delle enunciazioni gestuali.

È interessante notare che la matematica non è ancora pronta per una simile concettualizzazione. Questo era già evidente nell'affermazione di Châtelet citata all'inizio: l'esternalizzazione della funzione fregeana si oppone all'intensità della gestualità. Nella sua comprensione di che cos'è lo spazio e di che cosa rappresentano i punti in uno spazio, il grande matematico Henri Poincaré è attento alla dimensione gestuale. Citiamo da Longo [2003]: «Localizzare un oggetto e un punto qualsiasi significa rappresentarsi il movimento (ovvero le sensazioni muscolari che l'accompagnano e che non hanno alcun carattere geometrico) che bisogna fare per raggiungerlo». Questo è in accordo con l'etimologia del vocabolo «spazio» in quanto *ex pati*, raggiungere, camminare attraverso. Lo spazio è ciò attraverso cui si cammina. Esso è definito dal gesto fisico del camminare. La matematica moderna sembra aver dimenticato questo aspetto, pur conservando le radici legate all'intuizione nel suo linguaggio descrittivo. L'algebra lineare, teoria prototipica del nostro tempo, riduce i movimenti spaziali, come ad esempio le rotazioni spaziali attorno a un asse in $\mathbb{R}^3$, a una formula astratta, in questo caso una matrice 3×3, il cui movimento suggerito dalla rotazione è completamente assente nella formula. Ci vuole tempo per estrarre questo movimento rotatorio dalla matrice: ricerca degli autovettori, quindi dell'angolo di rotazione, e cosí via. Gli aspetti generativi delle forme geometriche sono stati studiati da Michael Leyton [2001], ma senza alcun riferimento ai lavori pionieristici di Châtelet.

4.1. La parte mancante nel lemma di Yoneda.

Cercare di rappresentare la matematica attraverso categorie legate ai sensi potrebbe sembrare un'impresa discutibile. Dopotutto, il tentativo di ridurre la matematica a un insieme di categorie cognitive della psiche umana fallí, in quanto costruito su un circolo vizioso: ogni riduzione di questo tipo richiederebbe alla matematica di provare la propria validità. Non stiamo cercando di *ridurre* la matematica, ma piuttosto di ricondurre le sue manipolazioni ad attività umane legate ai sensi. Spieghiamoci meglio utilizzando il lemma di Yoneda. Categorie astratte hanno compattato le strutture in maniera talmente densa che la manipolazione di queste strutture è stata spesso considerata come un «*nonsense* astratto»: fare il giocoliere con le frecce è un'attività spoglia di ogni significato immaginabile, l'unica intuizione con la quale si è lasciati è il grafico della freccia che può aiutare a manipolare alcune delle operazioni elementari con le categorie. In questo contesto, il lemma di Yoneda ci restituisce l'intuizione fregeana delle frecce, ovvero di funzioni g che trasformano argomenti x in valori $g(x)$. La trasformazione naturale $@f : @X \to @Y$ associata a una freccia astratta $f : X \to Y$ in una categoria $\mathcal{C}$ rappresenta questa freccia come un sistema di funzioni fregeane sugli insiemi $A@f : A@X \to A@Y$ per ogni indirizzo A. E il lemma ci dice precisamente che questa rappresentazione è fedele: qualsiasi cosa si faccia con un tale sistema genera una freccia in una determinata categoria e si ha la possibilità di agire in senso fregeano generando, per esempio, delle frecce astratte.

Questo è quello che intendiamo quando ci poniamo la questione dell'esistenza di rappresentazioni sensoriali. Nel nostro caso si tratterà di tematizzare la rappresentazione dell'attività matematica attraverso gesti. È esattamente la parte mancante del lemma di Yoneda: abbiamo trasferito frecce astratte verso (sistemi di) funzioni fregeane g. Ma queste funzioni sono ancora incomplete nel senso di Châtelet: sono teletrasporti, in quanto nulla è noto sul cammino da x a $y = g(x)$, un cammino che resta virtuale. Per dirla un po' enfaticamente: si tratta di una finzione. La teoria degli insiemi ha ridotto precisamente il concetto di funzione al suo mero grafico: non c'è alcun legame che collega l'argomento x e il valore y di una funzione, che diventano semplicemente una coppia ordinata (x, y). Perché non possiamo immaginare di restituire il senso di *movimento* da x a y a questo teletrasporto? Dovrebbe essere possibile completare il lemma di Yoneda in un teorema, nel quale le frecce astratte sono reinterpretate come gesti spaziali reali che muovono x in y. Il lemma allo stato presente è unicamente ciò che può essere considerato come la parte «oggettiva» (gli oggetti della categoria sono stati trasformati in sistemi d'insiemi), la parte gestuale, «morfica», è andata perduta.

È sorprendente, ma sino a un certo punto, che questo concetto matematico sia proposto da teorici della musica. La ragione può risiedere nel fatto che le forme musicali, cosí come la notazione nello spartito, sono considerate sempre come puntelli per una determinata espressione, mentre in matematica l'apparato formale è cosí dominante che il background espressivo passa facilmente in secondo piano. La celebre citazione di Lewin ben riassume questo fenomeno in musica: l'autore intende parlare di gesti, ma il suo formalismo è riconducibile direttamente alla teoria delle categorie a base insiemistica. I musicisti sanno bene che le notazioni non sono in grado di esprimere le loro intenzioni, e per questo non si preoccupano mai troppo delle debolezze formali. In altre parole, per dirla in maniera piú provocatoria in termini di movimenti opposti tra formule e gesti: *i musicisti estraggono dalle formule i gesti senza preoccuparsi troppo dell'involucro, mentre i matematici racchiudono i gesti in formule, e la loro preoccupazione principale è proprio l'involucro, non il contenuto gestuale.*

Sono stati fatti comunque dei tentativi di risuscitare questi «gesti congelati» nella matematica. Citiamone un paio: il primo tentativo è offerto dalla teoria delle rappresentazioni dei quiver di Gabriel [Gabriel e Roiter 1992]. Gabriel munisce l'algebra di una veste teorica basata sui grafi. Per esempio, l'algebra $\mathbb{C}\langle X, Y\rangle$ dei polinomi non commutativi in due variabili X e Y e a coefficienti complessi è rappresentata dalla combinazione lineare complessa di cammini costruiti sui due lacci X e Y del digrafo

$$\Delta = \begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop left, "Y"] \arrow[loop right, "X"] \end{tikzcd}$$

Piú in generale, ogni grafo diretto Γ dà origine a un'algebra di quiver $R\Gamma$ su un anello commutativo R. Nel nostro caso avremo $\mathbb{C}\langle X, Y\rangle \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}\Delta$. Questa teoria, a mezza strada fra l'algebra astratta e la teoria dei gesti, è infatti la teoria necessaria per l'approccio trasformazionale di Lewin.

Il secondo esempio è piú fondamentale. Ci si può chiedere quale sia il passo essenziale che conduce dal campo $\mathbb{R}$ dei reali al campo algebricamente chiuso $\mathbb{C}$ dei numeri complessi. La differenza decisiva è, evidentemente, data dal teorema fondamentale dell'algebra: ogni polinomio non costante a coefficienti complessi ha una radice in $\mathbb{C}$. Questa proprietà apparentemente algebrica è comunque basata sulle proprietà del piano complesso che sono essenzialmente di tipo topologico.

Il teorema ammette una splendida dimostrazione che fa uso della teoria dell'omotopia [Lages 2003, cap. v, 1]. Si tratta di un salto notevole dall'algebra alla topologia algebrica, alla teoria delle curve continue e delle sue deformazioni omotopiche. Ritorneremo in seguito su questa teoria; per il momento limitiamoci a sottolineare la differenza fra $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$. Essa diventa evidente nella trasformazione da x a $-x$ in $\mathbb{R}$. Questa funzione speculare non può essere pensata come un movimento continuo, dal momento in cui ogni curva continua da x a $-x$ passerebbe per l'origine 0 di $\mathbb{R}$ e diventerebbe singolare. L'operazione speculare è un'operazione che resta misteriosa nei reali; essa non è movimento ma vero e proprio teletrasporto nel senso di Frege. Invece in $\mathbb{C}$ la negazione è una semplice rotazione. Possiamo raggiungere $-x$ a partire da x su una curva circolare $c(t) = xe^{i\pi t}$, $t \in I = [0, 1]$. E il numero complesso *pivot*, l'unità immaginaria $i = \sqrt{-1}$ è esattamente alla metà della rotazione, dove la parte reale si annulla.

La discussione precedente suggerisce che si può concepire una teoria matematica dei gesti che potrebbe *in fine* permettere di completare il lemma di Yoneda nella sua parte «morfica» e, come richiesto dai teorici della musica e musicisti, offrire una descrizione e un'analisi piú esplicite dei livelli gestuali della musica. Abbiamo cominciato a sviluppare questa teoria in Mazzola e Andreatta [2007] per i gesti in spazi topologici e in Mazzola [2009] per i gesti in categorie topologiche. La prima applicazione della teoria per la comprensione del *flow* e della collaborazione nel free jazz è stata descritta in Mazzola e Cherlin [2009], mentre un'applicazione ai gesti per la modulazione tonale nella *Sonata* op. 106 di Beethoven è descritta in Mazzola [2009].

4.2. Teoria topologica dei gesti.

Nonostante la comprensione intuitiva di che cos'è un gesto, inclusi il movimento del corpo e la semantica gestuale, una concettualizzazione precisa sembra meno evidente. Concordiamo con Jean-Claude Schmitt [1990] nel considerare la definizione medievale di gesto, data da Ugo di San Vittore, come una delle definizioni piú pertinenti, perlomeno in riferimento al corpo umano concreto: «Gestus est motus et figuratio membrorum corporis, ad omnem agendi et habendi modum». Il gesto è il movimento e la figurazione delle membra del corpo a un fine ben preciso, ma anche in accordo con la misura e la modalità proprie al raggiungimento di un qualsiasi tipo di azione e intenzione. Nella teoria gestuale che segue ci baseremo su questa definizione di gesto e ne implementeremo la (con)figurazione attraverso l'articolazione di diagrammi. Descriveremo quindi il movimento nella parametrizzazione di curve rappresentanti la configurazione e formalizzeremo lo spaziotempo corporale attraverso uno spazio topologico nel quale ha luogo il movimento. Non ci preoccuperemo in questa sede della semantica dei gesti, che potrà essere affrontata solamente dopo un'indagine esaustiva riguardo gli aspetti matematici formali dei gesti.

Cominciamo col riprendere le strutture di digrafi in termini categoriali, sulla base del topos che chiameremo *Digrafo*. Gli oggetti del topos *Digrafo* sono funzioni $\Gamma : A \to V^2$ da un insieme $A = A_\Gamma$ di *applicazioni* a valori nel prodotto cartesiano $V^2 = V \times V$ dell'insieme $V = V_\Gamma$ di *vertici*. La prima proiezione $t = pr_1 \circ \Gamma$ è chiamata funzione *coda* (*tail*), la seconda $h = pr_2 \circ \Gamma$ è chiamata funzione *testa* (*head*)del digrafo. Data un'applicazione a, i vertici $t(a)$, $h(a)$ sono chiamati rispettivamente la sua testa e la sua coda e denotati con $t(a) \xrightarrow{a} h(a)$. Un morfismo $f : \Gamma \to \Delta$ di digrafi è una coppia $f = (u, v)$ di funzioni $u : A_\Gamma \to A_\Delta$, $v : V_\Gamma \to V_\Delta$ tali che $v^2 \circ \Gamma = \Delta \circ v$.

Abbiamo ora bisogno di una sottocategoria speciale di digrafi, i *digrafi spaziali*. Un tale digrafo è associato a uno spazio topologico X e sarà indicato con $\overrightarrow{X}$. Per definizione l'insieme delle frecce è $A_{\vec{X}} = I@X$, l'insieme delle curve continue $c : I \to X$ in X, mentre l'insieme dei vertici è $V_{\vec{X}} = X$, $h(c) = c(1)$ e $t(c) = c(0)$. Un morfismo spaziale è un morfismo di digrafo indotto canonicamente da una mappa continua $f : X \to Y$. La sottocategoria dei digrafi spaziali e morfismi corrispondenti sarà indicata con *SpazioDigrafo*. Un digrafo spaziale è piú che un semplice digrafo: esso è anche un digrafo topologico, nel senso che l'insieme $A_{\vec{X}} = I@X$ di frecce di $\overrightarrow{X}$ è uno spazio topologico con la topologia dei compatti-aperti, e le funzioni testa e coda $h, t : I@X \to X$ sono continue. Inoltre, per una mappa continua $f : X \to Y$ l'applicazione $I@f : I@X \to I@Y$ è continua.

Definizione 2. *Dati un digrafo Δ e uno spazio topologico X, un Δ-gesto (topologico) in X è un morfismo di digrafo $\delta : \Delta \to \overrightarrow{X}$, vale a dire una realizzazione dei vertici e delle applicazioni astratti all'interno di uno spazio topologico. Dati due gesti $\delta : \Delta \to \overrightarrow{X}$, $\gamma : \Gamma \to \overrightarrow{X}$, un morfismo $f : \delta \to \gamma$ è un morfismo di digrafo $f : \Delta \to \Gamma$ tale che esiste un morfismo spaziale $h : X \to Y$ che commuta con f, ovvero $\overrightarrow{h} \circ \delta = \gamma \circ f$. Abbiamo cosí definito la categoria* Gesto *dei gesti topologici.*

La proprietà importante di questa categoria è che essa permette costruzioni gestuali iterate, che abbiamo chiamato *ipergesti*, ovvero gesti di gesti. La ragione risiede nel fatto che l'insieme $\Delta@\overrightarrow{X}$ di Δ-gesti in X è in modo naturale uno spazio topologico indotto da una costruzione di limite dalla topologia dei compatti aperti sullo spazio $I@X$; questo insieme sarà indicato con $\Delta\overrightarrow{@}X$. Possiamo quindi considerare spazi d'ipergesti $\Gamma\overrightarrow{@}\Delta\overrightarrow{@}X$, d'«iper-ipergesti» $\Sigma\overrightarrow{@}\Gamma\overrightarrow{@}\Delta\overrightarrow{@}X$, e cosí via. Si osservi che l'ipergesto è una generalizzazione naturale della curva d'omotopia, e per questo gli ipergesti sono oggetti naturali della topologia algebrica. Gli ipergesti sono stati presi in considerazione intuitivamente da un buon numero di musicisti e teorici, fra i quali Renate Wieland, allieva di Adorno e nota pedagoga del pianoforte: «L'effetto del suono è il fine del gesto unificante, il tocco è quindi per cosí dire il gesto nel gesto» [Wieland e Uhde 2002, p. 190].

Gli ipergesti di ordine superiore sono legati fra loro grazie al seguente teorema, che abbiamo chiamato «teorema di Escher», per il fatto che le permutazioni di digrafi sono legate alle illusioni grafiche di questo artista.

Teorema 2 (Teorema di Escher). *Se Γ e Δ sono digrafi e X è uno spazio topologico, allora sussiste il seguente omeomorfismo canonico:*

$$\Gamma\overrightarrow{@}\Delta\overrightarrow{@}X \xrightarrow{\sim} \Delta\overrightarrow{@}\Gamma\overrightarrow{@}X.$$

Questo significa che è possibile cambiare la prospettiva del digrafo «esterno» e osservare gli ipergesti da molteplici prospettive di digrafi. Cosa particolarmente utile per i processi creativi nell'improvvisazione jazzistica [cfr. Mazzola e Cherlin 2009, cap. IX].

4.3. Gestoidi.

La generalizzazione del concetto di omotopia attraverso gli ipergesti utilizza la ben nota categoria H_X di classi di omotopia di curve in X. Piú esattamente, i suoi oggetti sono gli elementi di X, mentre l'insieme dei morfismi $H_X(x, y)$ è l'insieme delle classi di omotopia di curve che cominciano in x e terminano in y. La composizione di classi di omotopia è la classe di omotopia della composizione di curve. Si tratta chiaramente di un gruppoide nel quale l'inverso della classe di curve $[\gamma]$ è la classe $[\gamma^*]$ della curva inversa $\gamma^*(t) = \gamma(1 - t)$. In particolare, il gruppo $H_X(x, x)$ è il gruppo fondamentale $\pi_1(x, X)$ di X in x. La categoria H_X è detta il gruppoide fondamentale di X. Se $\delta : \Delta \to \overrightarrow{X}$ è un gesto, il gruppoide generato dalle frecce e dai punti di δ via il morfismo canonico $\Delta \xrightarrow{\delta} \overrightarrow{X} \to Path(\overrightarrow{X}) \to H_X$ sarà indicato con H_δ e sarà chiamato il *gruppoide fondamentale di* δ. Per esempio, se $\Delta = 1$ è il digrafo finale (un vertice, un laccio), e se $\delta : 1 \to \overrightarrow{X}$ è un laccio in x, allora H_δ è il sottogruppo del gruppo fondamentale $\pi_1(x, X)$ generato dalla classe di omotopia di $\delta(T)$. Per esempio, se $X = S^1 \subset \mathbb{C}$, il cerchio unitario, e se δ invia il laccio su una rotazione di un giro completo attorno all'origine $1 \in S^1$, allora $H_\delta \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$, il gruppo fondamentale di S^1.

Linearizziamo ora il gruppoide fondamentale di δ su $\mathbb{C}$, ovvero gli insiemi $H_\delta(x, y)$ sono presi come base sul campo dei numeri complessi e la composizione è definita per estensione bilineare sulla composizione di base. Chiameremo questa categoria $\mathbb{C}$-H_δ il *gestoide di* δ. Nell'esempio precedente del circolo unitario abbiamo che $\mathbb{C}$-$H_\delta \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}\mathbb{Z}$, algebra di gruppo di $\mathbb{Z}$ sui numeri complessi. Si osservi che questa è essenzialmente l'algebra dei polinomi di Fourier finiti se prendiamo come generatore la curva $t \mapsto e^{2\pi i t}$. In questa interpretazione, le espressioni di Fourier sono combinazioni lineari di classi omotopiche di gesti (ovvero ipergesti particolari). Questa prospettiva apre la possibilità di comprendere la formula di Fourier da un punto di vista gestuale (si veda Mazzola e Cherlin [2009], cap. XI.1 per dettagli).

L'interpretazione (iper)gestuale del gruppo fondamentale è uno strumento base nella ricostruzione gestuale della teoria astratta dei gruppi, dato che ogni gruppo è isomorfo a un gruppo fondamentale di uno spazio topologico [Spanier 1966, p. 147]. Questo induce un programma di ripensamento della teoria dei gruppi in termini di ipergesti allo scopo di studiare quest'area centrale della matematica (si pensi alla classificazione dei gruppi finiti semplici!) sulla base della rappresentazione e manipolazione di gesti.

4.4. Teoria categorica dei gesti.

Fino a questo punto la parte piú difficile, da un punto di vista matematico, della teoria dei gesti, riguardante il completamento morfico del lemma di Yoneda, resta irrisolta. Vogliamo discutere quest'ultimo argomento e proporre alcune piste verso una possibile soluzione del problema nel paragrafo conclusivo. Ma riassumiamo innanzitutto il problema essenziale. Abbiamo a che fare con categorie generali nelle quali i morfismi sono frecce astratte che vorremmo «materializzare» in termini di gesti, un po' come gli oggetti astratti nelle categorie sono stati «materializzati» nel lemma di Yoneda in termini d'insiemi attraverso funtori rappresentabili a valori su insiemi.

L'idea è di reinterpretare il concetto di gesto topologico in un contesto categoriale nel quale non sia data a priori una topologia. Per comprendere come sia possibile definire una metodologia generale per generare gesti a partire da morfismi $f: X \to Y$ in categorie astratte, partiamo da una considerazione euristica. Mettiamoci in uno spazio musicale $\mathbb{R}^2$ nel quale i parametri sono, ad esempio, gli attacchi e le altezze. Interpretiamolo come il piano complesso $\mathbb{C}$. Prendiamo una rotazione $e^{i\theta}: x \mapsto xe^{i\theta}$ su $\mathbb{R}^2$. Sebbene questo morfismo $f = e^{i\theta}$ agisca come un «teletrasporto» fregeano su x, la nostra intuizione di una rotazione di un angolo θ è ben diversa, dal momento che immaginiamo un movimento continuo rotatorio di x attorno all'origine sino a quando il punto raggiunge la posizione finale $xe^{i\theta}$. Questo processo è visualizzato dalla traccia di x durante la rotazione, cioè da una curva continua $c_x : I \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto xe^{i\theta t}$ su un cerchio di raggio $|x|$. Su questa curva, ogni posizione intermedia $xe^{i\theta t}$ corrisponde a una fattorizzazione

$$f = e^{i\theta(1-t)} \circ e^{i\theta t} = f_{1-t} \circ f_t$$

di f. In altre parole, la curva $c : I \to \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ è una curva di fattorizzazioni del morfismo dato f. Questa riformulazione del gesto c in termini di fattorizzazioni significa che c è visto come una fattorizzazione «infinita» nella misura in cui i fattori sono parametrizzati dal parametro della curva $t \in I$. Un gesto è quindi ripensato come legato a una fattorizzazione infinita dell'applicazione data in una sequenza di frecce «infinitesimali».

Quanto detto ci permette di ripensare gli elementi base di un'interpretazione gestuale dei morfismi in una categoria astratta. A questo fine fissiamo un morfismo $f: X \to Y$ in una categoria $\mathcal{C}$. Definiamo ora la *categoria* $[f]$ *delle fattorizzazioni di* f. I suoi morfismi sono le terne (u, g, v) di morfismi $u : X \to W$, $g : W \to Z$ e $v : Z \to Y$ tali che $v \circ g \circ u = f$. Il dominio dell'applicazione è $d(u, g, v) = (u, Id_W, v \circ g)$, mentre il suo codominio è $c(u, g, v) = (g \circ u, Id_Z, v)$. Supponiamo di avere due morfismi (u, g, v) e (r, h, s) tali che $c(u, g, v) = d(r, h, s)$, $h : Z \to Q$, allora la loro composizione è il morfismo $(u, h \circ g, s)$, come mostra il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "u"'] \arrow[d, dotted, "r"] \arrow[dr, dotted] & \\
W \arrow[r, "g"'] \arrow[dr, dotted] & Z \arrow[r, "h"'] \arrow[d, dotted, "v"] & Q \arrow[dl, "s"] \\
 & Y &
\end{tikzcd}$$

Se $\mathcal{C}$ è una categoria topologica[11], allora lo è ugualmente $[f]$, vista come un sottoinsieme di $\mathcal{C}^3$. Dati due oggetti X, Y in $\mathcal{C}$, costruiamo la somma disgiunta $[X, Y] = \coprod_{f \in X@Y} [f]$ delle categorie delle fattorizzazioni $[f]$ (incluso il coprodotto delle topologie su $[f]$).

Diamo ora due esempi elementari di categorie topologiche:

1) la *categoria simplesso* ∇ associata all'intervallo unitario I: è la categoria che sostituirà lo spazio topologico I nel nostro approccio categorico ai gesti. Il suo insieme di morfismi è $\nabla = \{(x,y) \mid x, y \in I \text{ e } x \leq y\}$, $d(x, y) = (x, x)$, $c(x, y) = (y, y)$. La composizione di morfismi è triviale e la topologia su ∇ è la topologia relativa indotta dall'usuale topologia prodotto su $I \times I \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$;
2) la *categoria grafo* associata a ogni spazio topologico X: è la categoria che garantisce che la teoria topologica dei gesti possa essere immersa nella teoria categoriale. Il suo insieme dei morfismi è $X \times X$, munito della topologia prodotto, mentre poniamo $d(x, y) = (x, x)$, $c(x, y) = (y, y)$, nuovamente con l'ovvia composizione dei morfismi. Salvo casi in cui si possa prestare a confusione, indicheremo la categoria grafo di X semplicemente con X. Chiaramente una categoria grafo è un gruppoide topologico. In particolare, la categoria simplesso ∇ è semplicemente la sottocategoria della categoria grafo I sulle coppie (x, y), con $x \leq y$.

Il passo successivo consiste nel ridefinire le curve in tali categorie topologiche generali. Nell'impianto topologico, una curva era una mappa continua $c : I \to X$ in uno spazio topologico X. Nel nostro caso dobbiamo invece considerare categorie topologiche $\mathcal{C}$ e mappe che preservano la fattorizzazione in tali categorie. Questo si ottiene definendo le curve come funtori continui $c : \nabla \to \mathcal{C}$ a valori in una categoria topologica $\mathcal{C}$. Nel caso della categoria grafo di uno spazio topologico, questo concetto coincide con quello topologico.

Di conseguenza, se si considerano curve in categorie di fattorizzazioni avremo che

$$\nabla @ [X, Y] = \coprod_{f \in X@Y} \nabla @ [f],$$

e se muniamo $[X, Y]$ della topologia del coprodotto, l'insieme dei funtori continui (che indicheremo con ©) sarà

$$\nabla © [X, Y] = \coprod_{f \in X@Y} \nabla © [f].$$

11 Ciò significa che $\mathcal{C}$ – vista come un insieme di frecce – è uno spazio topologico tale che la composizione di applicazioni e la mappa identità sono continue.

Per ottenere gesti in categorie topologiche abbiamo bisogno di imitare la costruzione del digrafo spaziale definito nel § 4.2. A tal fine consideriamo i due funtori continui coda e testa $t, h : \nabla © \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ cosí definiti: se $\nu : f \to g$ è una trasformazione naturale fra $f, g : \nabla \to \mathcal{C}$, allora $t(\nu) = \nu(0) : f(0) \to g(0)$ e $h(\nu) = \nu(1) : f(1) \to g(1)$. Le mappe coda e testa non sono quindi solo mappe insiemistiche, ma veri e propri funtori. Chiameremo questo diagramma di categorie topologiche e funtori continui il *digrafo categoriale di $\mathcal{C}$.* Se dimentichiamo la categoria e riteniamo semplicemente gli oggetti di questa configurazione lo chiameremo il *digrafo spaziale (soggiacente) di $\mathcal{C}$*. In particolare, se Γ è un digrafo, l'insieme dei morfismi $\Gamma @ \overrightarrow{\mathcal{C}}$ è l'insieme dei morfismi di digrafo verso il digrafo spaziale soggiacente di $\mathcal{C}$. In altre parole, un tale morfismo assegna un oggetto di $\mathcal{C}$ a ogni vertice di Γ e un funtore continuo $\nabla \to \mathcal{C}$ a ogni freccia di Γ, con domini e codomini compatibili.

Definizione 3. *Data una categoria topologica $\mathcal{C}$ e un digrafo Γ, chiameremo un* gesto con scheletro Γ e corpo in $\mathcal{C}$ *un morfismo di digrafi $g : \Gamma \to \overrightarrow{\mathcal{C}}$.*

Per esempio, se $\overrightarrow{f}$ è un morfismo in una categoria topologica $\mathcal{C}$, poniamo $\mathcal{G}[f] = \mathit{Digrafo} / [\overrightarrow{f}]$ per il topos dei digrafi relativi su $[\overrightarrow{f}]$, ovvero di gesti con corpo in $[f]$. Definiamo quindi

$$X \text{☞} Y = \coprod_{f \in X @ Y} \mathcal{G}[f].$$

Se $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ sono morfismi di $\mathcal{C}$, allora esiste un funtore canonico $\mathcal{G}[g] \times \mathcal{G}[f] \to \mathcal{G}[g \circ f]$, e quindi un funtore

$$\text{☞} : Y \text{☞} Z \times X \text{☞} Y \to X \text{☞} Z.$$

Questo funtore è associativo a meno di isomorfismo e definisce quindi la *bicategoria dei gesti su $\mathcal{C}$*, indicata con $\mathcal{C}^{\text{☞}}$. Con questa costruzione, la metà morfica del lemma di Yoneda consisterebbe nel caratterizzare i funtori ☞ che derivano da composizione di morfismi nella categoria originaria $\mathcal{C}$. Questo ci permetterebbe di pensare i morfismi come rappresentati da gesti e calcolare tutte le operazioni della categoria a livello dei gesti. Visto che la parte classica cosiddetta «oggettiva» del lemma di Yoneda tiene già conto della ricostruzione di insiemi di punti a partire da oggetti astratti via la transizione da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{C}^{@}$, questa ipotetica parte «morfica» del lemma di Yoneda ci restituisce la piena intuizione gestuale a livello di $(\mathcal{C}^{@})^{\text{☞}}$ partendo da categorie astratte[12].

[12] Dobbiamo aggiungere che una categoria generale non è automaticamente provvista di topologia, ma esistono molti modi di munire una categoria di una topologia. Il modo piú semplice consiste nel prendere un insieme di funtori $T \subset \nabla @ \mathcal{C}$ e considerare la topologia piú fine su $\mathcal{C}$ tale che tutti i funtori di T siano continui. Denotiamo con $\nabla ©_T \mathcal{C}$ l'insieme delle curve per questa topologia.

4.5. Una risposta alla domanda di Lewin.

Le prime applicazioni di questo approccio generale riguardano la categoria topologica associata al gruppo topologico $\mathcal{C} = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ degli isomorfismi affini su $\mathbb{R}^n$ [Mazzola 2009]. In questo caso, i gesti si riferiscono a diagrammi di curve continue in $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, e questi possono essere applicati al caso di uno spazio di parametri musicali isomorfo a $\mathbb{R}^n$. Utilizzando questo approccio per spazi di attacchi, altezze e durate, abbiamo discusso [*ibid.*] alcuni fenomeni gestuali nelle modulazioni tonali della sonata *Hammerklavier* op. 106 di Beethoven. Diamo un breve esempio (discusso in dettaglio *ibid.*) di gesto ritmico nella cosiddetta «modulazione catastrofica» da Mi$\flat$ maggiore a Re maggiore / Si minore nel movimento allegro dell'op. 106, alle battute 189-197. In questa modulazione tutte le orientazioni melodiche e tonali vengono meno e la «catastrofe» prende la forma di una lunga sequenza di accordi di settima diminuita con una evidente forza ritmica che si arresta alla conclusione (della modulazione) alla battuta 197. Questo ritmo deriva dalla fanfara. È proprio l'ipergesto di questa fanfara che vogliamo descrivere (figura 3).

In tale prospettiva vediamo lo spartito come uno spazio scenico per i gesti. Nella nostra «interpretazione danzante», questo definisce un iper-ipergesto nello spazio ritmico di attacchi e durate, che andiamo a descrivere (le coordinate degli eventi sono mostrate nella parte centrale della figura). La costruzione gestuale comincia con la prima curva ascendente e si deforma nella seconda curva ascendente. Il carattere ascendente significa che ci concentriamo su un rallentando, un'energia d'arresto. Questo gesto elementare (rappresentato dalla prima freccia) è deformato in una seconda apparizione (seconda freccia ascendente). La deformazione è mostrata sulla forma di un ipergesto ρ, in basso a sinistra nel sistema di coordinate rappresentato nell'ultima parte della figura 3. Tale interpretazione è non triviale da un punto di vista ontologico dato che essa crea una transizione continua dalla nota iniziale alla seconda che ha una durata maggiore, il che corrisponde a immaginare una curva intera di note intermedie che si succedono l'un l'altra in tempi di attacco e durate che sono infinitamente vicini. Questo arricchimento di fatto riempie lo spaziotempo vuoto che non è denotato nello spartito attraverso ciò che ha luogo nella nostra immaginazione musicale mentre la prima nota è percepita/suonata. L'ipergesto che lega la prima freccia gestuale alla seconda è nello stesso modo il legame fra questo primo passo ritmico e il secondo, ma concettualmente – e a un livello percettivo/interpretativo – a un grado piú elevato della coerenza immaginativa.

Il primo ipergesto, ρ, è seguito da un secondo ipergesto, σ, che deforma una freccia che lega due crome (note del valore di un ottavo) nella freccia tra due minime (note del valore di un quarto). Questa volta la deformazione delle frecce precedenti non è l'ipergesto che lega un movimento di arresto ripetuto, ma che esprime il movimento di arresto di una successione regolare di note della stessa durata. Non è la ripetizione di un movimento di arresto, ma l'arresto di un movimento ripetuto: i ruoli della ripetizione e dell'arresto sono invertiti. Per legare questi due ipergesti ρ e σ diamo una transizione caratteristica gestuale: essa utilizza un'operazione di specchio di tipo diagonale per passare da ρ a ρ″. Naturalmente questo richiede una complessificazione dello spazio bidimensionale reale, mostrata attraverso una simmetria diagonale per semplificare la visualizzazione. Dall'ipergesto intermedio ρ″ deformiamo scendendo verso σ. Otteniamo in questo modo un ipergesto di scheletro • → • → • che genera σ a partire da ρ attraverso ρ″.

La presentazione iterata della prima parte ρ della fanfara nella «modulazione catastrofica» perpetua l'arresto ripetuto che è già intrinsecamente prototipico ed esprime cosí, in uno sviluppo dell'«idea quintessenziale», l'incapacità di rilassare la tensione e di modulare in modo ben strutturato. La riduzione finale della freccia iniziale dell'ipergesto ρ nel ritardando delle battute 199-200 completa questa incapacità, ed esaurisce le energie in un dissolversi del gesto.

Dalle ricerche che abbiamo esposto traiamo la conclusione che simili gesti sono candidati a rappresentare quel «gesto caratteristico» evocato nella precedente citazione di Lewin. L'essere «caratteristico» è legato alla selezione di gesti di trasformazioni affini necessarie per descrivere il legame fra due collezioni di note quali accordi, motivi, e via dicendo. Nella nostra discussione abbiamo arricchito il linguaggio formulare che descrive le modulazioni tonali attraverso una ricca esposizione di gesti che decodificano queste formule e rendono evidente il gioco teatrale della musica o della danza che è assegnato nel processo dello spartito musicale.

ADORNO, TH. W.

1956 *Fragment über Musik und Sprache*, Jahresring, Stuttgart.

2001 *Zu einer Theorie der musikalischen Reproduktion*, Suhrkamp, Frankfurt am Main.

CHÂTELET, G.

1993 *Les enjeux du mobile*, Seuil, Paris [trad. it. *Le poste in gioco del mobile*, Mimesis, Milano-Udine 2010].

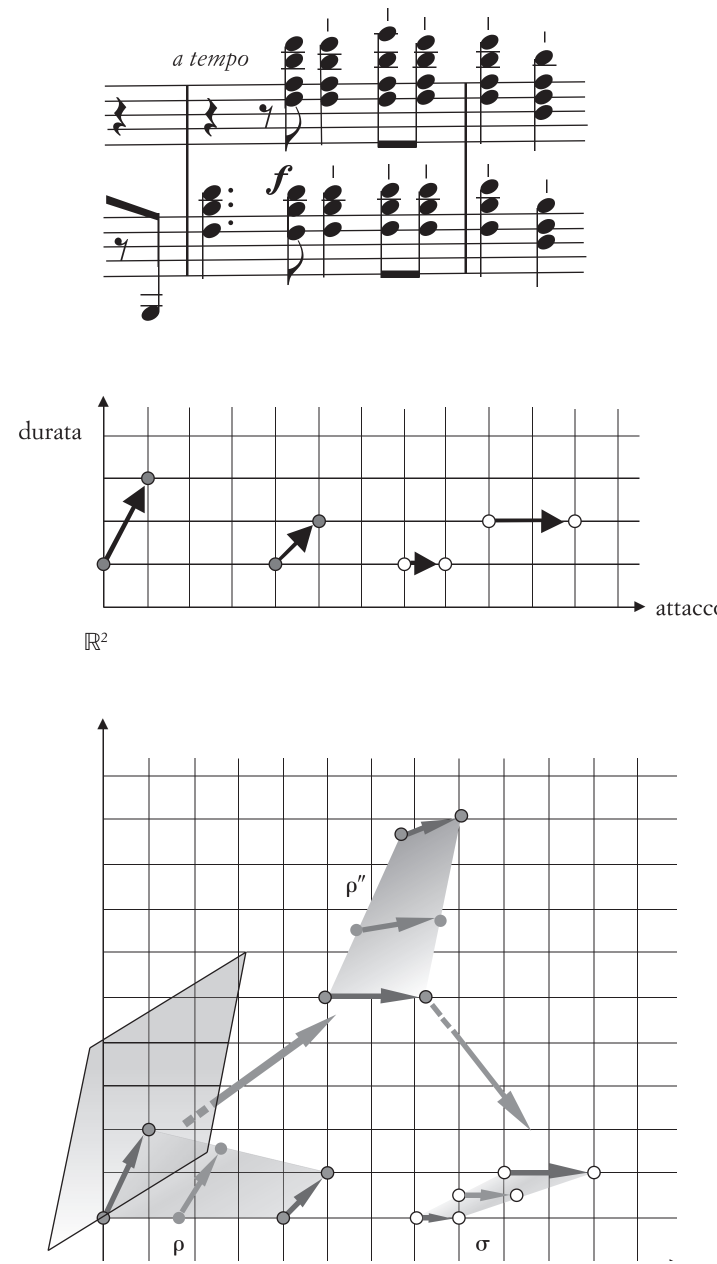


Figura 3.

La fanfara nell'op. 106 ha una forte forma ipergestuale. Nella figura centrale, che rappresenta la fanfara, mostriamo gli eventi nel piano temporale dato dagli attacchi e durate. Nella figura in basso visualizziamo l'ipergesto coinvolto in questa costruzione.

CHERLIN, M.
1998 *Memory and rhetorical trope in Schoenberg's string trio*, in «Journal of the American Musicological Society», 51(3), pp. 559-602.

COHN, R.
1998 *Introduction to Neo-Riemannian theory: a survey and a historical perspective*, in «Journal of Music Theory», 42(2), pp. 167-80.

DAHLHAUS, C.
1966 *Über den Begriff der tonalen Funktion*, in M. VOGEL (a cura di), *Beiträge zur Musiktheorie des 19. Jahrhunderts*, Bosse, Regensburg.

DE LA MOTTE-HABER, H.
1982 *Musikalische Hermeneutik und empirische Forschung*, in C. DAHLHAUS e H. DE LA MOTTE-HABER (a cura di), *Neues Handbuch der Musikwissenschaft*, vol. X. *Systematische Musikwissenschaft*, Laaber-Verlag, Laaber.

GABRIEL, P. e ROITER, A. V.
1992 *Representations of Finite-Dimensional Algebras*, vol. 73 di A. I. KOSTRIKIN e I. R. SHAFAREVICH (a cura di), *Encyclopaedia of Mathematical Science*, Springer-Verlag, Berlin.

GRAESER, W.
1924 *Bachs «Kunst der Fuge»*, in «Bach-Jahrbuch», pp. 1-104.
1927 *Der Körpersinn*, Beck, München.

GROTHENDIECK, A.
1985 *Récoltes et semailles*, terza parte, Université des Sciences et Techniques du Languedoc, Montpellier.

HANSLICK, E.
1854 *Vom Musikalisch-Schönen*, Breitkopf und Härtel, Wiesbaden [trad. it. *Il Bello musicale: saggio di riforma dell'estetica musicale*, a cura di L. Distaso, Aesthetica, Palermo 2001].

HATTEN, R.
2004 *Interpreting Musical Gestures, Topics, and Tropes*, Indiana University Press, Bloomington.

LAGES, L. E.
2003 *Fundamental Groups and Covering Spaces*, Peters, Natick.

LEWIN, D.
1987 *Generalized Musical Intervals and Transformations*, Yale University Press, New Haven.
1990 *Klumpenhouwer networks and some isographies that involve them*, in «Music Theory Spectrum», 12(1), pp. 83-120.

LEYTON, M.
2001 *A Generative Theory of Shape*, Springer, Heidelberg.

LONGO, G.
2003 *Introduction*, in ID. (a cura di), *Géométrie et cognition*, «Revue de Synthèse», 124.

MAC LANE, S. e MOERDIJK, I.
1994 *Sheaves in Geometry and Logic*, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York.

MAZZOLA, G.
1985 *Gruppen und Kategorien in der Musik*, Heldermann, Berlin.
1990 *Geometrie der Töne*, Birkhäuser, Basel.
2004 *Local and Global Limit Denotators and the Classification of Global Compositions*, in H. FRIPERTINGER e L. REICH (a cura di), *Colloquium on Mathematical Music Theory*, «Grazer Mathematische Berichte», 347, pp. 1-9.
2007 *La vérité du beau dans la musique*, Ircam-Delatour, Paris.
2009 *Categorical gestures, the diamond conjecture, Lewin's question, and the Hammerklavier sonata*, in «Journal of Mathematics and Music», 3(1), pp. 31-58.

MAZZOLA, G. e ANDREATTA, M.
2006 *From a categorical point of view: K-nets as limit denotators*, in «Perspectives of New Music», 44(2), pp. 88-113.
2007 *Diagrams, gestures and formulae in music*, in «Journal of Mathematics and Music», 1(1), pp. 23-46.

MAZZOLA, G. e CHERLIN, P. B.
2009 *Flow, Gesture, and Spaces in Free Jazz. Towards a Theory of Collaboration*, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York.

MAZZOLA, G. et al.
2002 *The Topos of Music. Geometric Logic of Concepts, Theory, and Performance*, Birkhäuser, Basel.
2009 *Topos Theory for a Creative Analysis of Boulez's Structures*, in S. NAIMPALLY e G. DI MAIO (a cura di), *Theory and Applications of Proximity, Nearness and Uniformity*, «Quaderni di Matematica», 23.

MILMEISTER, G.
2009 *The Rubato Composer Musicsoftware*, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York.

NOLL, TH.
1995 *Morphologische Grundlagen der abendländischen Harmonik*, tesi di dottorato, Berlin.

PENROSE, R.
2004 *The Road to Reality. A Complete Guide to the Laws of the Universe*, Jonathan Cape, London [trad. it. *La strada che porta alla realtà*, Rizzoli, Milano 2004].

SCHMITT, J.-C.
1990 *La raison des gestes dans l'occident médiéval*, Gallimard, Paris [trad. it. *Il gesto nel Medioevo*, Laterza, Roma-Bari 1990].

SCHÖNBERG, A.
1966 *Harmonielehre* (1911), Universal Edition, Wien [trad. it. *Manuale di armonia*, a cura di L. Rognoni, Il Saggiatore, Milano 1963].

SPANIER, E.
1966 *Algebraic Topology*, McGraw Hill, New York.

WIELAND, R. e UHDE, J.
2002 *Forschendes Üben*, Bärenreiter, Kassel.

ZURLINDEN, H.
1935 *Wolfgang Graeser*, Beck, München.