

DOCUMENT CONFIDENTIEL



STAGE DE MASTER 1 A L'INSTITUT DE RECHERCHE ET DE
COORDINATION ACOUSTIQUE / MUSIQUE

SIMULATION DE PROPAGATION D'ONDES

**dans les Tubes Evasés avec Pertes Visco-Thermiques
pour la Synthèse Sonore en Temps-Réel**



Etudiant :
Responsable de stage :
Année :

MIGNOT Rémi
HELIE Thomas
2005

Table des matières

Table des matières	4
Liste des tableaux	5
Table des figures	9
Introduction	11
1 Modèle de résonateurs et outils de représentation	15
1.1 Embouchure	16
1.2 Rayonnement	17
1.3 Tubes acoustiques	17
1.3.1 Equation aux dérivées partielles	17
1.3.2 Etat acoustique	18
1.3.3 Matrice de transfert pour un tronçon de tube	19
1.3.4 Décomposition des fonctions de transfert	19
2 Représentations diffusives et approximation	21
2.1 Analyse dans le plan complexe	22
2.1.1 Notions d'analyse complexe	22
2.1.2 Analyse des singularités	23
2.2 Présentation des représentations diffusives	24
2.2.1 Représentations diffusives	24
2.2.2 Extension par dérivation	24
2.2.3 Extension aux représentations diffusives du second ordre	25
2.3 Approximations	25
2.3.1 Approximation à partir de la transformée de Laplace	25
2.3.2 Mise en forme du système discret	28
3 Description de l'instrument modélisé : Trompette naturelle	37
3.1 Géométrie de l'instrument	38
3.2 Détail de la structure	39
3.2.1 Quadripôle de conversion en entrée de l'embouchure	40
3.2.2 Quadripôle de l'embouchure	40
3.2.3 Quadripôles de conversion du résonateur	41
3.2.4 Quadripôles de transfert du tube	42

3.2.5	Quadripôle du rayonnement	42
3.3	Calcul de l'impédance de l'instrument complet	43
3.3.1	Méthode de calcul	43
3.3.2	Analyse et comparaison des résultats	44
3.4	Ecriture d'une structure adaptée à la simulation temporelle	49
3.4.1	Présentation du problème de simulation	49
3.4.2	Détails des quadripôles de la structure simulable	52
3.4.3	Vérification de la nouvelle structure par calcul d'impédance	55
4	Approximation et réalisation du modèle approché	57
4.1	Représentations diffusives de notre modèle	58
4.2	Approximation des représentations diffusives	59
4.3	Mise en forme des systèmes discrets	64
4.4	Réalisation numérique et simulation temporelle	67
	Conclusion	69
	A Diagrammes de Bode des Fonctions simulables	73
	B Symboles Mathématiques et Constantes Physiques	76
	C Code Matlab de l'Optimisation	77
	Bibliographie	81

Liste des tableaux

3.1	Paramètres de l'instrument modélisé	47
3.2	Paramètres des embouchures de la figure (3.16)	47
3.3	Paramètres des résonateurs de la figure (3.17)	49
B.1	Tableau des symboles mathématiques	76
B.2	Tableau des constantes physiques	76

Table des figures

1.1	Embouchure de trompette	16
1.2	Modélisation de l'embouchure	16
1.3	Impédance normalisée de rayonnement pour un pavillon de 50 degrés d'ouverture et de 10cm de rayon	17
1.4	Représentation du quadripôle	19
1.5	Fonction $T(s)$ sous forme d'un système bouclé.	20
1.6	Fonction $R(s)$ sous forme d'un système bouclé.	20
2.1	Phase de $\Gamma(s)$ dans le plan complexe	23
2.2	Module et Phase de F exacte dans le domaine de Fourier, et de son approximation	29
2.3	Module et Phase de F : exacte, approximation en temps continu et en temps discret par un bloqueur d'ordre zéro	30
2.4	Influence du repliement spectral	31
2.5	Module et Phase de F : exacte, approximation en temps continu et en temps discret par un BoZ et un TriZ	34
3.1	Trompette droite	38
3.2	Clairon basse	38
3.3	Géométrie de l'instrument	39
3.4	Profil caténoïdal du pavillon	39
3.5	Structure originale de l'instrument	40
3.6	Quadripôle de conversion en entrée de l'embouchure	40
3.7	Circuit acoustique de l'embouchure	41
3.8	Quadripôle de l'embouchure	41
3.9	Quadripôles de conversion du tube	42
3.10	Quadripôles de transfert du résonateur	42
3.11	Quadripôle de rayonnement	43
3.12	Regroupement de deux quadripôles	44
3.13	Impédance acoustique d'entrée d'une trompette mesurée par Lurton	45
3.14	Impédance théorique de notre modèle	45
3.15	Phase de l'impédance, modules des fonctions de réflexion et de transmission	46
3.16	Impédances acoustiques	48
3.17	Impédances acoustiques pour différents résonateurs	48
3.18	Inharmonicité des modes	49
3.19	Boucle sans retard au branchement de deux quadripôles	50
3.20	Débouclage à la jonction de deux quadripôles de transfert	50

3.21	Débouclage du tube	51
3.22	Définition des quadripôles de conversion du système débouclé : \mathbf{C}_i et \mathbf{C}_o	51
3.23	Structure adaptée à la simulation temporelle, sans boucle instantanée infinie	51
3.24	Détails du quadripôle simulable \mathbf{J}	53
3.25	Fusion de deux quadripôles	53
3.26	Détails du quadripôle simulable \mathbf{B}	55
3.27	Détails du quadripôle simulable \mathbf{Ray}	56
3.28	Comparaison des impédances calculées par l'ancienne et par la nouvelle structure	56
4.1	Affichage de $K_2(s)$ dans le demi-plan supérieur gauche de Laplace en échelle logarithmique	61
4.2	Diagramme de Bode de la fonction $K_2(s)$, exacte et approchée	61
4.3	Affichage de $M_{b11}(s)$ dans le demi-plan supérieur gauche de Laplace en échelle logarithmique	62
4.4	Diagramme de Bode de la fonction $M_{b11}(s)$, exacte et approchée	62
4.5	Impédance exacte et approchée de l'instrument	63
4.6	Fonctions de transfert de réflexion et de transmission de l'instrument, exactes et approchées	63
4.7	Diagramme de Bode de la fonction $K_2(s)$, exacte et approchée en continu et en discret	64
4.8	Diagramme de Bode de la fonction $M_{b11}(s)$, exacte et approchée en continu et en discret	64
4.9	Impédance exacte et approchée (en continu et en discret) de l'instrument	65
4.10	Fonctions de transfert de réflexion et de transmission de l'instrument, exactes et approchées en continu et en discret	65
4.11	Problème en basse fréquence de la fonction de réflexion approchée	66
4.12	Phase de la fonction de réflexion en basse fréquence.	66
4.13	Système simulé équivalent	67
4.14	Réponses impulsionnelles de la réflexion et de la transmission de l'instrument	68
4.15	Réponses fréquentielles de la réflexion et de la transmission de l'instrument, par simulation temporelle et exacte	68
A.1	Diagramme de Bode de $K_b(s)$	73
A.2	Diagramme de Bode de $M_{b11}(s)$	73
A.3	Diagramme de Bode de $N_{b11}(s)$	73
A.4	Diagramme de Bode de $M_{b21}(s)$	73
A.5	Diagramme de Bode de $N_{b21}(s)$	73
A.6	Diagramme de Bode de $N_{b12}(s)$	73
A.7	Diagramme de Bode de $N_{b22}(s)$	74
A.8	Diagramme de Bode de $K_S(s)$	74
A.9	Diagramme de Bode de $K_{TS}(s)$	74
A.10	Diagramme de Bode de $K_{RS}(s)$	74
A.11	Diagramme de Bode de $F^+(s)$	74
A.12	Diagramme de Bode de $F^-(s)$	74
A.13	Diagramme de Bode de $K'_\Delta(s)$	74
A.14	Diagramme de Bode de $K''_\Delta(s)$	74

A.15 Diagramme de Bode de $K_{\Delta}'''(s)$	74
A.16 Diagramme de Bode de $K_1(s)$	74
A.17 Diagramme de Bode de $K_2(s)$	74
A.18 Diagramme de Bode de $M_{R1}(s)$	74
A.19 Diagramme de Bode de $M_{R2}(s)$	75
A.20 Diagramme de Bode de $N_{R1}(s)$	75
A.21 Diagramme de Bode de $N_{R2}(s)$	75

Introduction

Synthèse sonore et modélisation physique

Depuis leur création, les équipes de l'IRCAM, Analyse-Synthèse et Acoustique-Instrumentale, tentent de proposer aux musiciens des outils de synthèse sonore leur permettant de créer des sons naturels ou inouïs. Les techniques utilisées par l'ensemble des experts en synthèse sonore présentent chacune avantages et inconvénients :

- L'échantillonnage consiste à enregistrer les notes d'un instrument une à une et à les reproduire en temps voulu. La qualité sonore est très bonne au dépend d'un manque de contrôle sur la synthèse du son et donc d'une reproduction convaincante de l'expression du musicien. Même si cette technique est utilisée par certains synthétiseurs, elle n'est pas à proprement parlé une synthèse.
- La synthèse par modèles mathématiques abstraits, tels que la synthèse soustractive ou la synthèse par modulation de fréquence, permet un contrôle plus fin des paramètres de synthèse mais fournit des sons "électroniques", dont le manque de naturel est reconnaissable. Cependant elles ont connus un grand succès concrétisé par les synthétiseurs *Moog*, pour la synthèse soustractive dans les années 70, et par les synthétiseurs *DX-7* pour la synthèse FM dans les années 80.
- La synthèse par modèles physiques consiste à modéliser l'instrument mathématiquement puis numériquement, à l'aide d'une étude théorique la plus complète possible du phénomène physique de sa production sonore.

Le dernier type de synthèse permet la réalisation d'outils informatiques de *lutherie virtuelle* pouvant conduire à une synthèse "physiquement censée" d'instruments inexistant. Elle peut alors servir aux luthiers à "prédire" numériquement les résultats produits par une modification de la fabrication de l'instrument. La réalisation numérique permet ainsi un gain de temps et d'argent comparé à la réalisation "matérielle", dans la recherche d'instruments plus performants. Dans le cadre de l'IRCAM, ce type de synthèse est utilisé par le logiciel *Modalys* qui permet aux compositeurs de fabriquer pour leurs pièces des instruments *imaginaires*.

Sujet du stage

Le but de ce stage consiste à modéliser la propagation d'ondes acoustiques dans les tubes évasés, afin de réaliser une synthèse d'instruments de cuivre en temps-réel.

Les techniques déjà existantes de synthèse d'instruments à vent par modèles physiques utilisent pour la plupart une modélisation du tube acoustique par une concaténation de tubes cylindriques ou coniques, les ondes s'y propageant sont alors considérées comme planes ou sphériques respectivement. En faisant tendre la longueur des tubes élémentaires vers une valeur infinitésimale, nous pouvons obtenir une caractérisation des ondes par l'équation de *Webster*.

Le modèle développé lors du stage a l'avantage, par rapport à ces prédécesseurs, de ne pas imposer la forme des isobares dans le tube. De plus, comme l'intitulé du stage l'indique, ce modèle prend en compte les pertes *visco-thermiques* dues à la paroi du tube. Ces pertes ne sont pas négligeables parce que l'oreille humaine est très sensible aux modifications qu'elles

produisent dans le son émis.

Les principaux problèmes du travail à effectuer concernent le passage de la représentation théorique du modèle à une représentation simulable par méthode numérique. Notamment une partie de la tâche consiste à séparer dans les fonctions de transfert, représentant la propagation de l'onde acoustique dans le tube, les retards purs des opérateurs de dispersion, dont il faut être en mesure d'approximer par des opérateurs linéaires de dimension finie, causaux et stables, simulables numériquement.

Plan du document

Le document est organisé comme suit :

La première partie présente l'étude théorique qui a constitué le point de départ du stage. Nous présenterons la modélisation théorique des différents éléments constituant un instrument de type cuivre (trompette ou trombone par exemple) : embouchure, tube droit, pavillon et rayonnement de l'instrument en sortie du pavillon.

Dans une deuxième partie seront présentés les outils mathématiques qui nous permettront de modéliser et d'approximer les fonctions de transfert. Nous présenterons les *représentations diffusives*, puis leur approximation par une optimisation des moindres carrés et enfin la numérisation pour la construction des filtres numériques.

La troisième partie consiste en l'étude de la structure modélisant l'instrument que nous souhaiterons simuler, qui est une trompette naturelle. Après avoir détaillé les différents quadripôles représentant les relations d'entrée-sortie des éléments de l'instrument, nous verrons pourquoi il est nécessaire de modifier cette structure pour la rendre simulable. Enfin nous détaillerons la structure simulable numériquement. Tout au long de cette partie nous ferons des calculs d'impédance de l'instrument et des fonctions de transfert de réflexion et de transmission afin de valider le modèle à chaque étape du développement par comparaison aux fonctions exactes.

La dernière partie concerne la réalisation des approximations de chaque fonction de transfert à simuler et l'étude des résultats obtenus dans le domaine fréquentiel et temporel à partir des signaux issus de notre simulation réalisée en temps-réel .

Chapitre 1

Modèle de résonateurs et outils de représentation

Le travail du stage s'est concentré sur la modélisation de la propagation d'onde dans les tubes, mais dans le but de modéliser un instrument complet, il a été nécessaire d'étudier des modèles d'embouchure et de rayonnement simples. Ce chapitre présente les modèles d'embouchure et de rayonnement retenus, puis nous détaillerons le modèle théorique du tube.

1.1 Embouchure

L'embouchure d'un instrument de cuivre est la partie où le musicien applique ces lèvres. Elle se compose d'une cavité (appelé cuvette), modélisée par une compliance acoustique et d'un tube (appelé queue) de forme conique modélisé par une masse acoustique et une résistance en série. Cette modélisation (cf. [FR91]) est valable en basse fréquence et est une bonne approximation pour notre utilisation.



FIG. 1.1 – Embouchure de trompette

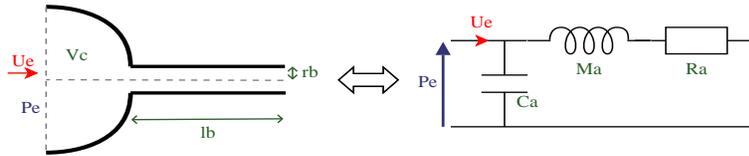


FIG. 1.2 – Modélisation de l'embouchure

En considérant que le tube est cylindrique, les valeurs s'obtiennent par les formules suivantes :

$$C_a = \frac{V_c}{\rho c_0^2}, \quad M_a = \frac{\rho l_c}{S_c}, \quad R_a = \frac{8\mu l}{\pi r_b^4}, \quad (1.1)$$

où ρ est la masse volumique de l'air, c_0 la célérité du son, μ le coefficient de viscosité de cisaillement, V_c le volume de la cuvette, l_b la longueur équivalente de la queue, r_b son rayon et S_b sa section. On notera P la pression acoustique, V la vitesse et U le débit.

Si l'embouchure est connectée au résonateur d'impédance acoustique Z_r , alors l'impédance acoustique en entrée de l'instrument est :

$$Z_a = \frac{P_e(\omega)}{U_e(\omega)} = \frac{R_a + Z_r + j\omega M_a}{1 - \omega^2 M_a C_a + j\omega C_a (R_a + Z_r)}. \quad (1.2)$$

L'embouchure agit sur l'impédance totale de l'instrument en donnant à sa réponse fréquentielle son enveloppe globale, avec notamment une résonance située entre 500 et 1000Hz, selon l'instrument.

1.2 Rayonnement

A l'extrémité du pavillon l'onde acoustique subit une réflexion et une transmission vers l'extérieur. Pour simuler ce phénomène, nous avons besoin de connaître l'impédance spécifique de rayonnement $Z_{ray} = P_{out}/V_{out}$ (pression sur vitesse). Nous avons retenu ici un modèle approchant le rayonnement à celui d'une sphère pulsante décrit dans [Hél02, page 124]. On réalise une approximation de l'impédance du rayonnement, obtenue analytiquement, par un système linéaire. Une première approximation utilise un système différentiel passe-haut du second ordre, ce qui constitue une bonne approximation pour des pavillons d'ouverture large tel que ceux des trompettes ou des trombones. Mais pour des pavillons de faible ouverture, type clarinette ou haut-bois, le modèle peut s'étendre en incluant un retard, reproduisant les ondulations de la réponse fréquentielle (cf. [Hél02, page 138]).

Dans notre cas, le premier modèle suffit à modéliser le rayonnement d'un instrument de cuivre. L'expression de l'impédance de rayonnement est alors de la forme :

$$Z_{ray}(\omega) = Z_c \frac{\alpha i \frac{\omega}{\omega_c} - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}{1 + 2i\varepsilon \frac{\omega}{\omega_c} - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}, \quad (1.3)$$

où $Z_c = \rho c_0$ est l'impédance caractéristique, α , ω_c et ε sont trois constantes déterminées par optimisation dans le domaine de Fourier (ω représente la pulsation). Le critère à optimiser est l'erreur quadratique moyenne entre la réponse de l'impédance analytique et son modèle.

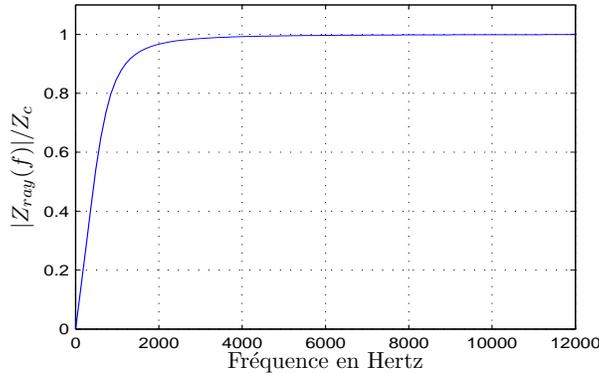


FIG. 1.3 – Impédance normalisée de rayonnement pour un pavillon de 50 degrés d'ouverture et de 10cm de rayon

1.3 Tubes acoustiques

1.3.1 Equation aux dérivées partielles

Le point de départ de l'étude théorique du stage est l'équation aux dérivées partielles caractérisant la propagation d'onde dans un tube courbe à symétrie de révolution. Cette équation, baptisée "*Equation de Webster-Lokshin*", [HHM03], est la suivante :

$$\left[\left(\frac{1}{c_0^2} \partial_t^2 + \frac{2\varepsilon(l)}{c_0^{\frac{3}{2}}} \partial_t^{\frac{3}{2}} + \Upsilon(l) \right) - \partial_l^2 \right] [r(l)p(l, t)] = 0, \quad (1.4)$$

où c_0 est la célérité du son, $\varepsilon(l) = \kappa_0 \frac{\sqrt{1-r'(l)^2}}{r(l)}$ quantifie les pertes visco-thermiques, $r(l)$ est le rayon du tube en fonction de l'abscisse curviligne sur sa paroi, $\Upsilon(l) = r''(l)/r(l)$ est la courbure du tube et $p(l, t)$ la pression acoustique sur la paroi à l'abscisse l .

Les motivations qui ont conduit Thomas Hélie à ce résultat, ont été d'obtenir une équation ne dépendant que d'une variable de l'espace. Ainsi, au prix d'une hypothèse de quasi-sphéricité des isobares à la paroi du tube, il a pu caractériser l'onde par un modèle mono-dimensionnel. Remarquons que l'hypothèse n'impose pas la forme des isobares à l'intérieur du tube, ce qui permet d'obtenir par ce modèle des ondes non-sphériques.

La dérivée fractionnaire du temps, $\partial_t^{\frac{3}{2}}$, vient de l'impédance spécifique à la paroi, donnée par [Bru98, page 112-115], qui prend compte des pertes visco-thermiques à la paroi.

1.3.2 Etat acoustique

En travaillant avec un formalisme impédance (ou admittance spécifique) il est judicieux d'utiliser la pression acoustique et la vitesse comme grandeurs. Mais puisque nous travaillons sur des propagations, dans le but d'obtenir des relations d'entrée-sortie causales, il est alors plus intéressant de décomposer le phénomène en ondes progressives. Pour cela, dans [TD06], un état acoustique est proposé pour des courbures positives ou nulles :

$$\psi^\pm(l, t) = \frac{r(l)}{2} [p(l, t) \pm \rho c_0 v(l, t)] \mp \frac{r'(l)}{2} c_0 \partial_t^{-1} p(l, t), \quad (1.5)$$

$$\Psi(l, t) = r(l)p(l, t) = \psi^+(l, t) + \psi^-(l, t). \quad (1.6)$$

Cet état acoustique définit les ondes progressives ψ^+ et ψ^- qui étendent les ondes aller-retour, découplées, obtenues pour des tubes droits ou coniques sans pertes visco-thermiques ($\varepsilon = 0$, $\Upsilon = 0$). En utilisant l'équation de la conservation des moments, $\rho \partial_t v + \partial_l p = 0$, et l'équation aux dérivées partielles (1.4), on obtient l'équation gouvernant ψ^+ et ψ^- :

$$[\partial_t \pm c_0 \partial_l] \psi^\pm(l, t) = - \left[\varepsilon(l) \sqrt{c_0} \partial_t^{\frac{1}{2}} + \frac{\Upsilon(l) c_0^2}{2} \partial_t^{-1} \right] (\psi^+(l, t) + \psi^-(l, t)). \quad (1.7)$$

Les opérateurs de transport $\partial_t \pm c_0 \partial_l$ font apparaître ψ^+ et ψ^- comme des ondes progressives, aller et retour respectivement. La partie droite de l'équation (1.7) montre le couplage existant entre ces ondes en raison des pertes visco-thermiques et de la courbure du tube.

Pour pouvoir connecter un tube sur une impédance, par exemple le rayonnement, il est nécessaire de pouvoir convertir l'état (ψ^+, ψ^-) en état (P, V) . Pour cela on déduit de l'équation (1.5) la matrice de conversion, dans le domaine de Laplace :

$$\begin{bmatrix} P(l, s) \\ V(l, s) \end{bmatrix} = \frac{1}{r(l)} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{s+\zeta_l c_0}{s \rho c_0} & \frac{-s+\zeta_l c_0}{s \rho c_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi^+(l, s) \\ \psi^-(l, s) \end{bmatrix}, \quad (1.8)$$

où $\zeta_l = c_0 \frac{r'(l)}{r(l)}$.

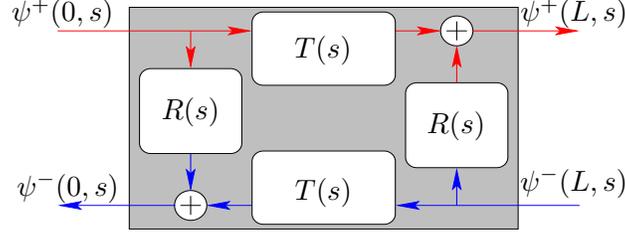


FIG. 1.4 – Représentation du quadripôle

1.3.3 Matrice de transfert pour un tronçon de tube

Pour résoudre analytiquement l'équation Webster-Lokshin (1.4), il est nécessaire de découper le tube en tronçons sur lesquels les paramètres physiques, la courbure Υ et le coefficient des pertes visco-thermiques ε , sont constants. Dans ce cas la propagation d'onde dans un tronçon de longueur L peut se mettre sous forme d'une relation entrée-sortie sur l'état (ψ^+, ψ^-) , [TD06] :

$$\begin{bmatrix} \psi^+(L, s) \\ \psi^-(0, s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T(s) & R(s) \\ R(s) & T(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi^+(0, s) \\ \psi^-(L, s) \end{bmatrix}, \quad (1.9)$$

Les fonctions de transfert $R(s)$ et $T(s)$ s'interprètent respectivement comme les fonctions de réflexion des ondes aux extrémités du tronçon et de transmission à travers le tronçon. Remarquons que la matrice de transfert est symétrique, ceci est dû à l'état choisi, ce n'aurait pas été le cas avec un autre état, (P, V) par exemple.

Dans [TD06] l'expression analytique de ces fonctions de transfert sont données :

$$T(s) = \frac{1}{\cosh(\Gamma(s)L) + \frac{1}{2} \left(\frac{s}{c_0\Gamma(s)} + \frac{c_0\Gamma(s)}{s} \right) \sinh(\Gamma(s)L)}, \quad (1.10)$$

$$R(s) = \frac{1}{2} \left(\frac{s}{c_0\Gamma(s)} - \frac{c_0\Gamma(s)}{s} \right) \sinh(\Gamma(s)L) T(s), \quad (1.11)$$

où $\Gamma(s)$ est une racine carrée de s :

$$\Gamma(s)^2 = \left(\frac{s}{c_0} \right)^2 + 2\varepsilon \left(\frac{s}{c_0} \right)^{\frac{3}{2}} + \Upsilon. \quad (1.12)$$

Remarquons que les fonctions $T(s)$ et $R(s)$ sont invariantes au changement de fonctions $\Gamma(s) \mapsto -\Gamma(s)$, donc au choix de la racine.

1.3.4 Décomposition des fonctions de transfert

Dans le but de simuler en temps réel la propagation des ondes dans un tube, il est utile d'exhiber le retard que contiennent les fonctions T et R , et de les exprimer sous forme de systèmes bouclés retardés. Nous sommes alors amenés à décomposer ces fonctions en sous-fonctions élémentaires qui impliquent directement $\Gamma(s)$ et non plus $\Gamma(s)^2$. Ceci nécessite de

définir rigoureusement $s \mapsto \Gamma(s)$ dans le demi-plan droit, domaine de convergence de Laplace (cf. chapitre (2.2.1)). Pour construire la décomposition, on remarque que le développement asymptotique de $\Gamma(s)$ quand $|s| \rightarrow \infty$ est $s/c_0 + \varepsilon\sqrt{s/c_0} + O(1)$. On peut alors exhiber le retard en écrivant pour $\tau = L/c_0$ que : $e^{-\Gamma(s)L} = e^{-(\Gamma(s)-s/c_0)L} e^{-\tau s}$.

On pose :

$$D(s) = e^{-(\Gamma(s)-s/c_0)L}, \quad (1.13)$$

$$E(s) = \frac{c_0\Gamma(s) - s}{c_0\Gamma(s) + s}. \quad (1.14)$$

La fonction D est alors une fonction non retardée. On montre que $T(s)$ et $R(s)$ se mettent sous la forme de systèmes bouclés :

$$T(s) = \frac{(1 - E(s)^2) D(s)}{1 - E(s)^2 D(s)^2 e^{-2\tau s}} e^{-\tau s}, \quad (1.15)$$

$$R(s) = \frac{-E(s) + E(s)D(s)^2 e^{-2\tau s}}{1 - E(s)^2 D(s)^2 e^{-2\tau s}}. \quad (1.16)$$

On définit alors N_t , N_R , M_R , K et \tilde{T} , tel que :

$$T(s) = \tilde{T}(s) e^{-\tau s} = \frac{N_T(s)}{1 - K(s) e^{-2\tau s}} e^{-\tau s}, \quad (1.17)$$

$$R(s) = \frac{M_R(s) + N_R(s) e^{-2\tau s}}{1 - K(s) e^{-2\tau s}}. \quad (1.18)$$

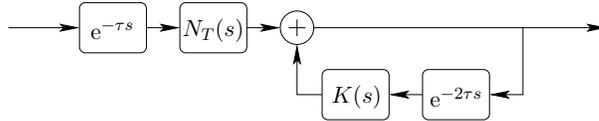


FIG. 1.5 – Fonction $T(s)$ sous forme d'un système bouclé.

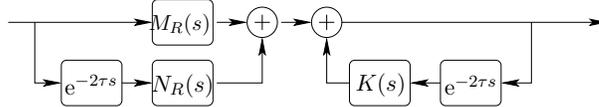


FIG. 1.6 – Fonction $R(s)$ sous forme d'un système bouclé.

On remarque que, τ étant égal au temps de propagation au travers du tronçon de longueur L , le retard $e^{-\tau s}$ de T exprime le retard dû à la propagation direct à travers le tronçon. Le dénominateur de $R(s)$ et de $T(s)$ fait apparaître un retard 2τ (temps d'un aller-retour) à l'origine de modes internes au tronçon.

Chapitre 2

Représentations diffusives et approximation

Les formules (1.11) et (1.10) des fonctions de réflexion et de transmission des tronçons font intervenir l'opérateur Γ dans le domaine de Laplace tel que :

$$\Gamma(s)^2 = \left(\frac{s}{c_0}\right)^2 + 2\varepsilon \left(\frac{s}{c_0}\right)^{\frac{3}{2}} + \Upsilon. \quad (2.1)$$

Comme nous le verrons dans une première partie, l'apparition de la racine carrée dans le plan complexe pose des problèmes de définition univoque de la fonction, il est donc nécessaire de voir quelques notions d'analyse dans le plan complexe et leur conséquence dans notre cas. Dans une seconde partie, nous présenterons la notion de représentation diffusive et son utilité. Enfin nous verrons comment réaliser et approximer de telles représentations afin de rendre leur simulation numérique réalisable.

2.1 Analyse dans le plan complexe

2.1.1 Notions d'analyse complexe

La plupart des fonctions complexes sont définies en prolongeant les propriétés qu'elles ont dans \mathbb{R} . Par exemple la fonction carrée $f(x) = x^2$ est une fonction au sens habituel et son prolongement dans \mathbb{C} est immédiat. Mais il en est autrement de sa fonction inverse $g(x) = \sqrt{x}$. A une valeur y de la fonction $f(x)$, correspondent deux antécédents $g(y) = \sqrt{y}$ et $g(y) = -\sqrt{y}$. Autrement dit la racine carrée possède deux *branches* (ou *déterminations*) et on doit en choisir une pour définir une application. En utilisant la représentation polaire d'un nombre complexe $z = \rho e^{i\theta}$, une définition *naturelle* de sa racine est :

$$\sqrt{z} = \sqrt{\rho} e^{i\frac{\theta}{2}}.$$

Mais alors que le changement $\theta \mapsto \theta + 2\pi$ laisse z invariant il change le signe de sa racine. Ainsi on dit que la racine carrée est *bivalente* contrairement à une vraie application qui est *univalente* (ou *univoque*). Lorsque l'on fait varier θ de 0 à 2π , nous faisons un tour autour de l'origine, et l'argument de sa racine augmente de π , d'où un changement de signe. Ainsi, en tournant une fois autour de l'origine nous passons d'une détermination à une autre. Pour définir la racine carrée de façon univoque, il faut s'interdire de tourner plus d'un tour autour de l'origine. Pour cela on définit une frontière appelée *coupure* qui relie l'origine, que l'on appelle *point de branchement*, à un point à l'infini. Une coupure simple est par exemple une demi-droite.

On peut définir une fonction racine carrée $z = \rho e^{i\theta} \mapsto y$ par l'angle θ_0 de la coupure par rapport à l'axe \mathbb{R}^+ :

$${}^{\theta_0}\sqrt{z} = {}^{\theta_0}\sqrt{\rho e^{i\theta}} \triangleq \sqrt{\rho} e^{i\frac{\theta}{2}}, \quad \forall \rho \in \mathbb{R}^+ \text{ et } \forall \theta \in [\theta_0, \theta_0 + 2\pi[.$$

Dans le cas de la racine carrée, la fonction est continue et infiniment dérivable pour tout complexe non nul dont l'argument appartient à $]\theta_0, \theta_0 + 2\pi[$, mais on observe une discontinuité le long de la coupure, c'est-à-dire pour $\theta = \theta_0$, caractérisée par un changement de signe.

2.1.2 Analyse des singularités

En ce qui concerne la fonction $\Gamma(s)$, nous avons un premier point de branchement en 0, qui vient du $s^{\frac{3}{2}}$, ainsi que deux autres, s_1 et s_2 qui sont complexes conjugués, et qui s'obtiennent en résolvant :

$$\Gamma(s)^2 = \left(\frac{s}{c_0}\right)^2 + 2\varepsilon \left(\frac{s}{c_0}\right)^{\frac{3}{2}} + \Upsilon = 0. \quad (2.2)$$

Pour des raisons de causalité et de stabilité du système, les fonctions de transfert $R(s)$ et $T(s)$ ne doivent présenter aucune singularité dans le demi-plan complexe droit. Dans le cas des courbures positives ou nulles, $\Upsilon \geq 0$, s_1 et s_2 appartiennent au demi-plan gauche, il suffit alors de choisir des coupures qui partent de ces points et se dirigent vers la gauche. On définit la première coupure partant de l'origine par : $e^{i\theta_0} \mathbb{R}^+$, et les deux autres par : $s_k + e^{i\theta_k} \mathbb{R}^+$, $\forall k \in \{1, 2\}$. Avec comme condition pour la stabilité : $\theta_k \in [-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}]$, $\forall k \in \{0, 1, 2\}$.

Pour que les fonctions de transfert R et T aient un sens physique, leur réponse impulsionnelle doit être réelle et donc leur transformée de Laplace doit être à symétrie hermitienne. Cette remarque impose alors que les coupures, en plus d'appartenir au demi-plan gauche pour la stabilité, doivent être symétriques par rapport à l'axe réel. C'est-à-dire que θ_1 et θ_2 vérifient : $\theta_1 = -\theta_2[2\pi]$. Le plus simple étant d'utiliser $\theta_1 = \theta_2 = -\pi$, ce qui donne deux coupures horizontales partant de s_1 et s_2 . De même la coupure partant de l'origine doit être obligatoirement sur \mathbb{R}^- .

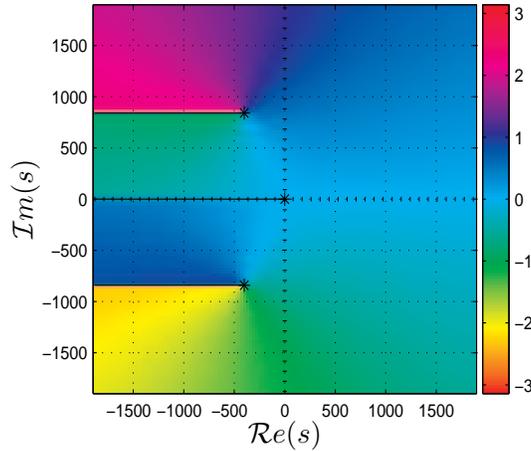


FIG. 2.1 – Phase de $\Gamma(s)$ dans le plan complexe

La figure (2.1), phase de $\Gamma(s)$ dans le plan complexe, met en évidence les discontinuités le long des coupures horizontales, et les trois points de branchement, 0, s_1 et s_2 .

En ce qui concerne les courbures négatives, $\Upsilon < 0$, les points de branchement se trouvent dans le demi-plan droit, ce qui ne satisfait pas la condition de causalité et de stabilité du système. Cependant les développements en séries entières, avec rayon de convergence infini, montrent que $T(s)$ et $R(s)$ sont fonctions de $\Gamma(s)^2$ qui ne présentent pas de coupures autres que \mathbb{R}^- . Ceci permettrait en outre de simplifier la modélisation, mais pour des raisons d'instabilité avec l'état (ψ^+ , ψ^-) nous n'exploitons pas cette propriété.

2.2 Présentation des représentations diffusives

2.2.1 Représentations diffusives

Denis Matignon, dans [Mat94], explique que la spécificité des opérateurs associés à notre phénomène diffusif est que leur réponse impulsionnelle peut se décomposer sur une famille continue d'exponentielles amorties $e^{-\xi t} \mathbf{1}_{t>0}(t)$, associée à un poids $\mu(\xi)$, avec $-\xi \in \mathbb{R}^-$:

$$\partial_t \phi(\xi, t) = -\xi \phi(\xi, t) + u(t) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^+, \quad (2.3)$$

$$y(t) = \int_0^\infty \mu(\xi) \phi(\xi, t) d\xi. \quad (2.4)$$

Dans notre cas, pour des fonctions coupées seulement sur \mathbb{R}^- et vérifiant le critère (2.8), le poids $\mu(\xi)$ associé est égal au saut d'un coté à l'autre de la coupure. Ainsi elles peuvent être représentées par une famille continue de systèmes du premier ordre (cf. [Hél00] et [TD06]).

Pour une fonction de transfert $H : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ coupée sur \mathbb{R}^- , on a :

$$\mu_H(\xi) = \frac{1}{2i\pi} \{H(-\xi + i0^-) - H(-\xi + i0^+)\} \quad (2.5)$$

Sa réponse impulsionnelle et sa transformée de Laplace sont les suivantes :

$$h(t) = \int_0^\infty \mu_H(\xi) e^{-\xi t} \mathbf{1}_{t>0}(t) d\xi, \quad (2.6)$$

$$H(s) = \int_0^\infty \frac{\mu_H(\xi)}{s + \xi} d\xi. \quad (2.7)$$

Pour assurer la convergence de ces intégrales, le critère suivant doit être vérifié :

$$\int_0^\infty \frac{|\mu_H(\xi)| d\xi}{1 + \xi} < +\infty. \quad (2.8)$$

Sans cette condition, la fonction H n'admet pas une représentation diffusive. Une condition nécessaire pour la vérification du critère est que le comportement asymptotique de μ tende vers zéro quand $|\xi|$ tend vers l'infini.

2.2.2 Extension par dérivation

Soit une fonction $H(s) = s^b$ avec $b \in [0, 1[$, H n'admet pas de représentation diffusive puisqu'elle ne vérifie pas le critère de convergence, mais son extension $H(s)/s$ le peut puisque $H(s)/s = s^a$, avec $a = 1 - b < 0$. Ainsi dans le cas des fonctions coupées seulement sur \mathbb{R}^- dont $\mu(\xi)$ est analytique sur \mathbb{R}^- et qui ont le même comportement asymptotique que s^b avec $0 \leq b < 1$ en l'infini, on considère leur *extension par dérivation* définie par :

$$\check{H}(s) \triangleq \frac{1}{s} [H(s) - H(0)], \quad (2.9)$$

qui admet une représentation diffusive associée au poids $\check{\mu}_H(\xi) = \mu_H(\xi)/(-\xi)$. Les équations (2.7), (2.3) et (2.4) deviennent :

$$H(s) = s \int_0^\infty \frac{\check{\mu}_H(\xi)}{s + \xi} d\xi + H(0), \quad (2.10)$$

$$\partial_t \phi(\xi, t) = -\xi \phi(\xi, t) + u(t), \quad (2.11)$$

$$y(t) = \int_0^\infty \check{\mu}_H(\xi) \partial_t \phi(\xi, t) d\xi + H(0)u(t). \quad (2.12)$$

2.2.3 Extension aux représentations diffusives du second ordre

Dans le cas d'une fonction $G : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ présentant deux coupures horizontales dans le demi-plan complexe gauche et symétriques par rapport à \mathbb{R}^- , nous pouvons étendre les représentations diffusives en décomposant leur réponse impulsionnelle sur une famille continue de sinusoides amorties $e^{-\xi t} \cos(\omega_k t) \mathbf{1}_{t>0}(t) = \mathcal{R}e(e^{(-\xi + i\omega_k)t}) \mathbf{1}_{t>0}(t)$, avec $\gamma = -\xi + i\omega_k \in s_k + \mathbb{R}^-$, variant le long des coupures. $s_k = -\xi_k + i\omega_k$ étant l'un des deux points de branchement, $k \in \{1, 2\}$.

$$\partial_t \phi(\xi, t) = (-\xi + i\omega_k) \phi(\xi, t) + u(t) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^+, \quad (2.13)$$

$$y(t) = \int_0^\infty \mathcal{R}e\{\mu_G^1(\xi) \phi(\xi, t)\} d\xi, \quad (2.14)$$

$$\mu_G^k(\xi) = \frac{1}{2i\pi} \{G(-\xi + i\omega_k + i0^-) - G(-\xi + i\omega_k + i0^+)\}. \quad (2.15)$$

Rappelons que : $\omega_1 = -\omega_2$, puisque : $s_1 = \overline{s_2}$.

2.3 Approximations

2.3.1 Approximation à partir de la transformée de Laplace

La simulation d'une infinité de pôles le long des coupures est irréalisable numériquement. Dunau [Dun00], Hélie et Matignon [TD06] proposent d'approximer cette infinité de singularités par une famille finie de pôles. L'approximation consiste en une optimisation par les moindres carrés avec pondération, ici adaptée à l'audition. Dans le cas de la seule coupure sur \mathbb{R}^- le modèle de l'approximation est :

$$\tilde{H}_\mu(s) = \sum_{j=1}^{j=J} \frac{\mu_j}{s + \xi_j}. \quad (2.16)$$

où J est le nombre de pôles, μ_j est le poids associé au pôle j et $-\xi_j$ le pôle j .

L'approximation permet de déterminer les poids que l'on doit associer à chaque pôle pour que le modèle soit le plus proche possible de la fonction analytique. Actuellement, l'optimisation n'est pas faite sur la position des pôles. Il faudra alors placer ces pôles le plus judicieusement possible. Le critère d'optimisation est évalué dans le domaine de Fourier :

$$\mathcal{C}(\boldsymbol{\mu}) = \int_{\mathbb{R}^+} \left| \left(\tilde{H}_\mu(i\omega) - H(i\omega) \right) w_H(\omega) \right|^2 M(d\omega). \quad (2.17)$$

Pondération perceptive

La mesure M et le poids w_H sont choisis selon les règles simplifiées de perception auditive :

- (i) Les fréquences sont perçues par l'oreille humaine entre 20Hz et 20kHz selon une échelle logarithmique. Nous choisissons

$$M(d\omega) \triangleq \mathbf{1}_{\omega_- < \omega < \omega_+}(\omega) d \ln \omega = \mathbf{1}_{\omega_- < \omega < \omega_+}(\omega) \frac{d\omega}{\omega}, \quad (2.18)$$

avec par exemple $\omega_- = 20 \times 2\pi$ et $\omega_+ = 20000 \times 2\pi$ rad/s.

- (ii) La perception de l'intensité est également selon une échelle logarithmique, ainsi nous considérons l'*erreur relative* entre l'approximation \tilde{H}_μ et la fonction exacte H plutôt que l'erreur absolue. Pour cette raison le poids est : $w_H(\omega) \triangleq 1/|H(i\omega)|$.
- (iii) La pondération précédente a pour effet de ramener *artificiellement* le niveau sonore de chaque partiel à 0dB, mais il n'est pas raisonnable de réhausser des gains trop faibles qui sont très mal perçus. Ainsi, le poids précédent est corrigé par :

$$w_H(i\omega) = 1/\text{Sat}_{H,T_r}(i\omega), \quad (2.19)$$

où Sat_{H,T_r} est une saturation limitant la dynamique à T_r (en décibel), tel que pour $T_H = T_r \sup_{\omega_- < \omega < \omega_+} |H(i\omega)|$:

$$\text{Sat}_{H,T_r}(i\omega) = \begin{cases} |H(i\omega)|, & \text{pour } |H(i\omega)| \geq T_H, \\ T_H, & \text{pour } |H(i\omega)| < T_H. \end{cases} \quad (2.20)$$

On prendra par exemple T_r égale à 80dB.

- (iv) Dans le cas d'une extension par dérivation, l'optimisation est réalisée sur \check{H} qui produit les $\check{\mu}_j$ optimaux, mais le poids $w_H(i\omega)$ appliqué à \check{H} est paramétré par H . Son expression vaut :

$$\check{w}_H(i\omega) = \omega/\text{Sat}_{H,T_r}(i\omega). \quad (2.21)$$

Modèle de l'approximation

Pour une réalisation numérique, nous réalisons l'optimisation sur un nombre fini de pulsations, ainsi pour l'ensemble $\{\omega_n\}_{1 \leq n \leq N}$ rangé par ordre croissant, avec $\omega_1 = \omega_-$ et $\omega_{N+1} = \omega_+$, le critère devient :

$$\mathcal{C}(\boldsymbol{\mu}) = \sum_{n=1}^N \left| \left(\tilde{H}_\mu(i\omega_n) - H(i\omega_n) \right) w_H(\omega_n) \right|^2 [\ln \omega_{n+1} - \ln \omega_n]. \quad (2.22)$$

Dans le cas général des trois coupures, nous avons à optimiser des paramètres μ'_k complexes. Pour ce faire on optimise séparément leur partie réelle et imaginaire en considérant le modèle :

$$\begin{aligned}
\tilde{H}_\mu(s) &= \sum_{j=1}^{j=J} \frac{\mu_j}{s + \xi_j} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=K} \left[\frac{\mu'_k}{s - \gamma_k} + \frac{\overline{\mu'_k}}{s - \overline{\gamma_k}} \right] \\
&= \sum_{j=1}^{j=J} \mu_j \left[\frac{1}{s + \xi_j} \right] \\
&\quad + \sum_{k=1}^{k=K} \mu_k^R \left[\frac{1/2}{s - \gamma_k} + \frac{1/2}{s - \overline{\gamma_k}} \right] \\
&\quad + \sum_{k=1}^{k=K} \mu_k^I \left[\frac{i/2}{s - \gamma_k} - \frac{i/2}{s - \overline{\gamma_k}} \right], \tag{2.23}
\end{aligned}$$

où J est le nombre de pôles réels, K le nombre de paires de pôles complexes conjugués, μ_k^R est la partie réelle du poids associé au pôle complexe γ'_k , μ_k^I sa partie imaginaire et μ_j le poids associé au pôle réel $-\xi_j$.

La forme matricielle équivalente est :

$$\mathcal{C}(\boldsymbol{\mu}) = (\mathbf{M}\boldsymbol{\mu} - \mathbf{H})^* \mathbf{W}^* \mathbf{W} (\mathbf{M}\boldsymbol{\mu} - \mathbf{H}), \tag{2.24}$$

où $\mathbf{M}^* \triangleq \overline{\mathbf{M}}^t$ est la matrice conjuguée transposée de \mathbf{M} . La matrice \mathbf{M} est définie par $M(n, m) = [1/(i\omega_n + \xi_m)]$ pour $m \in [1, J]_{\mathbb{N}}$, par $M(n, m) = [0.5/(i\omega_n - \gamma_{m-J}) + 0.5/(i\omega_n - \overline{\gamma_{m-J}})]$ pour $m \in [J+1, J+K]_{\mathbb{N}}$, et par $M(n, m) = [0.5i/(i\omega_n - \gamma_{m-(J+K)}) - 0.5i/(i\omega_n - \overline{\gamma_{m-(J+K)}})]$ pour $m \in [J+K+1, J+2K]_{\mathbb{N}}$. \mathbf{H} est le vecteur colonne $(H(i\omega_n))_{1 \leq n \leq N}$. La matrice du poids \mathbf{W} est une matrice diagonale à éléments positifs définis par $W(n, n) = w_H(\omega_n) \sqrt{\ln \omega_{n+1} - \ln \omega_n}$.

Résolution

La résolution par les moindres carrés conduit à l'équation donnant le vecteur $\boldsymbol{\mu}$ des paramètres optimisés :

$$\boldsymbol{\mu} = [\mathcal{R}e(\mathbf{M}^* \mathbf{W}^* \mathbf{W} \mathbf{M})]^{-1} [\mathcal{R}e(\mathbf{M}^* \mathbf{W}^* \mathbf{W} \mathbf{H})]. \tag{2.25}$$

Le vecteur réel $\boldsymbol{\mu}$ de taille $J+2K$ est composée comme suit : $\mu(j) = \mu_j$, pour $j \in [1, J]_{\mathbb{N}}$, $\mu(k) = \mu_{k-J}^R$, pour $k \in [J+1, J+K]_{\mathbb{N}}$, et $\mu(k) = \mu_{k-(J+K)}^I$, pour $k \in [J+K+1, J+2K]_{\mathbb{N}}$.

Régularisation

Pour résoudre d'éventuels problèmes de conditionnement lors de l'inversion de matrice (par diagonalisation), nous utilisons des paramètres de régularisation que nous réglons par méthode dichotomique. Le conditionnement est le rapport de la valeur minimale par la valeur maximale des valeurs propres de la matrice $\mathbf{M}^* \mathbf{W}^* \mathbf{W} \mathbf{M}$. Quand il est inférieur à la précision des nombres flottants, 2.2204×10^{-16} en précision double, la matrice n'est alors plus inversible numériquement, on relève chaque valeur propre d'une constante ϵ tel que le conditionnement soit supérieur à cette précision. La méthode dichotomique que nous avons

utilisée permet d'obtenir le plus petit paramètre de régularisation rendant le conditionnement bon. Les équations (2.24) et (2.25) sont modifiées en :

$$\mathcal{C}(\boldsymbol{\mu}) = (\mathbf{M}\boldsymbol{\mu} - \mathbf{H})^* \mathbf{W}^* \mathbf{W} (\mathbf{M}\boldsymbol{\mu} - \mathbf{H}) + \boldsymbol{\mu}^t \mathbf{E} \boldsymbol{\mu} \quad (2.26)$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\mu} = [\mathcal{R}e(\mathbf{M}^* \mathbf{W}^* \mathbf{W} \mathbf{M} + \mathbf{E})]^{-1} [\mathcal{R}e(\mathbf{M}^* \mathbf{W}^* \mathbf{W} \mathbf{H})], \quad (2.27)$$

où $\mathbf{E} = \epsilon I_{J+2K}$ est la matrice diagonale de régularisation où ϵ est un paramètre de régularisation positif obtenu par méthode dichotomique.

Résultats dans le domaine fréquentiel

Prenons l'exemple d'une fonction F tel que : $F(s) = \frac{1}{\sqrt{s}} + \frac{5}{\sqrt{s-s_1}} + \frac{5}{\sqrt{s-\bar{s}_1}}$, avec $s_1 = -5000 + i10000$. Cette fonction possède trois coupures, dont les points de branchement sont 0, s_1 et \bar{s}_1 , et elle admet une représentation diffuse. Nous avons réalisé une approximation avec un modèle possédant 5 pôles sur l'axe réel, et 2 paires de pôles complexes conjugués sur les deux autres coupures. Les pôles sont placés sur ces axes avec une répartition logarithmique : $\xi_j = \xi_{min} A^{j-1}$ pour les pôles réels et $\gamma_k = -\xi'_1 B^{k-1} + i\omega'_1$ pour les pôles à partie imaginaire positive. Avec $A = \sqrt[j-1]{\xi_{max}/\xi_{min}}$, $B = \sqrt[k-1]{\xi_{max}/\xi'_1}$ et $s_1 = -\xi'_1 + i\omega'_1$ est le point de branchement à partie imaginaire positive. Aucun pôle n'est placé en 0 afin de ne pas avoir d'intégrateur pur, instable, c'est pourquoi nous commençons à une valeur $\xi_{min} > 0$. Les valeurs choisies sont les suivantes : $\xi_{min} = 1.5 \text{rad/s}$ et $\xi_{max} = 95000 \text{rad/s}$.

Lors de cette optimisation, le conditionnement sans régularisation vaut 2.06×10^{-11} , ce qui ne nécessite pas de régularisation. Sur la figure (2.2), représentant le module et la phase de la fonction F et de son approximation, on peut distinguer deux choses intéressantes : (1) le maximum du module vers les 10000 rad/s est la zone du domaine de Fourier la plus proche du point de branchement s_1 ($\omega_1 = 10000 \text{rad/s}$), ainsi on observe l'effet des coupures sur la réponse fréquentielle de la représentation diffuse. (2) La pente du module au delà de 10000 rad/s est de -10dB/dec, cette pente est caractéristique des intégrateurs fractionnaires dus au $1/\sqrt{s}$, avec un système représenté par une simple fraction rationnelle nous aurions des pentes multiples de -20dB/dec.

2.3.2 Mise en forme du système discret

Le modèle de l'approximation précédemment expliqué est à temps continu. Dans le but de réaliser la simulation numériquement, il est nécessaire de le transformer en un modèle discret. Pour ce faire nous devons déterminer les coefficients $\{a_p\}_{0 \leq p \leq P}$ et $\{b_q\}_{0 \leq q \leq Q}$ tel que l'équation récurrente en temps discret (2.29) soit équivalente à l'équation différentielle en temps continu (2.28).

$$\partial_t \phi(t) = -\xi \phi(t) + u(t), \quad (2.28)$$

$$\phi_n = \sum_{q=1}^Q b_q \phi_{n-q} + \sum_{p=0}^P a_p u_{n-p}. \quad (2.29)$$

La résolution de l'équation différentielle (2.28) s'écrit pour $(t_0, t_1) \in \mathbb{R}^2$:

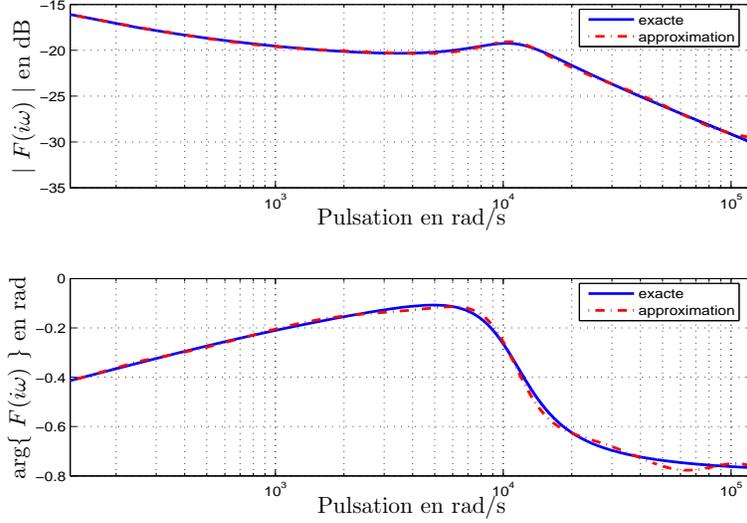


FIG. 2.2 – Module et Phase de F exacte dans le domaine de Fourier, et de son approximation

$$\phi(t_1) = A(t_1 - t_0)\phi(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} A(t_1 - \tau)u(\tau)d\tau,$$

avec $A(\tau) = e^{-\xi\tau}$. En choisissant $t_1 = t_n = nT_e$ et $t_0 = t_{n-1} = (n-1)T_e$, avec T_e la période d'échantillonnage, on obtient que :

$$\phi(t_n) = e^{-\xi T_e} \phi(t_{n-1}) + \int_0^{T_e} e^{-\xi(T_e - \tau)} u((n-1)T_e + \tau)d\tau. \quad (2.30)$$

L'intégration de $e^{\xi\tau} u((n-1)T_e + \tau)$ entre 0 et T_e nécessite de connaître $u(t)$ entre les instants t_{n-1} et t_n . Or, en raison de l'échantillonnage nous ne pouvons le connaître que par une interpolation en sinus cardinal via la formule de reconstruction exacte. Mais cette interpolation est irréalisable en temps réel puisque que cette méthode n'est pas causale et qu'elle demande un nombre d'opérations trop grand. En conséquence, nous allons utiliser deux interpolations causales plus simples et déterminer les équations récurrentes qui en résultent.

Bloqueur d'ordre zéro à gauche

L'interpolation la plus simple est une interpolation en escalier. Le signal interpolé reste constant pendant chaque période d'échantillonnage. Pour un signal numérique $\{u_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, l'expression de son interpolation est :

$$u(t) = u_n, \forall t \in [t_n, t_{n+1}[.$$

On appellera cette interpolation *bloqueur d'ordre zéro* (ou *BoZ*). L'équation (2.30) devient :

$$\phi(t_n) = e^{-\xi T_e} \phi(t_{n-1}) + \left[\frac{1 - e^{-\xi T_e}}{-\xi} \right] u_{n-1}.$$

$$\text{soit : } \phi_n = \alpha\phi_{n-1} + \lambda u_{n-1}, \quad (2.31)$$

avec $\alpha = e^{-\xi T_e}$, et $\lambda = \frac{1-\alpha}{-\xi}$.

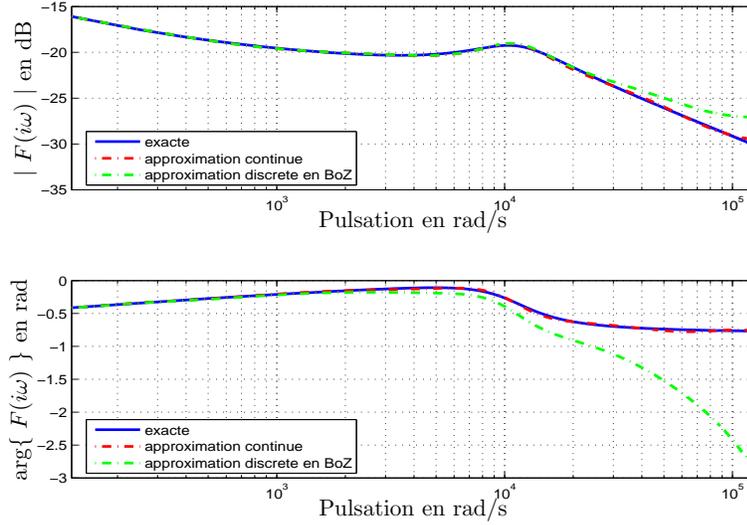


FIG. 2.3 – Module et Phase de F : exacte, approximation en temps continu et en temps discret par un bloqueur d'ordre zéro

Malheureusement, comme le montre la figure (2.3), quelques problèmes surviennent lors du passage au temps discret. En effet, l'interpolation en escalier revient à convoluer le signal échantillonné par un rectangle de taille T_e dans le domaine temporel, ce qui se manifeste dans le domaine fréquentiel par la multiplication du spectre du signal échantillonné par un sinus cardinal (la transformée de Fourier du rectangle).

$$\text{TF}\{\mathbf{1}_{[-T_e/2, T_e/2]}(t)\}(f) = T_e \text{sinc}(fT_e). \quad (2.32)$$

Ainsi, puisque le sinus cardinal n'est pas nul après la fréquence de Nyquist ($F_e/2$), il y a remplissement spectral du signal après l'interpolation BoZ. En utilisant l'interpolation en sinus cardinal la reconstruction est exacte parce que sa transformée de Fourier est le rectangle $\mathbf{1}_{[-F_e/2, F_e/2]}(f)$, il n'y a donc pas de repliement spectral. Puisque la transformée de Fourier d'un triangle est un sinus cardinal au carré, sa transformée de Fourier décroît plus vite (en $1/f^2$) que celle du rectangle (en $1/f$) et le repliement s'exprime moins, c'est pourquoi nous avons réalisé une interpolation linéaire :

$$\text{TF}\{\mathbf{Tri}_{[-T_e, T_e]}(t)\}(f) = T_e^2 \text{sinc}^2(fT_e). \quad (2.33)$$

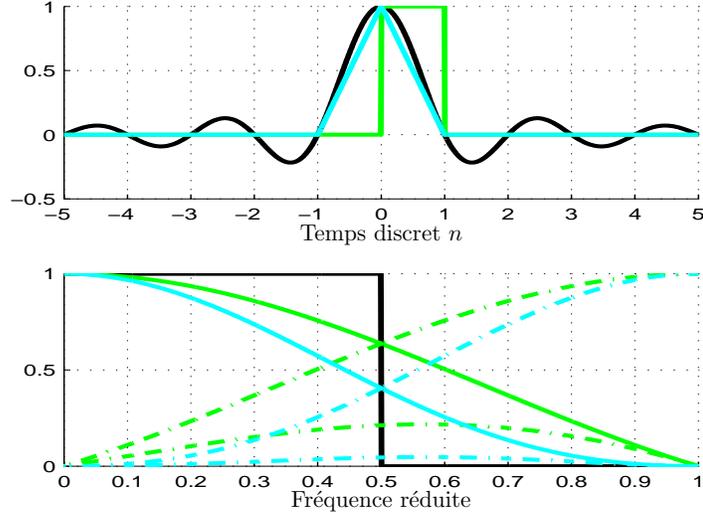


FIG. 2.4 – La courbe bleue représente l’interpolation en sinus cardinal, puisque sa transformée de Fourier est un rectangle qui coupe en $F_e/2$ le domaine fréquentiel, il n’y a pas de repliement spectral. La courbe verte représente le bloqueur d’ordre zéro, nous observons sur la figure les premières translations du spectre qui contribuent au repliement spectral. La courbe cyan représentant l’interpolation linéaire montre que les contributions des translations de spectre s’atténuent plus vite que celles du BoZ.

Interpolation linéaire

L’interpolation en triangle, que nous nommerons TriZ, consiste en une interpolation linéaire entre l’échantillon u_{n-1} et l’échantillon u_n . Ceci donne pour un signal numérique $\{u_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$:

$$u(t) = u_n + (t - t_n) \times \frac{u_{n+1} - u_n}{T_e}, \quad \forall t \in [t_n, t_{n+1}[.$$

L’équation (2.30) devient :

$$\begin{aligned} \phi(t_n) &= e^{-\xi T_e} \phi(t_{n-1}) + \int_0^{T_e} e^{-\xi(T_e - \tau)} u((n-1)T_e + \tau) d\tau \\ &= e^{-\xi T_e} \phi(t_{n-1}) + \int_0^{T_e} e^{-\xi(T_e - \tau)} \left(u_{n-1} + \tau \times \frac{u_n - u_{n-1}}{T_e} \right) d\tau. \end{aligned}$$

Par intégration par partie, nous démontrons que l’équation de récurrence pour un système TriZ s’écrit :

$$\phi_n = \alpha \phi_{n-1} + \lambda_0 u_n + \lambda_1 u_{n-1}, \quad (2.34)$$

$$\text{avec } \alpha = e^{-\xi T_e}, \lambda_0 = -\frac{1-\alpha}{\xi^2 T_e} + \frac{1}{\xi} \text{ et } \lambda_1 = \frac{1-\alpha}{\xi^2 T_e} - \frac{\alpha}{\xi}.$$

Changement de variable adapté à notre cas

Maintenant que nous avons vu comment mettre en forme un système discret à partir d'un système continu du premier ordre, revenons à notre cas des représentations diffusives. Rappelons les équations :

$$\partial_t \phi_j(t) = -\xi_j \phi_j(t) + u(t), \quad 1 \leq j \leq J, \quad (2.35)$$

$$\partial_t \phi'_k(t) = (-\xi'_k + i\omega'_k) \phi'_k(t) + u(t), \quad 1 \leq k \leq K, \quad (2.36)$$

$$\tilde{y}(t) = \sum_{j=1}^J \mu_j \phi_j(t) + \mathcal{R}e \sum_{k=1}^K \mu'_k \phi'_k(t). \quad (2.37)$$

Après passage au modèle discret, nous obtenons :

$$\phi_j(t_n) = \alpha_j \phi_j(t_{n-1}) + \lambda_j^0 u_n + \lambda_j^1 u_{n-1}, \quad 1 \leq j \leq J, \quad (2.38)$$

$$\phi'_k(t_n) = \alpha'_k \phi'_k(t_{n-1}) + \lambda_k^{0'} u_n + \lambda_k^{1'} u_{n-1}, \quad 1 \leq k \leq K, \quad (2.39)$$

$$\tilde{y}_n = \sum_{j=1}^J \mu_j \phi_j(t_n) + \mathcal{R}e \sum_{k=1}^K \mu'_k \phi'_k(t_n), \quad (2.40)$$

où :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \alpha_j = e^{-\xi_j T_e}, & \text{et } \alpha'_k = e^{(-\xi'_k + i\omega'_k) T_e}, \\ \text{Pour le BoZ :} & \\ \lambda_j^0 = 0, & \text{et } \lambda_k^{0'} = 0, \\ \lambda_j^1 = \frac{\alpha_j - 1}{\xi_j}, & \text{et } \lambda_k^{1'} = \frac{\alpha'_k - 1}{\xi'_k - i\omega'_k}, \\ \text{Pour le TriZ :} & \\ \lambda_j^0 = -\frac{1 - \alpha_j}{\xi_j^2 T_e} + \frac{1}{\xi_j}, & \text{et } \lambda_k^{0'} = -\frac{1 - \alpha'_k}{(\xi'_k - i\omega'_k)^2 T_e} + \frac{1}{\xi'_k - i\omega'_k}, \\ \lambda_j^1 = \frac{1 - \alpha_j}{\xi_j^2 T_e} - \frac{\alpha_j}{\xi_j}, & \text{et } \lambda_k^{1'} = \frac{1 - \alpha'_k}{(\xi'_k - i\omega'_k)^2 T_e} - \frac{\alpha'_k}{\xi'_k - i\omega'_k}, \end{array} \right.$$

Afin de réduire le temps de calcul, nous avons retiré une multiplication en faisant le changement de variable suivant :

$$\phi(t_n) = \lambda^1 X(t_n), \quad \text{pour tout pôle, réel ou complexe.} \quad (2.41)$$

En ne considérant que les pôles réels, l'équation (2.38) se récrit :

$$\begin{aligned}
\phi_j(t_n) &= \lambda_j^1 X_j(t_n) \\
&= \alpha_j \phi_j(t_{n-1}) + \lambda_j^0 u_n + \lambda_j^1 u_{n-1} \\
&= \alpha_j \lambda_j^1 X_j(t_{n-1}) + \lambda_j^0 u_n + \lambda_j^1 u_{n-1}
\end{aligned}$$

donc :

$$X_j(t_n) = \alpha_j X_j(t_{n-1}) + \frac{\lambda_j^0}{\lambda_j^1} u_n + u_{n-1}, \quad 1 \leq j \leq J. \quad (2.42)$$

En faisant de même sur les pôles complexes et en insérant ceci dans l'équation (2.40), on obtient :

$$\begin{aligned}
\tilde{y}_n &= \sum_{j=1}^J \mu_j \phi_j(t_n) + \mathcal{R}e \sum_{k=1}^K \mu'_k \phi'_k(t_n), \\
&= \sum_{j=1}^J (\mu_j \lambda_j^1) X_j(t_n) + \mathcal{R}e \sum_{k=1}^K (\mu'_k \lambda_k^{1'}) X'_k(t_n).
\end{aligned} \quad (2.43)$$

Finalement les équations que nous simulons sont dans le cas général :

$$X_j(t_n) = b_j X_j(t_{n-1}) + a_j u_n + u_{n-1}, \quad 1 \leq j \leq J, \quad (2.44)$$

$$X'_k(t_n) = b'_k X'_k(t_{n-1}) + a'_k u_n + u_{n-1}, \quad 1 \leq k \leq K, \quad (2.45)$$

$$y_n = \sum_{j=1}^J p_j X_j(t_n) + \mathcal{R}e \sum_{k=1}^K p'_k X'_k(t_n), \quad (2.46)$$

avec $p_j = \mu_j \lambda_j^1$, $p'_k = \mu'_k \lambda_k^{1'}$, $b_j = \alpha_j$, $b'_k = \alpha'_k$, $a_j = \frac{\lambda_j^0}{\lambda_j^1}$ et $a'_k = \frac{\lambda_k^{0'}}{\lambda_k^{1'}}$, $\forall j \in [1, J]_{\mathbb{N}}$ et $\forall k \in [1, K]_{\mathbb{N}}$.

Extension par dérivation

Dans le cas d'une fonction H étendue par dérivation, rappelons les formules données en §2.2.1 dans le cas des seuls pôles réels :

$$\begin{aligned}
H(s) &= s \int_0^\infty \frac{\check{\mu}_H(\xi)}{s + \xi} d\xi + H(0), \\
\partial_t \phi(\xi, t) &= -\xi \phi(\xi, t) + u(t), \\
z(t) &= \int_0^\infty \check{\mu}_H(\xi) \partial_t \phi(\xi, t) d\xi + H(0) u(t).
\end{aligned}$$

L'optimisation produit les poids $\check{\mu}_j$ du modèle à dimension finie. En reprenant la mise en forme des systèmes discrets à partir de leur système à temps continu, le cas d'une extension par dérivation avec pôles réels et complexes s'écrit :

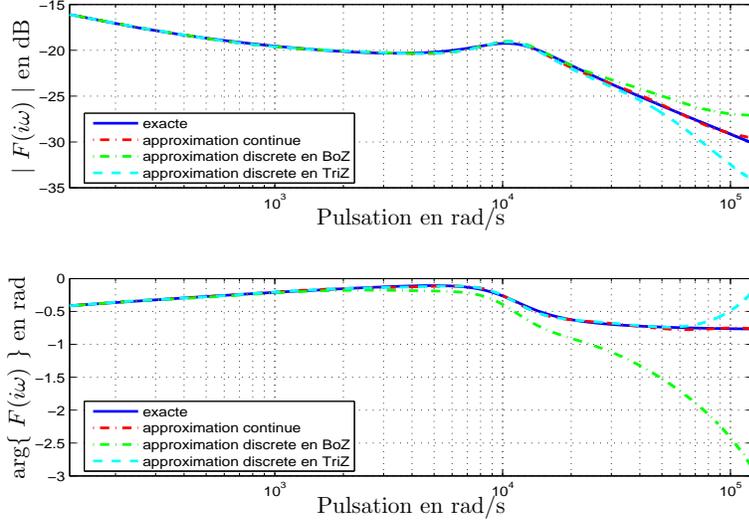


FIG. 2.5 – Module et Phase de F : exacte, approximation en temps continu et en temps discret par un BoZ et un TriZ

$$\begin{aligned}
 \tilde{z}(t) &= \sum_{j=1}^J \check{\mu}_j \phi_j(t_n) + \mathcal{R}e \left(\sum_{k=1}^K \check{\mu}'_k \phi'_k(t_n) \right) + \left[H(0) + \sum_{j=1}^J \check{\mu}_j + \mathcal{R}e \left(\sum_{k=1}^K \check{\mu}'_k \right) \right] u(t), \\
 \tilde{z}_n &= \sum_{j=1}^J (-\xi_j \check{\mu}_j) \phi_j(t_n) + \mathcal{R}e \sum_{k=1}^K (-\xi'_k + i\omega'_k) \check{\mu}'_k \phi'_k(t_n) \\
 &+ \left[H(0) + \sum_{j=1}^J \check{\mu}_j + \mathcal{R}e \left(\sum_{k=1}^K \check{\mu}'_k \right) \right] u(t_n).
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

Le système récrit avec le changement de variables s'écrit finalement :

$$X_j(t_n) = b_j X_j(t_{n-1}) + a_j u_n + u_{n-1}, \quad 1 \leq j \leq J, \tag{2.48}$$

$$X'_k(t_n) = b'_k X'_k(t_{n-1}) + a'_k u_n + u_{n-1}, \quad 1 \leq k \leq K, \tag{2.49}$$

$$\tilde{z}_n = \sum_{j=1}^J \check{p}_j X_j(t_n) + \mathcal{R}e \left(\sum_{k=1}^K \check{p}'_k X'_k(t_n) \right) + c_{ext} u_n, \tag{2.50}$$

avec $\check{p}_j = -\xi_j \check{\mu}_j \lambda_j^1$, $\check{p}'_k = (-\xi'_k + i\omega'_k) \check{\mu}'_k \lambda_k^{1'}$
et $c_{ext} = H(0) + \sum_{j=1}^J \check{\mu}_j + \mathcal{R}e \sum_{k=1}^K \check{\mu}'_k$.

Dans la suite nous ne distinguerons plus les fonctions étendues par dérivation des autres, sauf précisions, et nous considérons les formules générales :

$$X_j(t_n) = b_j X_j(t_{n-1}) + a_j u_n + u_{n-1}, \quad 1 \leq j \leq J, \quad (2.51)$$

$$X'_k(t_n) = b'_k X'_k(t_{n-1}) + a'_k u_n + u_{n-1}, \quad 1 \leq k \leq K, \quad (2.52)$$

$$y_n = \sum_{j=1}^J p_j X_j(t_n) + \mathcal{R}e\left(\sum_{k=1}^K p'_k X'_k(t_n)\right) + c u_n, \quad (2.53)$$

avec $p = \check{p}$ et $c = c_{ext}$ dans le cas d'une extension par dérivation, sinon $c = 0$.

Chapitre 3

Description de l'instrument modélisé : Trompette naturelle

La modélisation d'un instrument de cuivre est très complexe, nous avons choisi de nous limiter à un instrument simple de type trompette naturelle constituée d'une embouchure, d'un tube droit (de longueur fixe) et d'un pavillon. Ce type de trompettes ne joue que certaines notes appartenant à la série harmonique, contrairement aux trompettes à pistons, apparues en 1820, qui grâce à un mécanisme permettant d'accroître la longueur du tube, permettent de jouer des notes plus graves et de combler ainsi les notes manquantes de la gamme chromatique. Le clairon, cor de chasse ou trompette droite appartiennent à la famille des trompettes naturelles. En raison de la durée du stage, nous nous sommes limités à modéliser ce type d'instruments en raison de leur simplicité. Dans une première partie nous détaillerons la géométrie de l'instrument modélisé, puis après avoir décrit la structure modélisant le résonateur, nous ferons l'étude de l'impédance acoustique de l'instrument ainsi que des coefficients de transmission et de réflexion en entrée, à partir du modèle théorique exact. Puis nous verrons comment modifier la structure afin de rendre possible la simulation numérique en temps réel.



FIG. 3.1 – Trompette droite

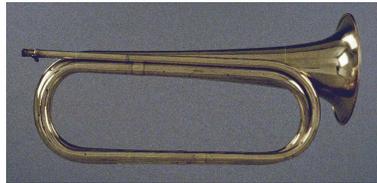


FIG. 3.2 – Clairon basse

3.1 Géométrie de l'instrument

La fabrication *virtuelle* de notre instrument nécessite de connaître les paramètres géométriques de l'instrument, c'est-à-dire : la géométrie de l'embouchure (volume de la cuvette, longueur et rayon de la queue), le rayon et la longueur du tube droit, le profil de la paroi du pavillon et son angle d'ouverture.

Il est possible d'obtenir des solutions analytiques pour des profils de tubes particuliers. Nous avons choisi pour le pavillon un profil *caténoïdal* (en cosinus hyperbolique), qui nous permet d'avoir une dérivée nulle en début de pavillon de sorte à avoir la continuité de la dérivée du rayon au branchement tube-pavillon. L'expression du rayon en fonction de l'abscisse curviligne de la paroi est pour $\alpha = \frac{1}{L} \text{acosh} \left(\frac{R(L)}{R_0} \right)$:

$$R(l) = R_0 \cosh(\alpha l), \tag{3.1}$$

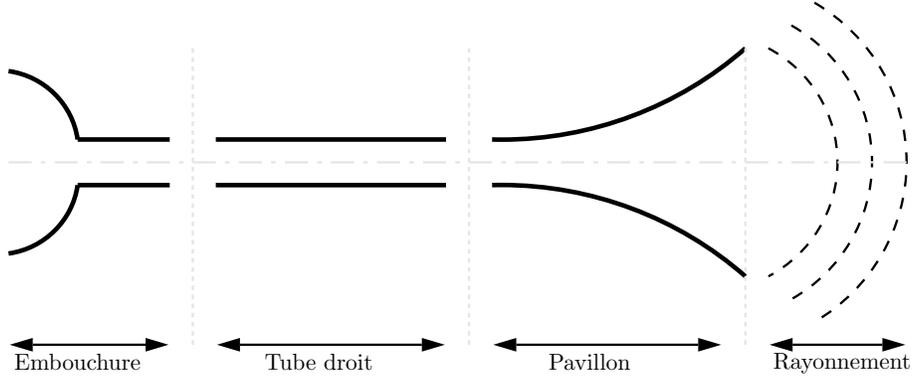


FIG. 3.3 – Géométrie de l'instrument

avec R_0 et $R(L)$ les rayons en entrée et en sortie du pavillon. Remarquons que puisque $R''(l) = R_0\alpha^2\cosh(\alpha l)$, la courbure du pavillon est la constante $\Upsilon = R''(l)/R(l) = \alpha^2$.

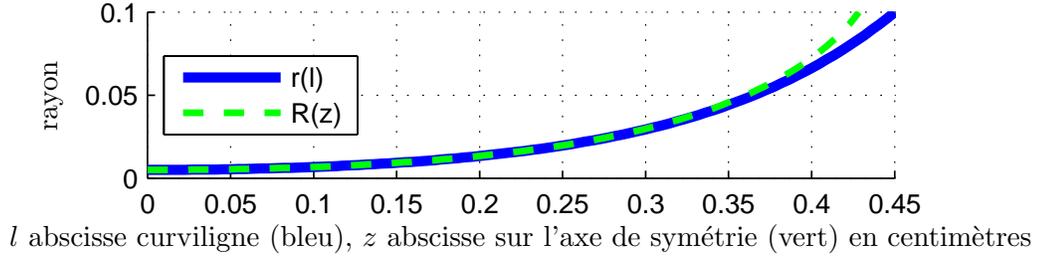


FIG. 3.4 – Profil caténoïdal du pavillon

Les paramètres décrivant le profil de l'instrument sont :

Pour l'embouchure : r_c , V_c , l_b et r_b respectivement le rayon et le volume de la cuvette, et la longueur équivalente et le rayon équivalent de la queue. Pour le résonateur : L_1 et L_2 les longueurs respectives du tube droit et du pavillon, R_0 et R_S respectivement le rayon du tube droit et le rayon de sortie du pavillon.

3.2 Détail de la structure

La construction de l'instrument consiste à concaténer les quadripôles simulant les relations d'entrées-sorties de chaque portion de l'instrument. Ainsi la première structure modélisant le système est constituée des quadripôles suivant : le quadripôle de l'embouchure E_{mb} , le quadripôle du tube droit Q_{tube} , le quadripôle du pavillon Q_{pav} et l'impédance de rayonnement Z_{ray} en fin de chaîne, entre lesquels on insère des quadripôles de conversion afin d'adapter les états entre eux $((P, V), (\psi^+, \psi^-) \dots)$. Cette structure générale est décrite en figure (3.5).

C_e est le quadripôle de conversion de l'état (P_e^+, P_e^-) , pression aller-retour, en état (V, P) à l'entrée de l'embouchure. E_{mb} est le quadripôle simulant l'effet de l'embouchure. C_{conv}^{in} et C_{conv}^{out} sont les quadripôles de conversion de l'état (ψ^+, ψ^-) en état (P, V) respectivement en entrée et en sortie du résonateur constitué du tube droit, représenté par Q_{tube} , et du pavillon, représenté par Q_{pav} . En fin de chaîne Z_{ray} est le quadripôle de l'impédance de rayonnement.

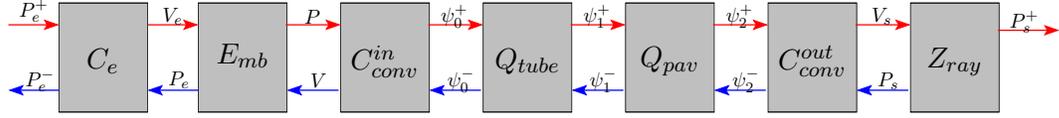


FIG. 3.5 – Structure originale de l'instrument

3.2.1 Quadripôle de conversion en entrée de l'embouchure

Le quadripôle C_e réalise la conversion entre l'état (P_e^+, P_e^-) vers l'état (V, P) . Ici les ondes progressives s'écrivent :

$$P^+ = \frac{1}{2} (P + \rho c_0 V), \quad (3.2)$$

$$P^- = \frac{1}{2} (P - \rho c_0 V). \quad (3.3)$$

Réciproquement la pression et la vitesse s'écrivent :

$$P = P^+ + P^-, \quad (3.4)$$

$$V = \frac{1}{\rho c_0} (P^+ - P^-). \quad (3.5)$$

Or l'entrée du quadripôle est (P^+, P) et la sortie (P^-, V) , alors on trouve la matrice de conversion :

$$\begin{bmatrix} V_e \\ P_e^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\rho c_0} & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_e^+ \\ P_e \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

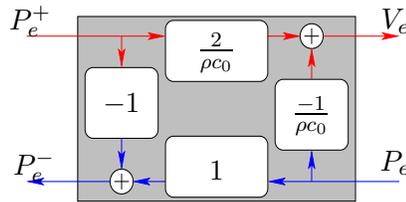


FIG. 3.6 – Quadripôle de conversion en entrée de l'embouchure

3.2.2 Quadripôle de l'embouchure

Le quadripôle de l'embouchure permet de réaliser les relations entrée-sortie de l'embouchure, où l'entrée est (V_e, V) , les vitesses en entrée et en sortie de l'embouchure, et la sortie est (P_e, P) . La modélisation utilise l'analogie présentée en §1.1, alors on utilise la convention impédance acoustique, où la vitesse V est remplacée par le débit U tel que pour S la section du conduit acoustique $U = SV$. Ici le débit en entrée vaut $U_e = S_c V_e$ avec $S_c = \pi r_c^2$ est la

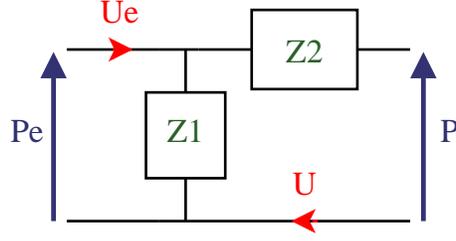


FIG. 3.7 – Circuit acoustique de l'embouchure

section de la cuvette et le débit en sortie de l'embouchure est $U = S_0 V$ où $S_0 = \pi R_0^2$ est la section du tube droit et non de la queue de l'embouchure.

La relation du quadripôle de transfert de l'embouchure est :

$$\begin{bmatrix} P \\ P_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 & -(Z_1 + Z_2) \\ Z_1 & -Z_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_e \\ U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_c Z_1 & -S_0 (Z_1 + Z_2) \\ S_c Z_1 & -S_0 Z_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_e \\ V \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

où $Z_1 = \frac{1}{sC_a}$ et $Z_2 = R_a + sM_a$.

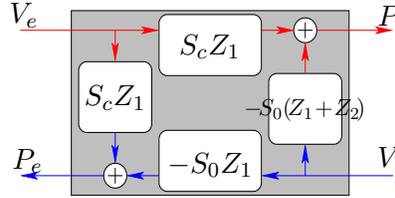


FIG. 3.8 – Quadripôle de l'embouchure

3.2.3 Quadripôles de conversion du résonateur

Comme nous l'avons expliqué en §1.3.2, la propagation des ondes acoustiques dans le tube de l'instrument est représentée par l'état $\Psi(l, s)$ décomposé en ondes progressives (ψ^+ , ψ^-) définies par l'équation (1.5). Les matrices de conversion s'en déduisent :

$$\begin{bmatrix} P(l, s) \\ V(l, s) \end{bmatrix} = \frac{1}{r(l)} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{s+\zeta_l c_0}{s\rho c_0} & \frac{-s+\zeta_l c_0}{s\rho c_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi^+(l, s) \\ \psi^-(l, s) \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

$$\begin{bmatrix} \psi^+(l, s) \\ \psi^-(l, s) \end{bmatrix} = \frac{r(l)}{2} \begin{bmatrix} \frac{s-\zeta_l c_0}{s} & \rho c_0 \\ \frac{s+\zeta_l c_0}{s} & -\rho c_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(l, s) \\ V(l, s) \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

où $\zeta_l = c_0 \frac{r'(l)}{r(l)}$.

De ces matrices, liant (P, V) à (ψ^+, ψ^-) , nous déduisons les quadripôles liant (P, ψ^-) à (ψ^+, V) explicités par la figure (3.9).

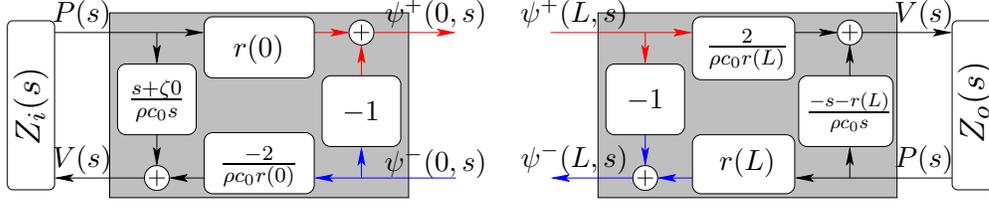


FIG. 3.9 – Quadripôles de conversion du tube

3.2.4 Quadripôles de transfert du tube

Comme nous l'avons vu en §1.3.3 la solution de l'équation de *Webster Lokshin* pour un tronçon de tube où Υ et ε sont constants, se met sous la forme d'une relation entrée-sortie symétrique pour l'état (ψ^+, ψ^-) faisant intervenir les deux fonctions de transfert $R(s)$ et $T(s)$ respectivement les fonctions de réflexion et de transmission du tronçon. Dans le cas de la trompette naturelle, on décompose le résonateur en deux tronçons, l'un pour le tube droit, l'autre pour le pavillon. L'étude de ces deux tronçons est intéressante parce que nous avons deux configurations différentes. En effet puisque la courbure Υ du tube droit est nulle, il n'existe alors qu'une solution à $\Gamma(s)^2 = 0$ qui est 0, ainsi les fonctions de transfert de ce tronçon ne possède que la coupure en \mathbb{R}^- , contrairement au pavillon qui lui possède bien les trois coupures. Notons de plus qu'avec le profil caténoïdal choisi, la courbure est bien constante, mais nous ne pouvons pas avoir simultanément le coefficient des pertes viscothermique $\varepsilon(l)$ constant, il est alors nécessaire de vérifier qu'il varie peu ; si ce n'est pas le cas il est nécessaire de redécouper le tronçon. Les matrices de transfert caractérisant les quadripôles des deux tronçons sont :

$$\begin{bmatrix} \psi_1^+(s) \\ \psi_0^-(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1(s) & R_1(s) \\ R_1(s) & T_1(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_0^+(s) \\ \psi_1^-(s) \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

$$\begin{bmatrix} \psi_2^+(s) \\ \psi_1^-(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_2(s) & R_2(s) \\ R_2(s) & T_2(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1^+(s) \\ \psi_2^-(s) \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

avec T_1 et R_1 les fonctions de transfert du tube droit et T_2 et R_2 les fonctions de transfert du pavillon.

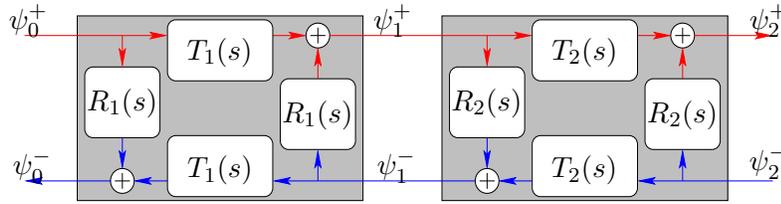


FIG. 3.10 – Quadripôles de transfert du résonateur

3.2.5 Quadripôle du rayonnement

Le quadripôle de rayonnement n'est pas à proprement parlé un quadripôle puisque la pression arrivant dans le pavillon (vers les z décroissant), est négligée : $P_s^- = 0$. Ce quadripôle ne

possède donc qu'une entrée, la vitesse acoustique, localisée en sortie du pavillon. L'impédance de rayonnement s'écrit :

$$Z_{ray} = \frac{P_s}{V_s} = \frac{P_s^+}{V_s}. \quad (3.12)$$

Ainsi la relation d'entrée-sortie donnant P_s et P_s^+ est simplement : $P_s = P_s^+ = Z_{ray}V_s$.

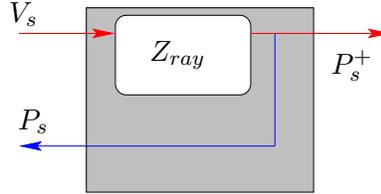


FIG. 3.11 – Quadripôle de rayonnement

3.3 Calcul de l'impédance de l'instrument complet

Dans le but de valider notre approche théorique, il est intéressant de calculer des caractéristiques globales de l'instrument qui s'obtiennent après branchement des quadripôles de la structure. Le plus légitimement, nous avons choisi de calculer l'impédance en entrée de l'instrument car nous disposons de courbes obtenues expérimentalement [Lur79], qui nous serviront donc de vérification. Nous avons également calculé les fonctions de transfert de réflexion et de transmission de l'instrument qui nous renseignent sur la réponse fréquentielle. Dans une première partie, nous donnerons la méthode de calcul, puis nous analyserons les résultats obtenus.

3.3.1 Méthode de calcul

Pour déterminer les fonctions de transfert de réflexion et de transmission de l'instrument à partir de notre structure globale, nous avons procédé par itération. Dans un premier temps cherchons à voir comment on peut regrouper deux quadripôles pour n'obtenir qu'un système constitué d'une réflexion intermédiaire et d'une transmission intermédiaire (cf. la figure (3.12)).

Nous définissons pour des quantités abstraites ϕ quelconques :

$$\begin{bmatrix} \phi_{n+1}^+ \\ \phi_n^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{21}^n & E_{22}^n \\ E_{11}^n & E_{12}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_n^+ \\ \phi_{n+1}^- \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} \phi_{out}^+ \\ \phi_{n+1}^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_k \\ F_k \end{bmatrix} \phi_{n+1}^+, \quad (3.13)$$

et nous cherchons G_{k+1} et F_{k+1} tel que :

$$\begin{bmatrix} \phi_{out}^+ \\ \phi_n^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{k+1} \\ F_{k+1} \end{bmatrix} \phi_n^+. \quad (3.14)$$

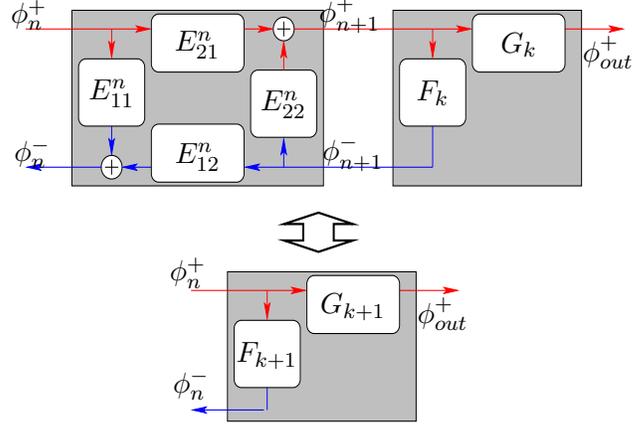


FIG. 3.12 – Regroupement de deux quadripôles

En remarquant que $\phi_{n+1}^+ = \frac{E_{21}^n}{1 - F_k E_{22}^n} \phi_n^+$, il vient :

$$\phi_n^- = \left(\frac{E_{12}^n F_k E_{21}^n}{1 - F_k E_{22}^n} + E_{11}^n \right) \phi_n^+ = F_{k+1} \phi_n^+, \quad (3.15)$$

$$\phi_{out}^+ = \frac{G_k E_{21}^n}{1 - F_k E_{22}^n} \phi_n^+ = G_{k+1} \phi_n^+. \quad (3.16)$$

Avec $G_0 = F_0 = Z_{ray}$, nous procédons de façon itérative en remontant vers l'embouchure de la droite vers la gauche de la structure, nous déterminons finalement les fonctions globales R_T et T_T de réflexion et de transmission de l'instrument. On a $R_T = F_6$ et $T_T = G_6$.

Nous déterminons alors l'impédance acoustique globale de l'instrument $Z_T(s) = \frac{P(s)}{U(s)}$ à partir du coefficient de réflexion :

$$Z_T = \frac{Z_c}{S_c} \frac{1 + R_T}{1 - R_T}, \quad (3.17)$$

où $Z_c = \rho c_0$ est l'impédance caractéristique et S_c est la section de la cuvette de l'embouchure.

Il est également possible de calculer l'impédance acoustique du résonateur Z_r , c'est à dire du tube droit et du pavillon, puisque $F_4 = \frac{P}{V} = S_c Z_r$ en entrée du tube droit.

3.3.2 Analyse et comparaison des résultats

La courbe d'impédance que nous utilisons comme référence est une impédance acoustique de trompettes mesurée par Lurton [Lur79]. En utilisant une géométrie proche de l'instrument utilisé pour la mesure, nous pouvons faire une vérification qualitative présentée figure (3.13) et (3.14). Notons que Lurton n'a pas donné les valeurs de la géométrie du résonateur, nous avons alors dû déterminer à la main les paramètres les plus cohérents sans pouvoir obtenir une courbe identique. Les paramètres utilisés sont donnés tableau (3.1).

La comparaison des figures (3.13) et (3.14) nous a permis de valider qualitativement le modèle théorique que nous avons développé. De plus, en vue du très bon résultat obtenu, nous

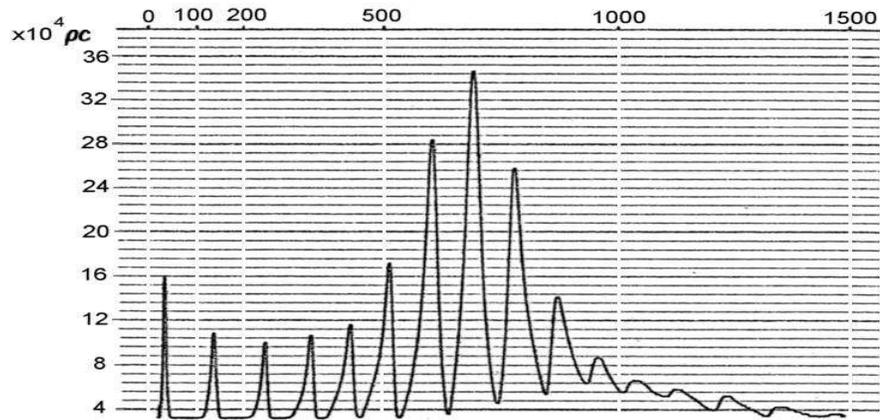


FIG. 3.13 – Impédance acoustique d’entrée d’une trompette mesurée par Lurton

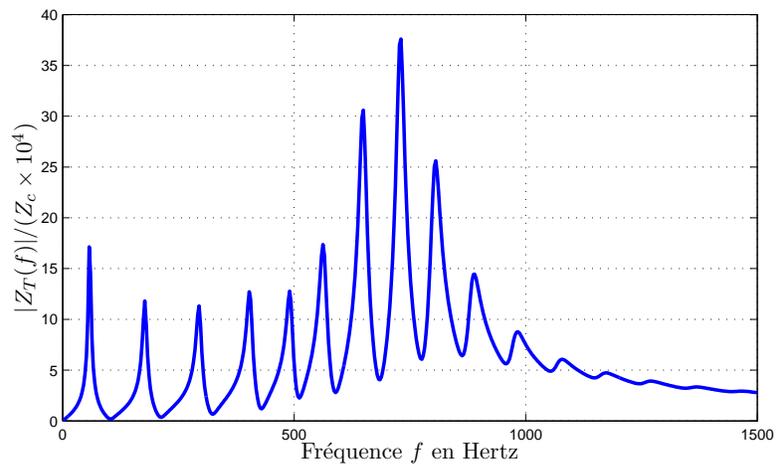


FIG. 3.14 – Impédance théorique de notre modèle

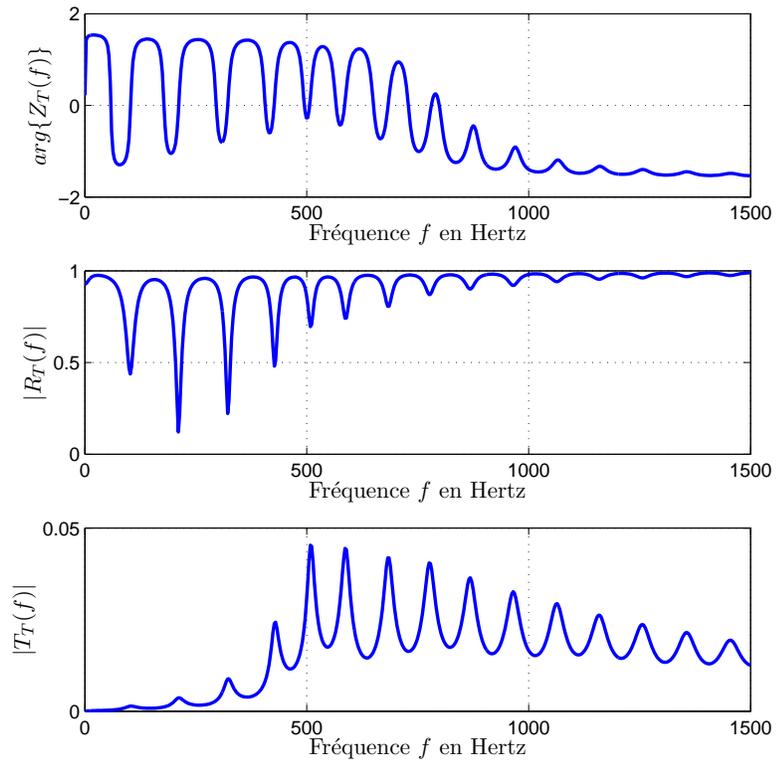


FIG. 3.15 – Phase de l'impédance, modules des fonctions de réflexion et de transmission

r_c	V_c	l_b	r_b
Rayon de la cuvette	Volume de la cuvette	Longueur de la queue	Rayon de la queue
8.5 mm	1.75 cm ³	5.88 cm	2.5 mm
L_1	L_2	R_0	R_S
Longueur du tube droit	Longueur du pavillon	Rayon du tube droit	Rayon en sortie du pavillon
1.25 m	0.45 m	5mm	6.6cm

TAB. 3.1 – Paramètres de l’instrument modélisé

pourrions alors envisager d’étendre notre modèle à des géométries d’instruments plus complexes : malgré l’hypothèse de symétrie de révolution qui en toute rigueur interdit de modéliser des tubes enroulés, nos résultats sont très proches de mesures expérimentales réalisées sur un vrai instrument avec tube enroulé. Désormais, grâce à notre modèle théorique nous pouvons observer l’effet d’une modification (*virtuelle*) des paramètres de l’instrument sur l’impédance totale.

Effet de l’embouchure L’impédance acoustique du résonateur sans embouchure (tube droit et pavillon), est représentée en figure (3.16). On y observe que le résonateur produit des pics correspondant aux différents modes avec une amplitude décroissante. En la comparant à l’impédance totale de l’instrument on comprend alors que l’embouchure donne à la réponse fréquentielle son enveloppe spectrale, avec une résonance entre 500 et 1000 Hz pour la trompette. Les courbes de la figure (3.16) montrent l’effet de deux embouchures différentes sur le même résonateur, l’une de trompette l’autre de trombone.

	r_c	V_c	l_b	r_b
	Rayon de la cuvette	Volume de la cuvette	Longueur de la queue	Rayon de la queue
trompette	8.5 mm	1.75 cm ³	5.88 cm	2.5 mm
trombone	12 mm	5.6 cm ³	5.8 cm	3.2 mm

TAB. 3.2 – Paramètres des embouchures de la figure (3.16)

Effet de la longueur du pavillon Maintenant, en gardant l’embouchure de trompette, faisons varier la longueur du pavillon, à longueur totale L_{tot} constante et à rayon de sortie R_S constant. La figure (3.18) montre le rapport de la fréquence F_k de chaque mode k par rapport à sa fréquence idéalisée, $F_k^* = kF_0^*$ où k est impair et $F_0^* = c_0/(4L_{tot})$, qui sont celles d’un tube droit fermé-ouvert sans pertes. Avec une longueur de 1.7m, on obtient $F_0^* = 50\text{Hz}$, les modes idéaux sont alors aux fréquences multiples impaires de F_0^* , car on a un tube fermé-ouvert : 50, 150, 250, 350, 450... On observe alors que plus le résonateur est proche d’un pavillon seul (courbe cyan pointillée), c’est à dire $L_1 \ll L_2$, plus l’impédance est inharmonique, alors que pour $L_1 \gg L_2$ les modes sont d’avantage harmoniques. La longueur du pavillon à R_S constant accroît donc l’inharmonicité.

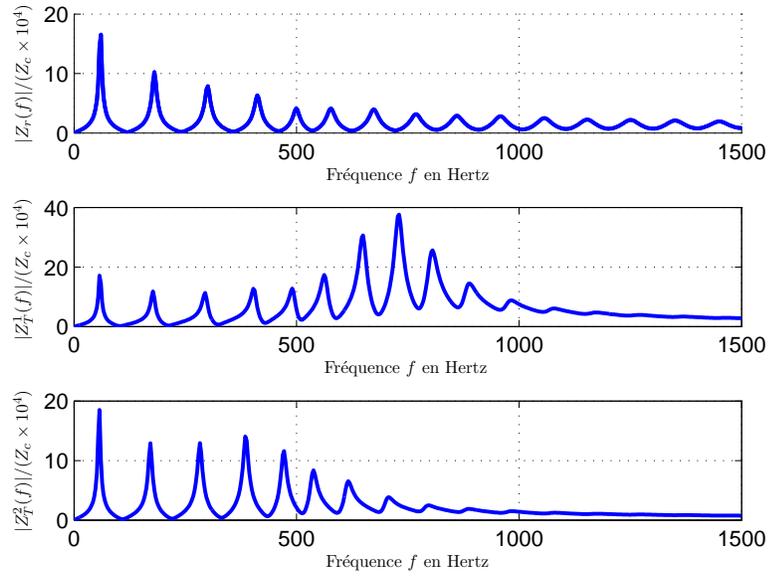


FIG. 3.16 – Impédances acoustiques. Courbe 1 : Impédance du résonateur seul, Courbe2 : Impédance de l’instrument avec une embouchure de trompette, Courbe 3 : Impédance de l’instrument avec une embouchure de trombone

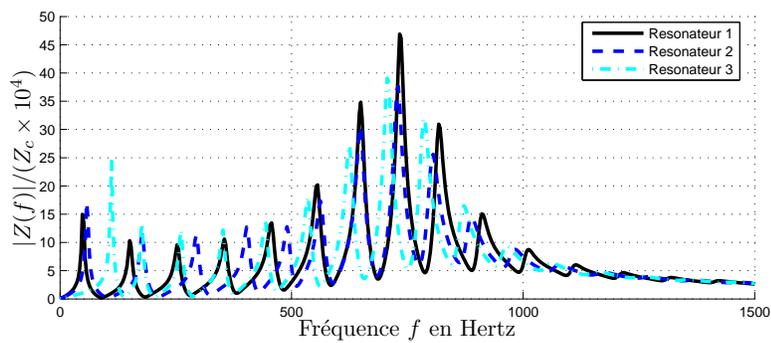


FIG. 3.17 – Impédances acoustiques pour différents résonateurs. Résonateur 1 (bleu), résonateur 2 (vert) et résonateur 3 (cyan) (cf. tableau (3.3) pour les paramètres).

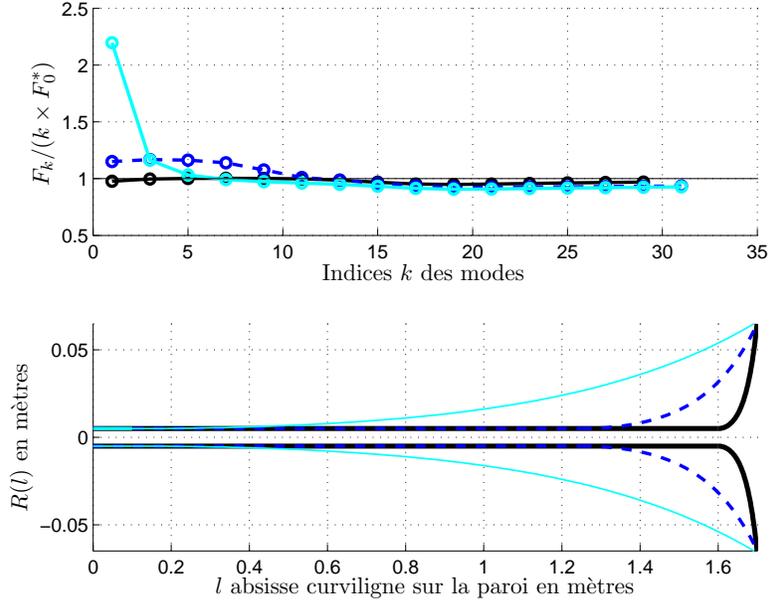


FIG. 3.18 – Inharmonicité des modes. Courbe 1 : Rapport des fréquences des modes des résonateurs (F_k) par rapport au multiple de la fréquence fondamentale F_0^* . Courbe 2 : Géométrie des résonateurs.

résonateur :	1 (bleu)	2 (vert)	3 (cyan)
L_1 (tube droit)	1.6 m	1.25 m	0.1 m
L_2 (pavillon)	0.1 m	0.45 m	1.6 m

TAB. 3.3 – Paramètres des résonateurs de la figure (3.17)

3.4 Ecriture d’une structure adaptée à la simulation temporelle

3.4.1 Présentation du problème de simulation

En observant le branchement de deux quadripôles successifs dans la structure présentée en figure (3.5), on observe des boucles sans retard. Or numériquement, pour calculer la sortie ϕ_n^- d’un quadripôle à l’instant n , nous avons besoin de connaître l’entrée ϕ_n^+   l’instant n . Mais celle-ci dépend justement de la donnée ϕ_n^- , en raison de la boucle sans retard. La simulation est par conséquent irréalisable avec la structure telle qu’elle est définie. Pour résoudre ce problème, nous devons récrire algébriquement la structure en déterminant de nouveaux quadripôles, séparés par des retards. Puisque la fonction $T(s)$ possède un retard pur en facteur ($T(s) = \tilde{T}(s) e^{-\tau s}$, cf.  1.3.4) les retards nous servant à séparer les quadripôles proviennent de la propagation à travers les tronçons.

Jonction de deux quadripôles de transfert

Voyons, dans le cas de la jonction des deux quadripôles de transfert Q_{tube} et Q_{pav} comment résoudre le problème. En exprimant algébriquement $\phi(s)^+$ et $\phi(s)^-$ en fonction de $u(s)$ la

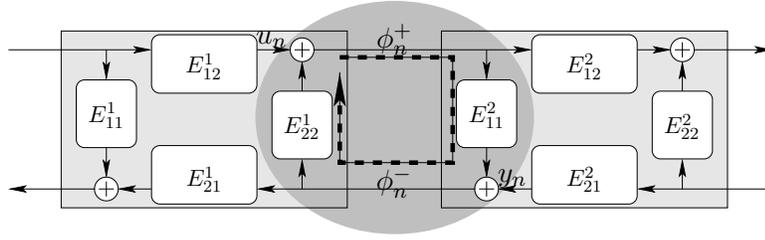


FIG. 3.19 – Boucle sans retard au branchement de deux quadripôles

sortie de la fonction de transmission T_1 du tube droit et de $y(s)$ la sortie de la fonction de transmission T_2 du pavillon, nous pouvons déterminer le quadripôle \mathbf{J} de la *jonction* de deux quadripôles de transfert. La figure (3.20) illustre le débouclage, [TD06].

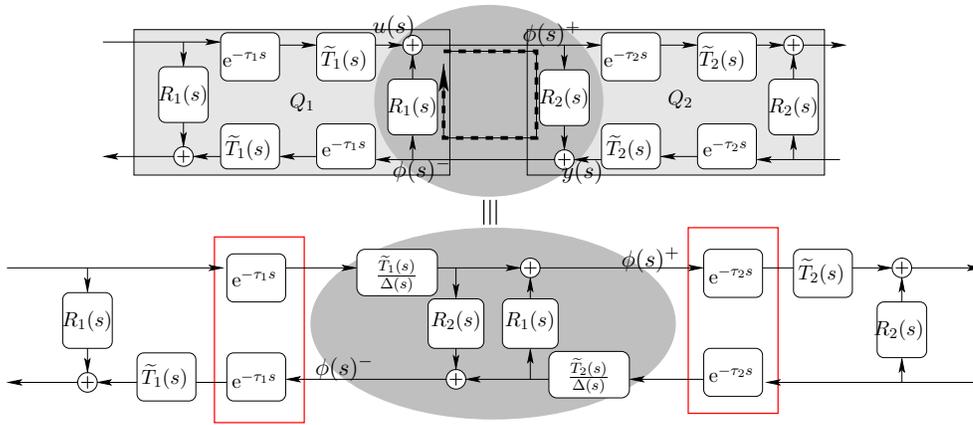


FIG. 3.20 – Débouclage à la jonction de deux quadripôles de transfert

On obtient les expressions suivantes :

$$\phi^-(s) = \frac{1}{\Delta(s)} [R_2(s)u(s) + y(s)], \quad (3.18)$$

$$\phi^+(s) = \frac{1}{\Delta(s)} [u(s) + R_1(s)y(s)], \quad (3.19)$$

avec :

$$\Delta(s) = 1 - R_1(s)R_2(s). \quad (3.20)$$

Jonction d'un quadripôle de transfert et d'un quadripôle de conversion

A l'entrée ou à la sortie du tube, les deux quadripôles de conversion permettent de passer de l'état acoustique (ψ^+ , ψ^-) à l'état (P , V), ou inversement. Ici les quadripôles de conversion ne contiennent pas de retard, ainsi au lieu de définir un quadripôle de jonction \mathbf{J} inséré entre deux retards purs, nous définissons les quadripôles de conversion du système débouclé. Le débouclage de la chaîne complète du tube est représentée figure (3.21). On y voit apparaître les quadripôles \mathbf{C}_i et \mathbf{C}_o de conversion du système débouclé, respectivement en entrée du tube et en sortie, définis figure (3.22), avec $\zeta_0 = c_0 r'(0)/r(0)$, $\zeta_L = c_0 r'(L)/r(L)$ et $Z_c = \rho c_0$.

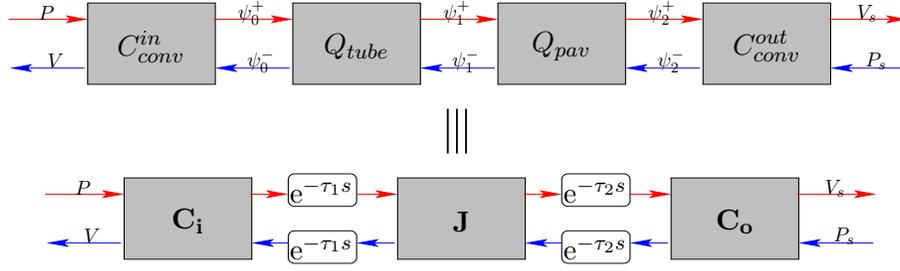


FIG. 3.21 – Débouclage du tube

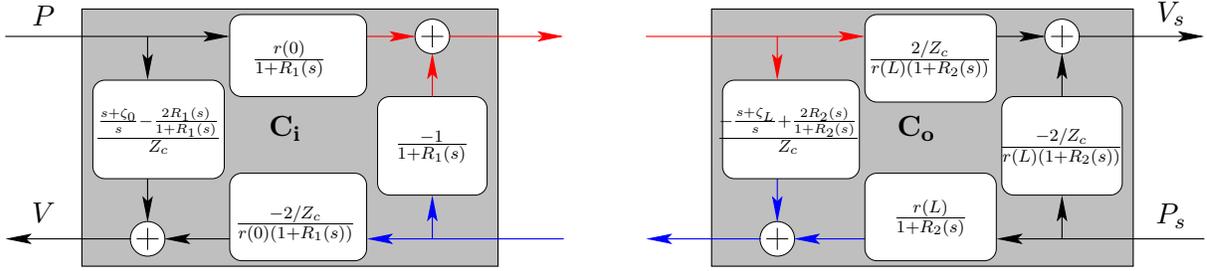


FIG. 3.22 – Définition des quadripôles de conversion du système débouclé : C_i et C_o

Jonction de quadripôles sans retards purs

Les deux quadripôles définis précédemment, C_i et C_o , se branchent respectivement sur le quadripôle de l'embouchure E_{mb} et sur le quadripôle du rayonnement Z_{ray} . Or aucun de ces quadripôles ne contient de retard. De même le quadripôle de conversion avant l'embouchure, C_e , ne contient pas de retard. La simulation numérique en temps réel nécessite que tous les quadripôles simulés soient séparés par des retards purs. Afin de ne pas avoir de boucles infinies, nous avons dû faire *fusionner* ces quadripôles. Nous calculons algébriquement les quadripôles suivant : B qui rassemble C_e , E_{mb} et C_i , et le quadripôle R_{ay} qui rassemble C_i et Z_{ray} .

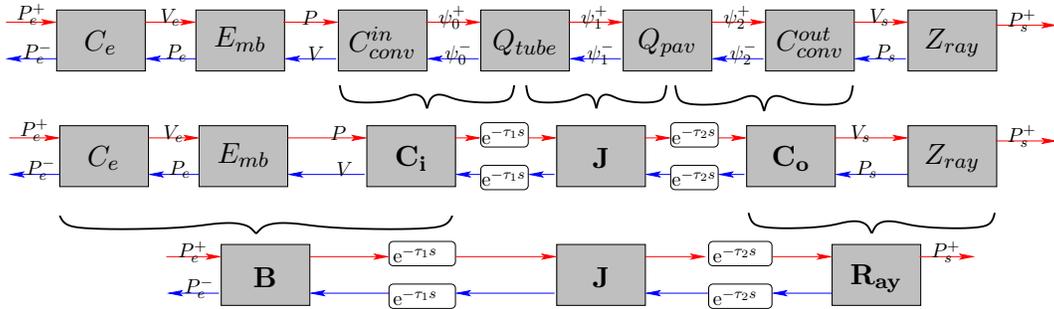


FIG. 3.23 – Structure adaptée à la simulation temporelle, sans boucle instantanée infinie

3.4.2 Détails des quadripôles de la structure simulable

Nous donnons ici le catalogue de toutes les fonctions de transfert de la structure complète adaptée à la simulation temporelle.

Quadripôle **J**

La décomposition des fonctions de transfert, expliquée en §1.3.4, permet d'exhiber les retards et d'écrire T et R sous forme de systèmes bouclés faisant apparaître les fonctions E et D . Le quadripôle **J** est défini en fonction des fonctions R_1 , R_2 , \tilde{T}_1 , \tilde{T}_2 et $\Delta^{-1} = (1 - R_1 R_2)^{-1}$. En développant Δ^{-1} en systèmes bouclés, on observe à nouveau des boucles sans retard, pour résoudre ce problème nous décomposons $\Delta(s)^{-1}$ à partir des expressions (1.18), et remettons la fonction sous forme d'un système bouclé simple.

$$\begin{aligned}\Delta(s)^{-1} &= \frac{1}{1 - R_1(s)R_2(s)}, \\ &= \frac{1}{1 - \frac{M_{R1}(s)+N_{R1}(s)e^{-2\tau_1s}}{1-K_1(s)e^{-2\tau_1s}} \frac{M_{R2}(s)+N_{R2}(s)e^{-2\tau_2s}}{1-K_2(s)e^{-2\tau_2s}}}, \\ &= \frac{N_\Delta(s)}{1 - (K'_\Delta(s)e^{-\tau_1s} + K''_\Delta(s)e^{-\tau_2s} + K'''_\Delta(s)e^{-(\tau_1+\tau_2)s})}\end{aligned}\quad (3.21)$$

avec :

$$N_\Delta(s) = \frac{(1 - K_1(s)e^{-2\tau_1s})(1 - K_2(s)e^{-2\tau_2s})}{1 - M_{R2}(s)M_{R1}(s)} \quad (3.22)$$

$$K'_\Delta(s) = \frac{K_1(s) + N_{R1}(s)M_{R2}(s)}{1 - M_{R2}(s)M_{R1}(s)} \quad (3.23)$$

$$K''_\Delta(s) = \frac{K_2(s) + N_{R2}(s)M_{R1}(s)}{1 - M_{R2}(s)M_{R1}(s)} \quad (3.24)$$

$$K'''_\Delta(s) = \frac{N_{R1}N_{R2} - K_1(s)K_2(s)}{1 - M_{R2}(s)M_{R1}(s)} \quad (3.25)$$

La multiplication par $\tilde{T}_1(s)$ et $\tilde{T}_2(s)$ à gauche et à droite du quadripôle permet de simplifier $(1 - K_k(s)e^{-2\tau_k s})$ pour $k \in \{1, 2\}$, dans $N_\Delta(s)$, en factorisant la boucle restant, nous définissons les facteurs des entrées $F^+(s)$ et $F^-(s)$ définis par les équations (3.26) et (3.27). On obtient finalement pour le quadripôle **J** une décomposition où les retards sont exhibés, sans boucles infinies. La structure est représentée figure (3.24).

$$F^+(s) = \frac{\tilde{T}_1(s)N_\Delta(s)}{1 - K_2(s)e^{-2\tau_2s}} = \frac{N_{T1}(s)}{1 - M_{R2}(s)M_{R1}(s)} \quad (3.26)$$

$$F^-(s) = \frac{\tilde{T}_2(s)N_\Delta(s)}{1 - K_1(s)e^{-2\tau_1s}} = \frac{N_{T2}(s)}{1 - M_{R2}(s)M_{R1}(s)} \quad (3.27)$$

Pour le quadripôle **J**, les fonctions de transfert à simuler sont :
 F^+ , F^- , K'_Δ , K''_Δ , K'''_Δ , K_1 , K_2 , N_{R1} , N_{R2} , M_{R1} et M_{R2} .

où l'indice (1 ou 2), spécifie le tronçon qui paramétrise les fonctions, (1) pour le tube droit ou (2) pour le pavillon.

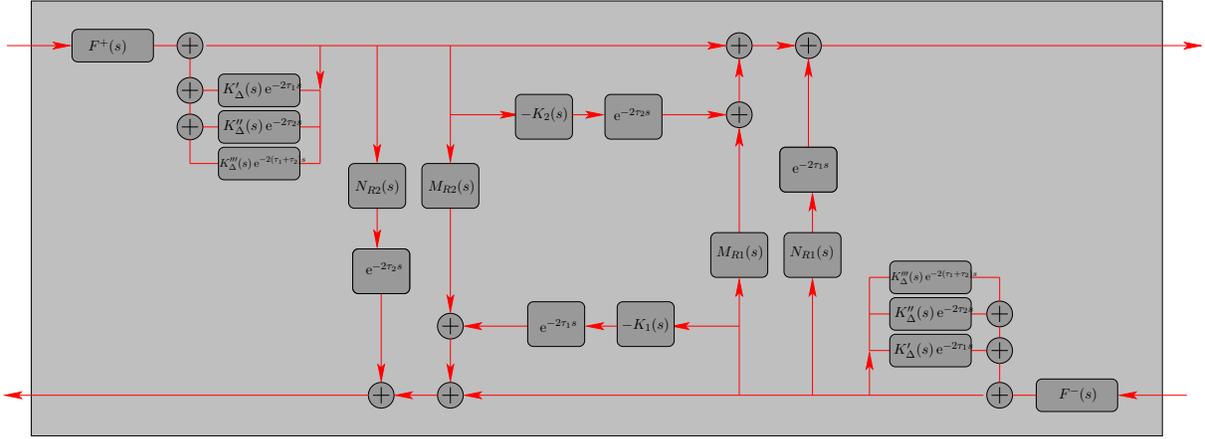


FIG. 3.24 – Détails du quadripôle simulable **J**

Quadripôle **B**

La fabrication du quadripôle **B** est plus délicate puisque ce quadripôle est la *fusion* de trois autres. Le détail de **B** s'obtient en exprimant les sorties de l'ensemble en fonction des entrées. Pour ce faire nous appliquons successivement, 2 fois, la transformation de 2 quadripôles concaténés A, B en un quadripôle équivalent C donné par la figure (3.25) :

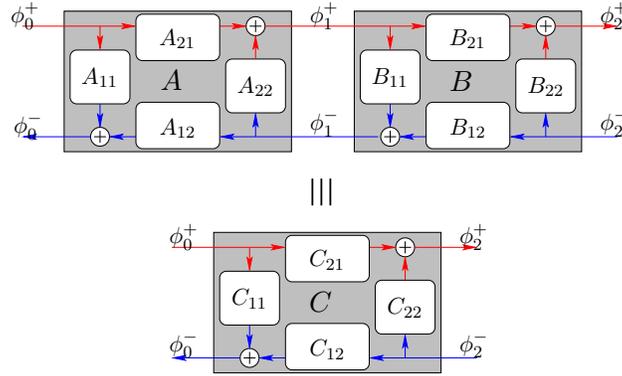


FIG. 3.25 – Fusion de deux quadripôles

$$C_{11} = A_{11} + \frac{A_{12}B_{11}A_{21}}{1 - A_{22}B_{11}}, \quad (3.28)$$

$$C_{12} = \frac{B_{12}A_{12}}{1 - A_{22}B_{11}}, \quad (3.29)$$

$$C_{21} = \frac{A_{21}B_{21}}{1 - A_{22}B_{11}}, \quad (3.30)$$

$$C_{22} = B_{22} + \frac{B_{12}A_{22}B_{21}}{1 - A_{22}B_{11}}. \quad (3.31)$$

En raison de la complexité des expressions à manipuler, nous avons utilisé le calculateur symbolique *Maple* qui nous a produit des expressions simplifiées qui exhibent les retards des

modules de **B**. Pour $r'(l=0) = 0$, on obtient finalement l'ensemble des fonctions de transfert à simuler pour le quadripôle **B** (cf. figure (3.26)).

$$B_{11}(s) = \frac{M_{b11}(s) + N_{b11}(s) e^{-2\tau_1 s}}{1 - K_b(s) e^{-2\tau_1 s}}, \quad (3.32)$$

$$B_{12}(s) = \frac{N_{b12}(s)}{1 - K_b(s) e^{-2\tau_1 s}}, \quad (3.33)$$

$$B_{21}(s) = \frac{M_{b21}(s) + N_{b21}(s) e^{-2\tau_1 s}}{1 - K_b(s) e^{-2\tau_1 s}}, \quad (3.34)$$

$$B_{22}(s) = \frac{N_{b22}(s)}{1 - K_b(s) e^{-2\tau_1 s}}, \quad (3.35)$$

avec :

$$K_b(s) = \frac{(E_2(s)Y_c + 1) N_{R1}(s) + (E_2(s)Y_c - 1) K_1(s)}{d(s)}, \quad (3.36)$$

$$d(s) = (E_2(s)Y_c - 1) + (E_2(s)Y_c + 1) M_{R1}(s), \quad (3.37)$$

$$N_{b22}(s) = \frac{(E_2(s)Y_c + 1) N_{T1}(s)}{d(s)}, \quad (3.38)$$

$$N_{b21}(s) = r_0 \frac{E_1(s)K_1(s)}{d(s)}, \quad (3.39)$$

$$M_{b21}(s) = -r_0 \frac{E_1(s)}{d(s)}, \quad (3.40)$$

$$N_{b12}(s) = \frac{2Y_c}{r_0} \frac{E_3(s)N_{T1}(s)}{d(s)}, \quad (3.41)$$

$$N_{b11}(s) = \left[(Y_c E_1(s) E_3(s) - (E_2(s) Y_c + 1) E_4(s)) N_{R1}(s) + (Y_c E_1(s) E_3(s) - (E_2(s) Y_c - 1) E_4(s)) K_1(s) \right] / d(s), \quad (3.42)$$

$$M_{b11}(s) = \left[(Y_c E_1(s) E_3(s) - (E_2(s) Y_c + 1) E_4(s)) M_{R1}(s) + (-Y_c E_1(s) E_3(s) + (E_2(s) Y_c - 1) E_4(s)) \right] / d(s), \quad (3.43)$$

et :

$$E_1(s) = \frac{2}{1 + s\tau_c} \quad (3.44)$$

$$E_2(s) = -S_0 \frac{(\tau_c/C_a) + (R_a\tau_c + M_a)s + M_a\tau_c s^2}{1 + s\tau_c}, \quad (3.45)$$

$$E_3(s) = \frac{S_0}{S_c} \frac{Z_c}{1 + s\tau_c}, \quad (3.46)$$

$$E_4(s) = \frac{1 - s\tau_c}{1 + s\tau_c}, \quad (3.47)$$

$$(3.48)$$

où $\tau_c = \frac{Z_c C_a}{S_c}$, S_0 et S_c sont les sections du tube droit et de la cuvette de l'embouchure, et $Y_c = 1/(Z_c)$.

Pour le quadripôle **B**, les fonctions de transfert à simuler sont :
 K_b , N_{b11} , M_{b11} , N_{b12} , N_{b21} , M_{b21} et N_{b22} .

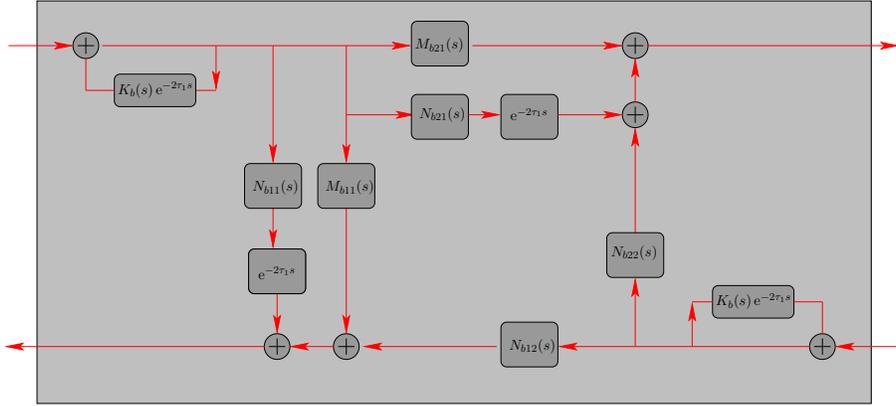


FIG. 3.26 – Détails du quadripôle simulable **B**

Quadripôle R_{ay}

En ce qui concerne le quadripôle R_{ay} , on procède de la même manière que précédemment. Le cas est plus simple puisque nous n'avons que deux quadripôles à fusionner et que la pression retour dans le pavillon est négligée.

$$T_{ray}(s) = \frac{N_{TS}}{1 - K_S(s) e^{-2\tau_2 s}} \quad (3.49)$$

$$R_{ray}(s) = \frac{N_{RS}}{1 - K_S(s) e^{-2\tau_2 s}} \quad (3.50)$$

avec :

$$K_S(s) = \left[((H(s) + 2)Y_c Z_{ray}(s) - 1) N_{R2}(s) - ((H(s) + 2)Y_c Z_{ray}(s) - 1) K_2(s) \right] / d(s), \quad (3.51)$$

$$d(s) = -(H(s) + 2)Y_c Z_{ray}(s) + 1) M_{R2}(s) - (H(s)Y_c Z_{ray}(s) - 1), \quad (3.52)$$

$$N_{TS}(s) = \frac{2Y_c Z_{ray}(s) N_{T2}(s)}{r_L d(s)}, \quad (3.53)$$

$$N_{RS}(s) = \frac{((H(s) + 2)Y_c Z_{ray}(s) - 1) N_{T2}(s)}{d(s)}, \quad (3.54)$$

où $H(s) = (s + c_0 r'(L)/r(L))/s$ et $Y_c = 1/Z_c$.

Pour le quadripôle **B**, les fonctions de transfert à simuler sont :
 K_S , N_{RS} et N_{TS} .

3.4.3 Vérification de la nouvelle structure par calcul d'impédance

A ce stade, il est utile d'utiliser le calcul d'impédance de l'instrument complet avec la nouvelle structure et de la comparer au modèle théorique exact de la structure initiale (avec boucles instantanées infinies), cf. figure(3.5). On trouve une erreur relative moyenne de l'ordre de 10^{-16} , ce qui signifie que le nouveau modèle est valide : l'infime différence provient d'erreurs de calculs en flottants dont la résolution de la mantisse est précisément $2^{-52} \approx 2.22 \times 10^{-16}$.

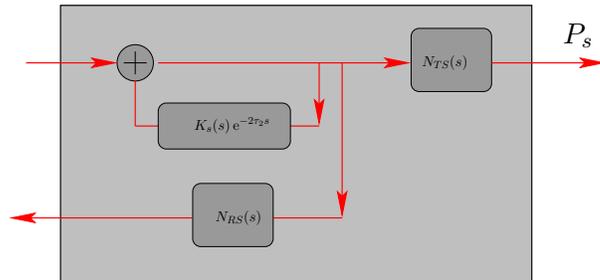


FIG. 3.27 – Détails du quadripôle simulable **Ray**

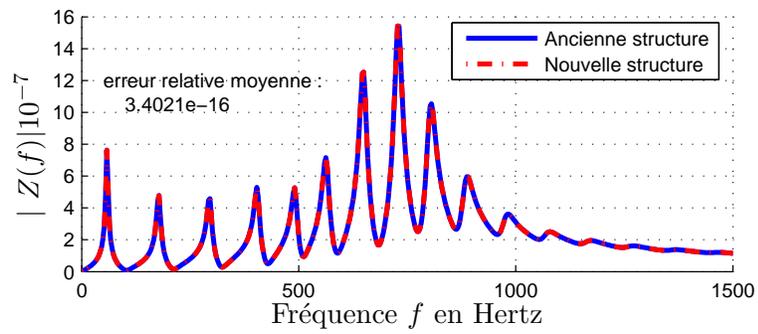


FIG. 3.28 – Comparaison des impédances calculées par l'ancienne et par la nouvelle structure

Chapitre 4

Approximation et réalisation du modèle approché

Maintenant que la structure simulable est déterminée (cf. partie 3.4), et que tous les outils nécessaires à l'approximation numérique sont connus (cf. partie 2), nous sommes en mesure de réaliser l'approximation globale de l'instrument dans le but de simuler le système numériquement. Les schémas détaillant les quadripôles du modèle contiennent des sous-fonctions et des retards. Comme nous l'avons expliqué en §2.2.1, si ces fonctions vérifient certaines conditions, alors elles admettent une représentation diffusive que nous pouvons approximer en un système de dimension finie. Si elles ne les remplissent pas, alors nous pouvons dans certains cas les étendre par dérivation et représenter leur extension par une représentation diffusive. Nous verrons dans un premier temps quelles fonctions admettent une représentation diffusive et quelles sont celles qui ne le peuvent pas, puis nous réaliserons leur approximation en temps continu et nous comparerons l'impédance de l'instrument complet par le modèle approché à celle de l'instrument exact (selon notre modèle théorique). Enfin nous numériserons les représentations diffusives et comparerons le résultat simulable au modèle exact.

4.1 Représentations diffusives de notre modèle

Les fonctions que nous devons approximer sont définies en partie (3.4.2). Elles sont les suivantes :

Quadripôle **J** : F^+ , F^- , K'_Δ , K''_Δ , K'''_Δ , K_1 , K_2 , N_{R1} , N_{R2} , M_{R1} et M_{R2} .

Quadripôle **B** : K_b , N_{b11} , M_{b11} , N_{b12} , N_{b21} , M_{b21} et N_{b22} .

Quadripôle **R_{av}** : K_S , N_{RS} et N_{TS} .

En ce qui concerne le quadripôle **J**, rappelons que l'indice 1 ou 2 spécifie le tronçon qui paramétrise les fonctions, (1) pour le tube droit ou (2) pour le pavillon.

En toute rigueur, pour savoir si chacune de nos fonctions admet ou pas de représentation diffusive, il faut calculer analytiquement $\mu(s)$ le long de chacune de leur coupure et s'assurer qu'il vérifie le critère de convergence (eq. 2.8). Ici, vu la complexité des expressions mathématiques, nous avons pu en faire l'économie en procédant de la façon suivante :

(i) Premièrement, nous avons vérifié que les coupures ne provoquent pas de singularités non intégrables, ou que s'il en existe, qu'elles représentent des pôles. Par exemple, les fonctions de l'embouchure ont trois singularités sur \mathbb{R}^- , mais celles-ci proviennent des fonctions $E_k(s)$ pour $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ (cf. §3.4.2) au dénominateur, elles sont de types pôles, et ne proviennent pas des représentations diffusives. Nous devons donc lors de l'approximation placer des pôles à ces endroits précis, en plus de ceux répartis de façon logarithmique le long des coupures, et calculer le poids μ_j par optimisation, comme les autres. En résumé, nous venons de parler de la vérification du critère (2.8) pour tout intervalle fini de \mathbb{R}^- dans le cas de la coupure sur \mathbb{R}^- , ou sur $s_k + \mathbb{R}^-$ entier pour les autres coupures horizontales. Nous avons pu vérifier que nos fonctions ne posent pas ce type de problème.

(ii) Deuxièmement il reste à vérifier la convergence de l'intégral à l'infini. Pour ce faire, nous avons exprimé le développement asymptotique de chacune de nos fonctions quand $|s| \rightarrow \infty$. Prenons l'exemple de $M_R(s) = -E(s) = -\frac{c_0\Gamma(s)-s}{c_0\Gamma(s)+s}$. Calculons le développement asymptotique de $\Gamma(s)$ quand $|s| \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned}
\Gamma(s) &= \sqrt{\left(\frac{s}{c_0}\right)^2 + 2\varepsilon\left(\frac{s}{c_0}\right)^{3/2} + \Upsilon} = \frac{s}{c_0} \sqrt{1 + 2\varepsilon\sqrt{\frac{c_0}{s}} + \Upsilon\left(\frac{c_0}{s}\right)^2} \\
&= \frac{s}{c_0} \sqrt{1+u} = \frac{s}{c_0} \left[1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + O(u^3)\right] \text{ pour } u \rightarrow 0, \\
&= \frac{s}{c_0} + \varepsilon\sqrt{\frac{s}{c_0}} + O(1),
\end{aligned}$$

pour $|s| \rightarrow \infty$. Ainsi, en remplaçant $\Gamma(s)$ par son développement asymptotique dans l'expression de $M_R(s)$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
M_R(s) &= -E(s) = -\frac{c_0\Gamma(s) - s}{c_0\Gamma(s) + s} = -\frac{c_0\left[\frac{s}{c_0} + \varepsilon\sqrt{\frac{s}{c_0}} + O(1)\right] - s}{c_0\left[\frac{s}{c_0} + \varepsilon\sqrt{\frac{s}{c_0}} + O(1)\right] + s} \\
&= -\frac{\varepsilon\sqrt{c_0s} + O(1)}{2s + \varepsilon\sqrt{sc_0} + O(1)} = -\frac{1}{2s} \frac{\varepsilon\sqrt{c_0s} + O(1)}{1 + \frac{\varepsilon\sqrt{c_0}}{2\sqrt{s}} + O\left(\frac{1}{s}\right)} \\
&= -\frac{1}{2} \frac{\varepsilon\sqrt{c_0}}{\sqrt{s}} + O\left(\frac{1}{s}\right). \tag{4.1}
\end{aligned}$$

Ce développement de $M_R(s)$ montre, d'après 2.5, que $\mu(s)$ vérifie bien le critère quand $|s| \rightarrow \infty$. En procédant de même, nous démontrons que les autres fonctions à simuler admettent aussi une représentation diffusive, exceptée $M_{b11}(s)$ dont le développement asymptotique en l'infini est :

$$M_{b11}(s) = 1 + O\left(\frac{1}{s}\right). \tag{4.2}$$

Cependant son extension par dérivation $\check{M}_{b11}(s) = (M_{b11}(s) - M_{b11}(0))/s$ admet bien une représentation diffusive. Nous devons donc étendre M_{b11} par dérivation pour la simuler.

4.2 Approximation des représentations diffusives

Lors de l'approximation de chacune des fonctions, nous avons dû déterminer le nombre de pôles du modèle à placer sur les coupures de sorte à avoir une approximation acceptable. Ces pôles sont répartis de façon logarithmique, comme il est expliqué §2.3. Notons que plus le nombre de pôles augmente plus le modèle approché se rapproche naturellement du modèle exact, mais plus la simulation nécessite de ressources CPU. La détermination du nombre de pôles est donc une étape longue puisqu'elle est réalisée empiriquement. Ajoutons que, afin de réduire le temps de calcul en temps réel, nous avons groupé les fonctions ayant la même entrée, afin de ne simuler qu'une fois les systèmes du premier ordre (2.51 et 2.52) des fonctions du groupe, puis l'application des poids (2.53) se fait fonction par fonction. Ainsi, nous avons dû placer les mêmes pôles pour toutes les fonctions d'un même groupe. Par exemple pour le quadripôle \mathbf{J} , nous avons groupé les fonctions : M_{R1} , N_{R1} et K_1 , voir figure (3.24).

Ajoutons que certaines fonctions présentent des pôles naturels ne provenant pas des représentations diffusives. Nous avons donc dû placer ces pôles et calculer leur poids par optimisation (simultanément à ceux répartis le long des coupures). Voyons le résultat obtenu (cf. figures (4.1), (4.2), (4.3) et (4.4)) sur deux de nos fonctions de transfert : $K_2(s)$ et $M_{b11}(s)$ (cf. annexe (A) pour les diagrammes de Bode des autres fonctions).

Calcul de l'impédance approchée Pour valider les approximations, une chose importante à faire est de vérifier l'impédance de l'instrument et les fonctions de transmission et de réflexion, afin d'apprécier qualitativement l'approximation globale du modèle. Les figures (4.5) et (4.6) montrent les résultats.

Les figures (4.5) et (4.6) nous permettent de valider qualitativement le système global pour les fréquences qui nous concernent. Remarquons que le seul écart important est en très basses fréquences, nous reviendrons sur ce problème en §4.3.

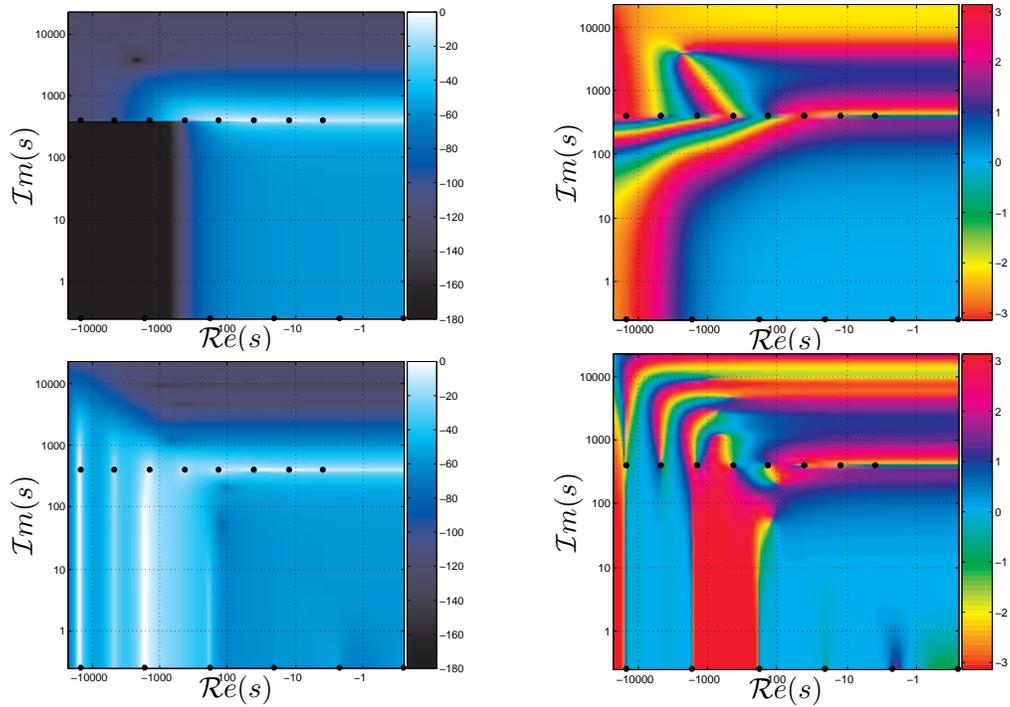


FIG. 4.1 – Affichage de $K_2(s)$ dans le demi-plan supérieur gauche de Laplace en échelle logarithmique. Les figures du haut sont le module et la phase de $K_2(s)$ exacte, les figures du bas sont le module et la phase de $\tilde{K}_2(s)$ approchée. Les pôles placés le long des coupures pour l'approximation sont représentés par les (*) noires.

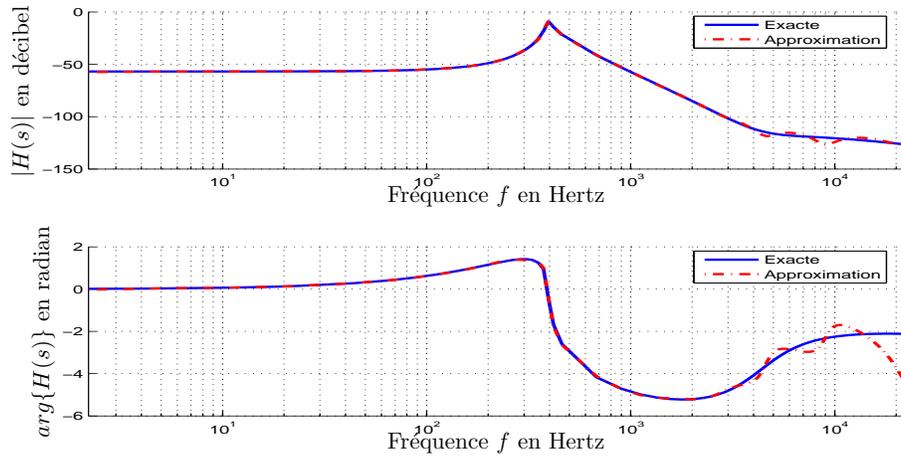


FIG. 4.2 – Diagramme de Bode de la fonction $K_2(s)$, exacte et approchée

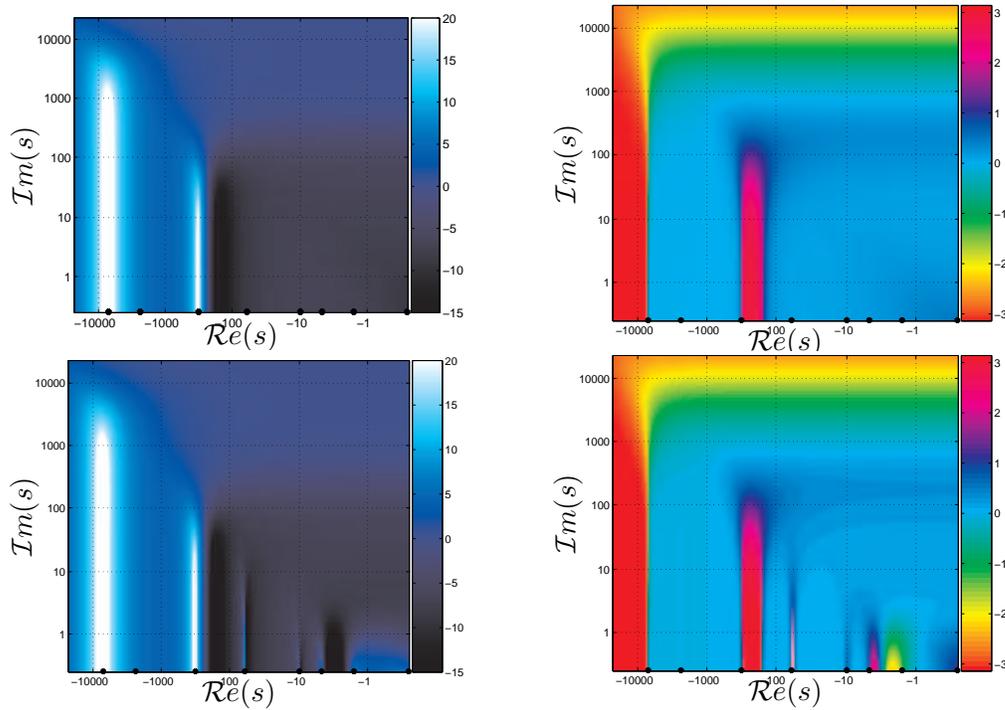


FIG. 4.3 – Affichage de $M_{b11}(s)$ dans le demi-plan supérieur gauche de Laplace en échelle logarithmique. Les figures du haut sont le module et la phase de $K_2(s)$ exacte, les figures du bas sont le module et la phase de $\tilde{M}_{b11}(s)$ approchée. Les pôles placés le long des coupures pour l'approximation sont représentés par les (*) noires.

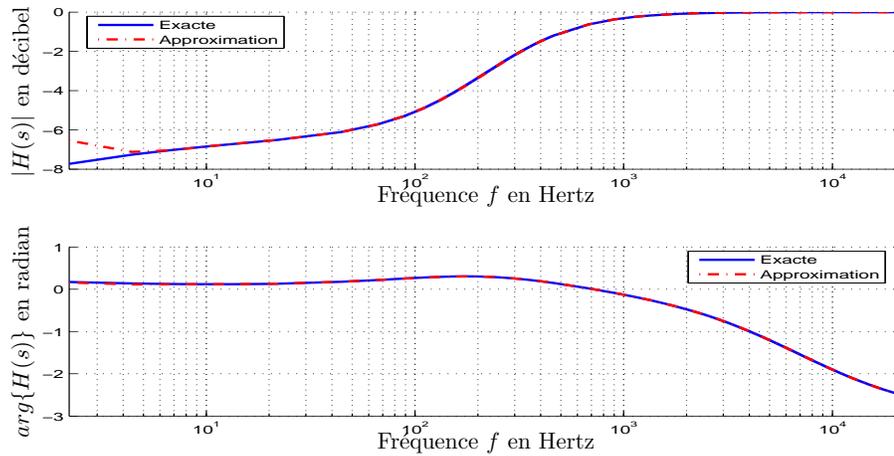


FIG. 4.4 – Diagramme de Bode de la fonction $M_{b11}(s)$, exacte et approchée

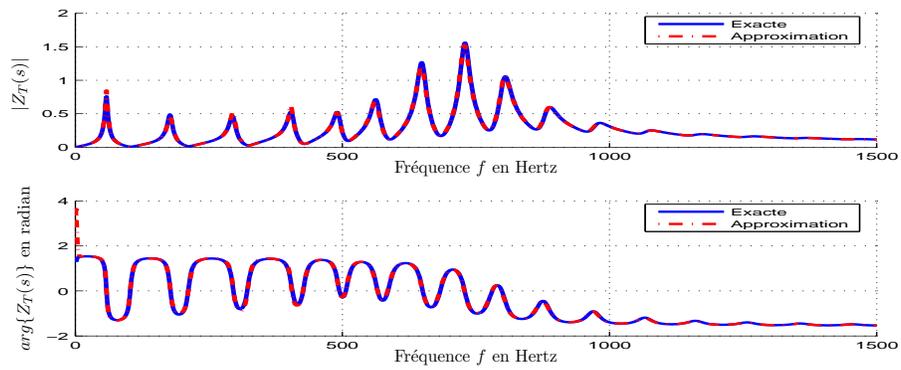


FIG. 4.5 – Impédance exacte et approchée de l'instrument

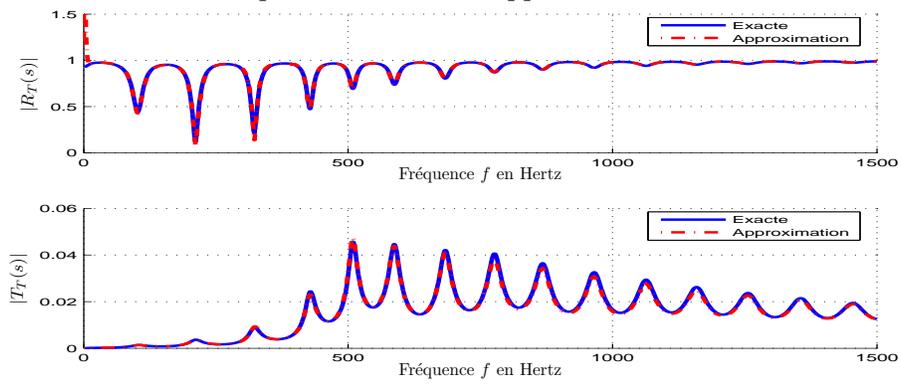


FIG. 4.6 – Fonctions de transfert de réflexion et de transmission de l'instrument, exactes et approchées

4.3 Mise en forme des systèmes discrets

Maintenant que les fonctions sont approximées dans le domaine de Fourier, nous avons besoin de mettre en forme les systèmes discrets à partir des modèles continus obtenus (cf. §2.3.2). Puisque l'interpolation d'ordre zéro, donne de mauvais résultats, nous préférons utiliser une interpolation linéaire qui atténue le repliement spectral par rapport à un BoZ. Les figures (4.7) et (4.8) montrent le résultat de la réponse fréquentielle des systèmes discrets par cette interpolation linéaire de l'entrée, échantillonnée à 44100Hz.

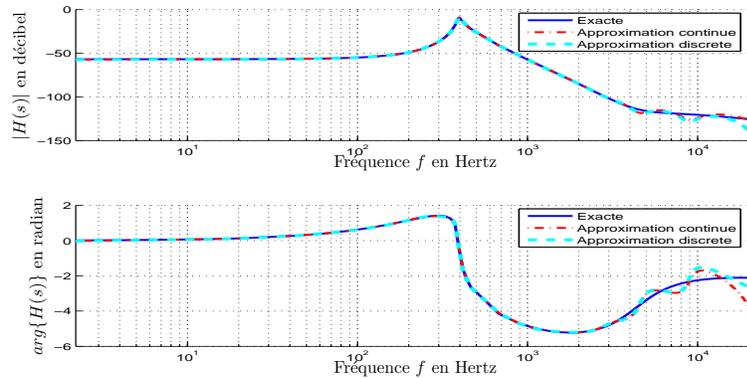


FIG. 4.7 – Diagramme de Bode de la fonction $K_2(s)$, exacte et approchée en continu et en discret

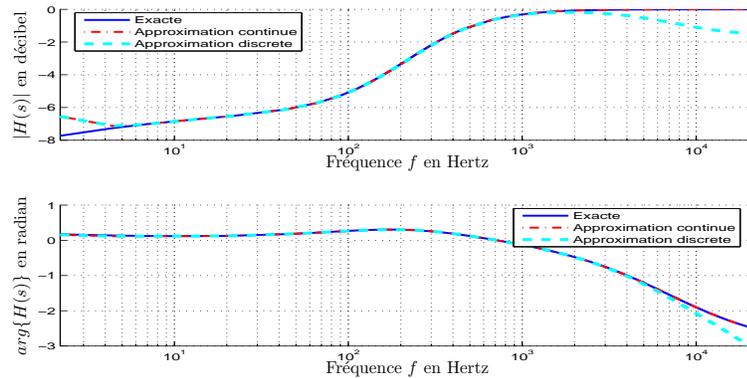


FIG. 4.8 – Diagramme de Bode de la fonction $M_{b11}(s)$, exacte et approchée en continu et en discret

Calcul de l'impédance approchée De la même façon, nous calculons l'impédance d'entrée de l'instrument via son modèle discret, ce qui nous permet de valider le système entier dans le domaine fréquentiel.

Problème en basses fréquences L'écart en basse fréquence a une double cause. D'une part le vecteur de l'optimisation $\{H(\omega_n)\}_{1 \leq n \leq N}$ commence à 20Hz ($\omega_1 = 20 \times 2\pi$), donc l'optimisation ne garantit rien dans les infra-sons. D'autre part, même en étendant le vecteur d'optimisation, l'approximation ne peut pas se rapprocher suffisamment du modèle exact :

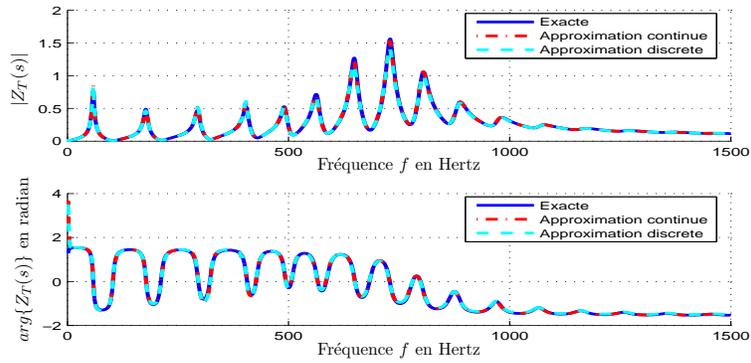


FIG. 4.9 – Impédance exacte et approchée (en continu et en discret) de l'instrument

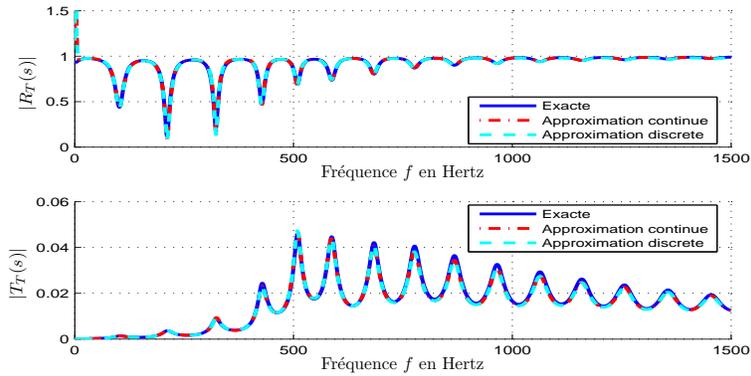


FIG. 4.10 – Fonctions de transfert de réflexion et de transmission de l'instrument, exactes et approchées en continu et en discret

plusieurs fonctions de transfert ont des dérivées infinies en 0, ce que notre système de dimension finie ne peut résoudre. Nous pourrions penser que ce phénomène en très basses fréquences a peu d'incidence sur notre perception. Mais lors de la simulation temporelle l'embouchure du système communiquera avec un système modélisant les lèvres (pas étudié ici) et une réflexion de gain en retour supérieur à 1 risque de provoquer une instabilité. Pour corriger simplement ce problème, nous avons choisi d'utiliser un filtre linéaire passe-haut dont la fréquence de coupure est de 15Hz environ. Le filtre choisi, et que nous appliquerons en temps réel sur le signal de la pression retour, est un filtre de Butterworth du quatrième ordre. Grâce à ce filtre, la réponse fréquentielle de la fonction de réflexion ne dépasse jamais 1 en gain. Une solution qui pourrait être satisfaisante sera esquissée en perspective.

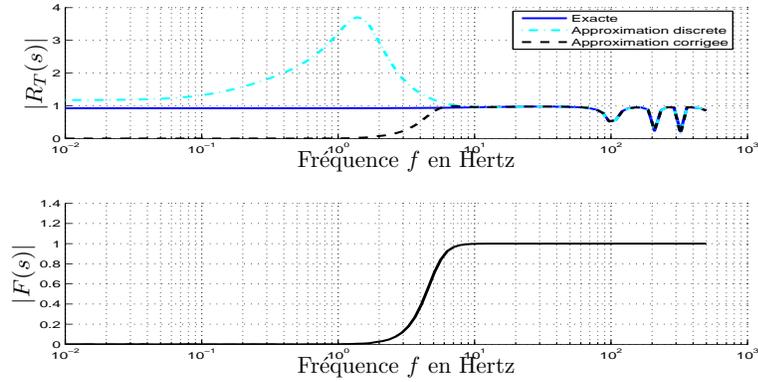


FIG. 4.11 – Courbes(1) Module des réflexions exacte, approchée et approchée avec correction par un filtre passe-haut. Courbe(2) Module du filtre de correction.

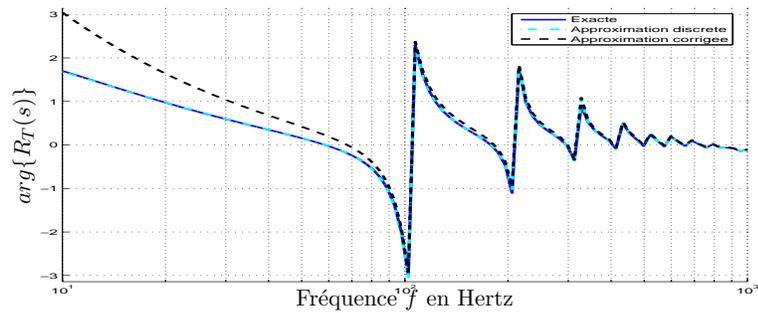


FIG. 4.12 – Phase des réflexions exacte, approchée et approchée avec correction par un filtre passe-haut. En raison de l'utilisation d'un filtre ARMA, bien que le module atteigne rapidement 1, la phase quant à elle est modifiée jusqu'à 80Hz environ, ce qui est gênant à l'audition lors des phases transitoires. L'utilisation d'un filtre de Cauer pourrait probablement atténuer ce déphasage.

4.4 Réalisation numérique et simulation temporelle

Nous avons réalisé un programme sous *matlab* permettant d'approximer chacune des fonctions à simuler, à partir du profil de l'instrument contenu dans un script. L'approximation et la numérisation des fonctions produisent les coefficients des filtres numériques : $\{a_j\}_{1 \leq j \leq J}$, $\{a'_k\}_{1 \leq k \leq K}$, $\{b_j\}_{1 \leq j \leq J}$, $\{b'_k\}_{1 \leq k \leq K}$, $\{p_j\}_{1 \leq j \leq J}$, $\{p'_k\}_{1 \leq k \leq K}$ et c (cf. §2.3.2). La simulation numérique mise en oeuvre débute par la construction de chaque filtre et de chaque quadripôle en récupérant ces coefficients. Par manque de temps, nous n'avons pas encore pu connecter notre modèle d'instrument au modèle de lèvres (cf. [Ver00]), nous n'avons donc pas pu réaliser de synthèse sonore à proprement parlé. Cependant pour valider la faisabilité du temps-réel à partir du travail effectué lors du stage, nous avons réalisé un système synthétisant les réponses $\{P_s(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ (pression en sortie du pavillon) et $\{P_e^-(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ (pression retour de l'embouchure) à partir d'un signal $\{P_e^+(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ (pression aller dans l'embouchure).

Nous avons programmé cette simulation sous Matlab et en langage C. Nous avons ainsi pu calculer numériquement les réponses impulsionnelles d'un instrument de type trompette naturelle, qui nous ont permis, à l'aide d'une transformée de Fourier calculée sous matlab, d'évaluer dans le domaine fréquentiel la qualité de notre simulation en comparant les réponses fréquentielles du système exact et à celles du modèle approché (du domaine fréquentiel). Les réponses impulsionnelles du système modélisant une trompette naturelle (cf. tableau (3.1) pour les paramètres de l'instrument) sont présentées figure (4.14) et la comparaison des réponses fréquentielles de $R_T(f)$ et de $T_T(f)$ sont présentée figure (4.15). On remarque que les réponses impulsionnelles tendent vers zéro en quelques millisecondes. De plus, on remarque que le filtre passe-haut permet de retrouver une réflexion à l'embouchure de gain inférieur à 1. Ceci permettra d'assurer la stabilité du système connecté au module des lèvres.

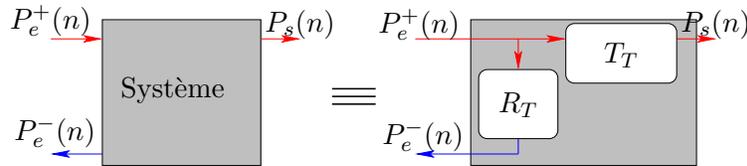


FIG. 4.13 – Système simulé équivalent

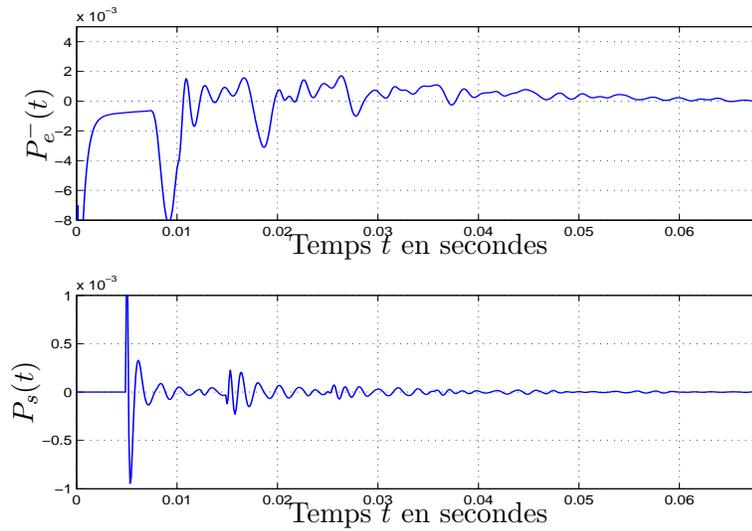


FIG. 4.14 – Réponses impulsionnelles de la réflexion et de la transmission de l'instrument

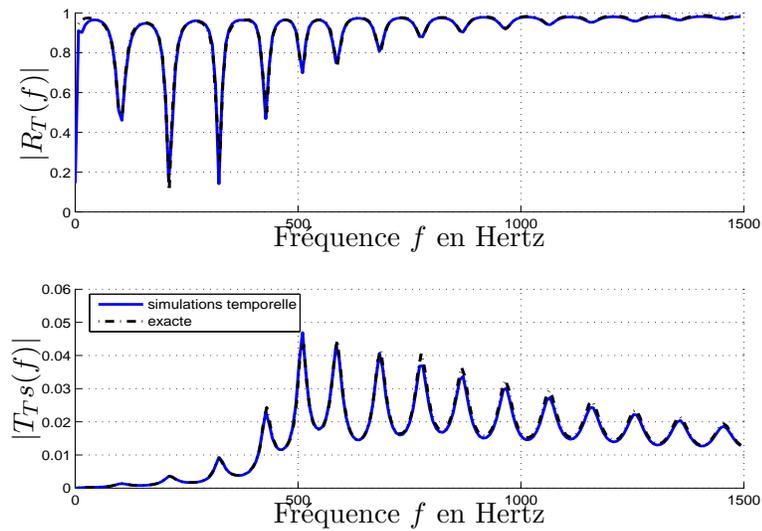


FIG. 4.15 – Réponses fréquentielles de la réflexion et de la transmission de l'instrument, par simulation temporelle et exacte

Conclusion

Résumé du travail effectué et des résultats obtenus

Après avoir vu tous les outils physiques et mathématiques utilisés, nous avons présenté successivement la *fabrication* de la structure modélisant l'instrument et l'approximation des fonctions de transfert pour la simulation numérique. La principale difficulté du travail a été de rendre simulable le modèle théorique (suppression des boucles instantanées sans retard, exhibition des retards dans les sous-systèmes, approximation en systèmes de dimension finie et numérisation des fonctions de transfert). Mais nous avons pu grâce à une comparaison des impédances de l'instrument à chaque étape du développement, valider l'approche.

Une version temps-réel de la simulation numérique a été développée en langage C à la fin du stage, et a été implémentée dans le logiciel de synthèse sonore *PureData*. Cette implémentation nous permet de calculer en temps-réel la réflexion et la transmission du système à un signal d'entrée quelconque. Cependant, par manque de temps, nous n'avons pas pu brancher le modèle de lèvres.

Perspectives

Le travail est loin d'être fini. Avant de pouvoir simuler tout type d'instruments de cuivre avec une configuration plus complexe, il sera nécessaire de développer le modèle :

- Premièrement, le modèle étudié dans le document concerne la propagation linéaire des ondes acoustiques, mais lorsque les ondes sonores dans le conduit acoustique sont suffisamment fortes, il apparaît des non-linéarités dans la propagation. Ce phénomène est appelé *effet de cuivrage* dans le cas des cuivres, et sa simulation permet de rendre la qualité de la synthèse plus convaincante. Le modèle à temps discret existe déjà, mais il est nécessaire de l'inclure dans notre modèle.

- Deuxièmement, nous ne nous sommes pas intéressés aux courbures négatives, ce qui est nécessaire pour envisager la simulation de tout type de géométrie. Ceci nécessitera de définir un autre état que (ψ^+, ψ^-) , car celui-ci n'assure pas la stabilité des fonctions de transfert pour des tubes à courbure négative.

- Troisièmement, puisque le développement en série entière des fonctions de transfert $R(s)$ et $T(s)$ sont des polynômes de $\Gamma(s)^2$, il est alors possible de retirer les deux coupures autres que \mathbb{R}^- et ainsi diminuer la complexité du système. Ceci pourra se faire en décomposant les fonctions de transfert de réflexion et de transmission des tronçons, $R(s)$ et $T(s)$, à l'aide d'un développement en série entière avec rayon de convergence infini, lors de la recherche des opérateurs sans retards et de l'exhibition des retards.

- Quatrièmement, il serait bien d'utiliser une solution plus propre pour éviter le gain supérieur à 1 en basses fréquences pour la fonction de réflexion totale du résonateur. Nous avons constaté que bien que les fonctions à approximer ont des valeurs finies en basses fréquences, certaines d'entre elles ont des dérivées premières infinies en 0, ce que nous ne pouvons pas simuler avec nos approximations, et ce sont ces petites différences qui provoquent

les problèmes en basses fréquences. Un moyen de résoudre ce problème serait d'imposer un comportement faux en basses fréquences sur les fonctions de transfert qui ont une dérivée infinie, mais qui permet par combinaison avec les autres fonctions de transfert de la structure de donner un résultat cohérent.

- Enfin, il est utile de modéliser les pistons d'une trompette, afin de pouvoir modifier la longueur du tube et donc la note de l'instrument. Ceci permettrait de jouer toutes les notes de la gamme chromatique.

Annexe A

Diagrammes de Bode des Fonctions simulables

Les courbes des fonctions exactes sont représentées en bleu traits plein, en rouge pointillé (---) sont représentées leur approximation dans Laplace, et en cyan pointillé (-.-) sont représentées les réponses impulsionnelles des modèles discrets avec une interpolation linéaire et avec un taux d'échantillonnage de 44100Hz.

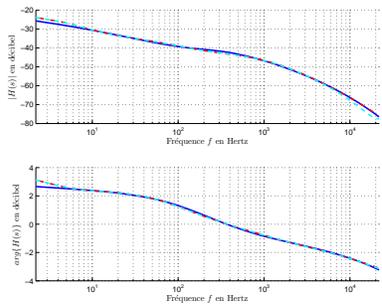


FIG. A.1 – Diagramme de Bode de $K_b(s)$

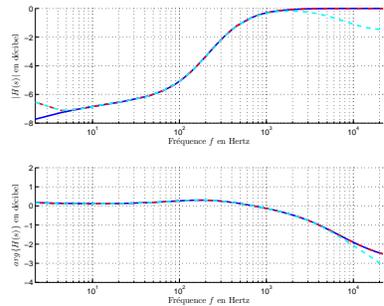


FIG. A.2 – Diagramme de Bode de $M_{b11}(s)$

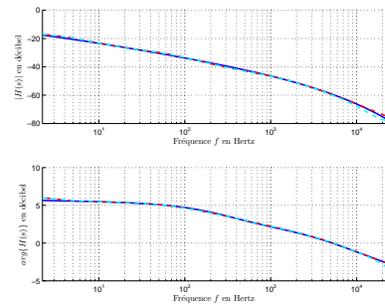


FIG. A.3 – Diagramme de Bode de $N_{b11}(s)$

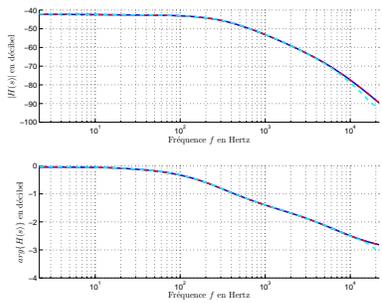


FIG. A.4 – Diagramme de Bode de $M_{b21}(s)$

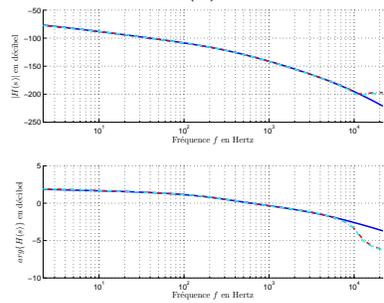


FIG. A.5 – Diagramme de Bode de $N_{b21}(s)$

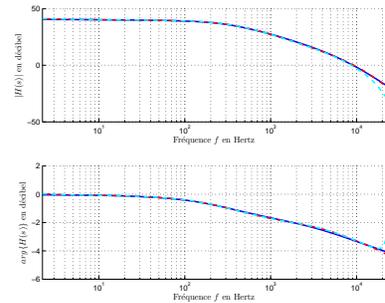


FIG. A.6 – Diagramme de Bode de $N_{b12}(s)$

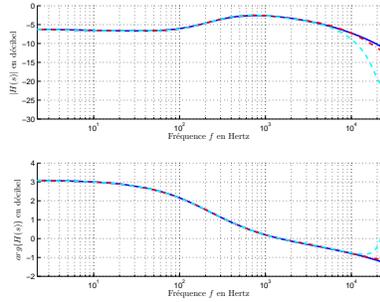


FIG. A.7 – Diagramme de Bode de $N_{b22}(s)$

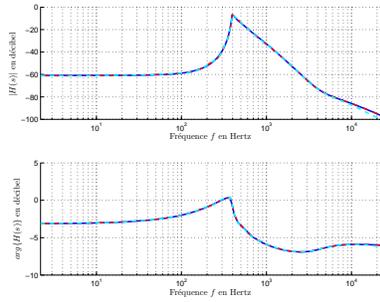


FIG. A.8 – Diagramme de Bode de $K_S(s)$

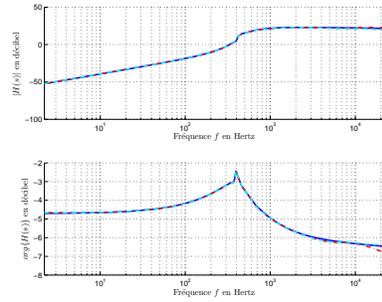


FIG. A.9 – Diagramme de Bode de $K_{TS}(s)$

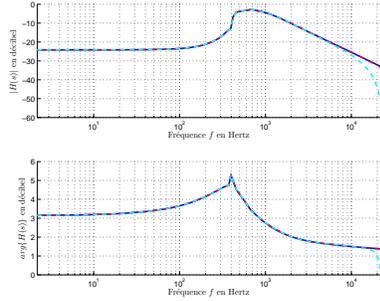


FIG. A.10 – Diagramme de Bode de $K_{RS}(s)$

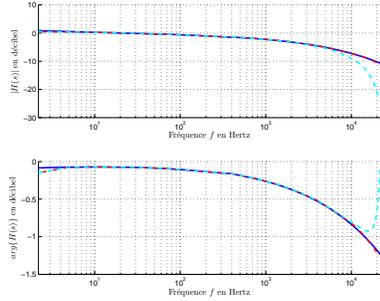


FIG. A.11 – Diagramme de Bode de $F^+(s)$

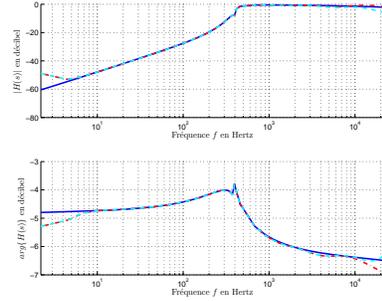


FIG. A.12 – Diagramme de Bode de $F^-(s)$

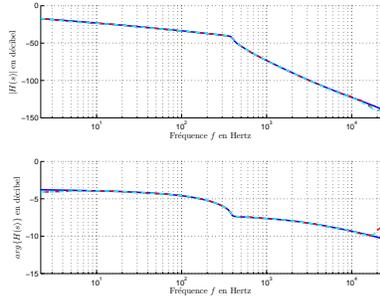


FIG. A.13 – Diagramme de Bode de $K'_\Delta(s)$

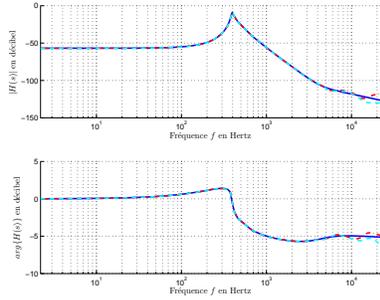


FIG. A.14 – Diagramme de Bode de $K''_\Delta(s)$

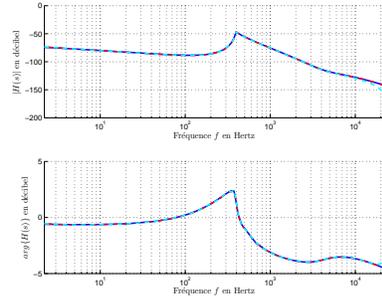


FIG. A.15 – Diagramme de Bode de $K'''_\Delta(s)$

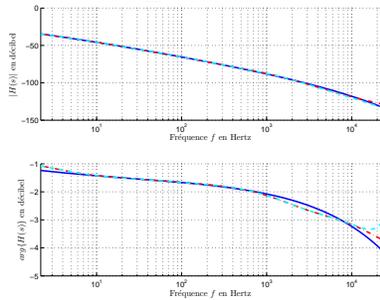


FIG. A.16 – Diagramme de Bode de $K_1(s)$

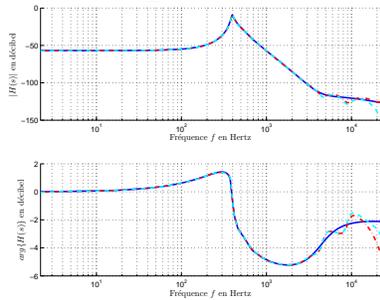


FIG. A.17 – Diagramme de Bode de $K_2(s)$

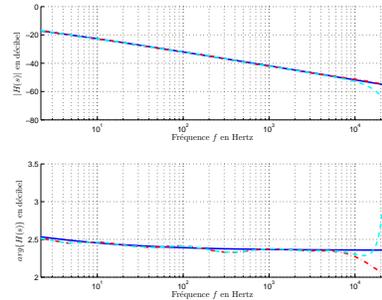


FIG. A.18 – Diagramme de Bode de $M_{R1}(s)$

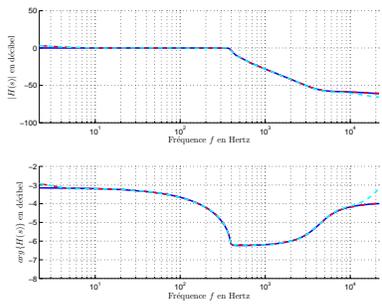


FIG. A.19 – Diagramme de Bode de $M_{R2}(s)$

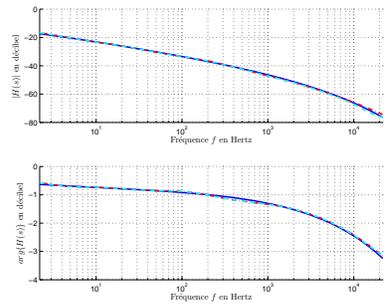


FIG. A.20 – Diagramme de Bode de $N_{R1}(s)$

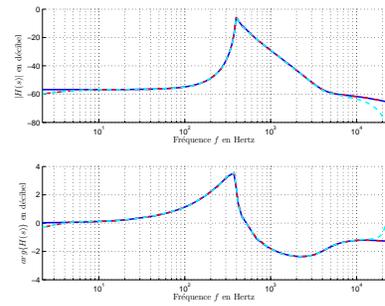


FIG. A.21 – Diagramme de Bode de $N_{R2}(s)$

Annexe B

Symboles Mathématiques et Constantes Physiques

Voici la signification des symboles mathématiques utilisés dans le document et les valeurs des constantes physiques que nous avons utilisées :

Symbol :	$\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$
Nom :	Dérivée partielle par rapport à x

TAB. B.1 – Tableau des symboles mathématiques

Symbol :	c_0	ρ	μ	κ_0
Nom :	célérité du son	masse volumique de l'air	viscosité de cisaillement	pertes viscothermiques
Valeur :	344	1.2	$1.8 \cdot 10^{-5}$	$3.5 \cdot 10^{-4}$
Unité :	m/s	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$	$\text{kg} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$	$\text{m}^{1/2}$

TAB. B.2 – Tableau des constantes physiques

Annexe C

Code Matlab de l'Optimisation

```
function [ mu_v, h_approx_v, cond_s ] = ...
    OptimMu( omega_v, poles_v, fct, varargin )

%OptimMu Approximation des fonctions de transferts par optimisation.
%
% [mu_v, h_approx_v, cond_s] = OptimMu( omega_v, poles_v, fct, varargin )
%
% Approximation de la fonction de transfert fct par un nombre fini de
% pôles, poles_v. On utilise une optimisation par les moindres carrés avec
% une pondération perceptive, sur les pulsations du domaine de Fourier,
% omega_v, avec paramètres de régularisation si nécessaires.
%
% L'optimisation produit le vecteur mu_v contenant le poids de chaque pôle
% du modèle.
%
% La symétrie est imposée, l'optimisation ne nécessite que les pôles à
% partie imaginaire positive, leur conjugué est automatiquement pris en
% compte.
%
% Remarque :
% Si la fonction est étendue par dérivation, son évaluation approchée
% retournée par h_approx est en réalité son extension par dérivation,
% Hbreve, et les poids des pôles sont ceux de son extension, cad
% MUBreve.
%
% Remarque :
% Afin d'être clair et de correspondre à l'article, le code n'est pas
% optimisé. Par exemple certaines matrices intermédiaires peuvent être
% réduites.
%
% Paramètres en entrée :
% omega_v : pulsations du domaine de fourier. (vecteur ligne)
% Attention, les pulsations doivent être dans l'ordre, et la dernière
% pulsation n'est pas directement utilisée.
% poles_v : position des pôles dans le plan complexe du modèle
% approché. (vecteur ligne)
% Les pôles complexes doivent être à partie imaginaire positive, leur
% conjugué est automatiquement pris en compte.
% fct : label de la fonction de transfert à optimiser.
% (syntaxe, "@nom_fonction"). Peut aussi être une fonction inline ou
% une chaîne de caractères.
% varargin : paramètres de la fonction de transfert (c'est à dire du ou
% des tronçons).
```

```

%
% Paramètres de sortie :
% mu_v      : poids associés à chaque pôle du modèle. (vecteur ligne)
% h_approx_v : évaluation de la fonction de transert approchée dans le
% domaine de Fourier défini par omega_v. (vecteur de même taille)
% cond_s    : rapport des valeurs singulières min/max. (scalaire)
%
% date de création      : 23 mars 2005
% Auteur : Thomas Hélie.
%
% dernière modification : 28 mai 2005
% Auteur : Rémi Mignot.
%

% Séparation des ksi (pôles réelles) et des gamma (pôles complexes) :
ind_ksi_v = find( [ imag( poles_v ) == 0, 0 ] );
ind_gamma_v = find( [ imag( poles_v ) ~= 0, 0 ] );

ksi_v = poles_v( ind_ksi_v );
gamma_v = poles_v( ind_gamma_v );

% Définition des constantes :
J = length( ksi_v(:) );
K = length( gamma_v(:) );
N = length( omega_v(:) ) -1;

% Définition de la matrice M :
omega_m = repmat( omega_v(1:N).', [1 , max(J,K) ] );
ksi_m = repmat( ksi_v, [N , 1 ] );
gamma_m = repmat( gamma_v, [N , 1 ] );

M = .5*[
    2./ ( i*omega_m(:,1:J) - ksi_m )          ...
    ,
    1./ ( i*omega_m(:,1:K) - gamma_m )        ...
    + 1./ ( i*omega_m(:,1:K) - conj( gamma_m ) ) ...
    ,
    i./ ( i*omega_m(:,1:K) - gamma_m )        ...
    - i./ ( i*omega_m(:,1:K) - conj( gamma_m ) ) ...
];
%

% Evaluation de la fonction de transfert exacte dans le domaine de Fourier:
H = Fct( fct, i*omega_v(1:N), varargin{:} ).'; % vecteur colonne

% Matrice de pondération W :
%Attention la pondération est paramétrée par H et non Hbreve!
mdw_v = sqrt( diff( log10( omega_v ) ) ).';
if( Fct(fct,'isExtended') == false ) wdh_v = 1./Sat( H, 80 );
else wdh_v = omega_v(1:end-1).'/Sat( H, 80 );
end

W = diag( sparse( mdw_v .* wdh_v ) );

% Si la fonction est étendue par dérivation, on remplace H par Hbreve :
if( Fct(fct,'isExtended') == true )
    H = ( H - Fct(fct,0,varargin{:} ) )./(i*omega_v(1:end-1)).';
end

```

```

%%
% Première diagonalisation sans régularisation :

% Diagonalisation par valeurs singulières :
[ U, S, V ] = svd( real( (M'*W')*(W*M) ) );

% Rapport du conditionnement :
cond_s = min( abs( diag(S) ) ) / max( abs( diag(S) ) );

%%
% Si mauvais conditionnement, on cherche les bornes pour la dichotomie :
if( cond_s < eps )
    lambda_min = 0;
    lambda = max( abs( diag(S) ) ) * eps;
    while( 1 )

        E = lambda * eye( J+2*K );
        [ U, S, V ] = svd( real( (M'*W')*(W*M) + E ) );
        cond_s = min( abs( diag(S) ) ) / max( abs( diag(S) ) );

        % Si le conditionnement est OK, on stocke la valeur de lambda_max.
        if( cond_s > eps )
            lambda_max = lambda;
            break;
        % Sinon on remplace "lambda_min" et on incrémente lambda.
        else
            lambda_min = lambda;
            lambda = lambda*2;
        end
    end

    % Critère d'arrêt sur lambda :
    precision = max(abs(diag(S)))*1e-20;

    %%
    % Dichotomie pour rechercher le lambda optimale :
    while( lambda_max - lambda_min > precision )

        lambda = .5*( lambda_max + lambda_min );

        E = lambda * eye( J+2*K );
        [ U, S, V ] = svd( real( (M'*W')*(W*M) + E ) );
        cond_s = min( abs( diag(S) ) ) / max( abs( diag(S) ) );

        if( cond_s > eps ) lambda_max = lambda;
        else lambda_min = lambda;
        end
    end

    % Diagonalisation avec le meilleur lambda :
    E = lambda_max * eye( J+2*K );
    [ U, S, V ] = svd( real( (M'*W')*(W*M) + E ) );

end

% Optimisation :
MU = ( V * inv(S) * U' ) * real( (M'*W')*(W*H) );

% évaluation de la fonction de transert approchée :
h_approx_v = M * MU;

```

```
% Retour des poids dans l'ordre des pôles :
mu_v = zeros( size( poles_v ) );
mu_v( ind_ksi_v ) = MU( 1:J );
mu_v( ind_gamma_v ) = MU( J+1:J+K ) + i*MU( J+K+1:J+2*K );

return;
```

Bibliographie

- [Bru98] M. Bruneau, *Manuel d'acoustique fondamentale*, Hermès, Paris, 1998.
- [Dun00] M. Dunau, *Représentations diffusives de seconde espèce : introduction et expérimentation*, Master's thesis, DEA d'Automatique, Toulouse, 2000.
- [FR91] N. H. Fletcher and T. D. Rossing, *Physics of musical instruments*, Springer Verlag, New York, 1991.
- [HHM03] H. Haddar, Th. Hélie, and D. Matignon, *A webster-lokshin model for waves with viscothermal losses and impedance boundary conditions : strong solutions*, 6th International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation Phenomena, INRIA, 2003, pp. 66–71.
- [Hél00] D. Héleschewitz, *Analyse et simulation de systèmes différentiels fractionnaires et pseudo-différentiels linéaires sous représentation diffusive*, Ph.D. thesis, Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications, 2000.
- [Hél02] Th. Hélie, *Modélisation physique des instruments de musique en systèmes dynamiques et inversion (Physical modeling of musical instruments with dynamic systems and inversion processes)*, Ph.D. thesis, Université Paris-Sud, Orsay, France, 2002.
- [Lur79] X. Lurton, *Etude analytique de l'impédance d'entrée des instruments à embouchure, application à la trompette et au trombone*, Ph.D. thesis, Université du Maine, 1979.
- [Mat94] D. Matignon, *Représentations en variables d'état de guides d'ondes avec dérivation fractionnaire*, Ph.D. thesis, Université Paris-Sud, 1994, appendix C.
- [TD06] T. Hélie and D. Matignon, *Diffusive representations for the analysis and simulation of flared acoustic pipes with visco-thermal losses*, Math. Models and Method in Applied Sciences (M3AS) **05** (2006).
- [Ver00] C. Vergez, *Trompette et trompettiste : un système dynamique non linéaire à analyser, modéliser et simuler dans un contexte musical*, Ph.D. thesis, Université de Paris VI, 2000.

