

STAGE DE MASTER 2, ATIAM

**MODELISATION**  
**DE RESONATEURS D'INSTRUMENTS A VENT**



Etudiant :  
Responsable de stage :  
Année :

MIGNOT Rémi  
HELIE Thomas  
2006



# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>4</b>
<b>Table des figures</b>	<b>5</b>
<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>1 Etat de l'art et outils</b>	<b>11</b>
1.1 Modèles de tubes acoustiques et équations des ondes . . . . .	12
1.1.1 Equation de Webster dans les cylindres . . . . .	12
1.1.2 Equation de Webster dans les cônes . . . . .	13
1.1.3 Equation de Webster-Lokshin avec pertes visco-thermiques et courbures	13
1.2 Représentations diffusives et approximations . . . . .	14
1.2.1 Notions d'analyse dans le plan complexe . . . . .	14
1.2.2 Analyse des singularités . . . . .	15
1.2.3 Représentations diffusives . . . . .	15
1.2.4 Approximation . . . . .	17
1.3 Présentation du travail effectué l'an passé . . . . .	17
1.3.1 Structure de base . . . . .	17
1.3.2 Réécriture des boucles instantanées . . . . .	18
1.3.3 Présentation de la structure simulable . . . . .	19
1.3.4 Problème des courbures négatives . . . . .	21
<b>2 Définition des ondes progressives stables</b>	<b>23</b>
2.1 Présentation . . . . .	24
2.1.1 Problème posé . . . . .	24
2.1.2 Contraintes . . . . .	24
2.2 Méthode . . . . .	26
2.2.1 Expression de la vitesse . . . . .	26
2.2.2 Expression de l'énergie . . . . .	26
2.2.3 Paramétrisation de la fonctionnelle $\mathcal{B}$ . . . . .	26
2.2.4 Equation de Webster . . . . .	26
2.2.5 Paramétrisation de la fonctionnelle $\mathcal{A}$ . . . . .	27
2.2.6 Symétrisation des ondes . . . . .	27
2.3 Résultats . . . . .	28
2.3.1 Décomposition en Ondes Planes . . . . .	28
2.3.2 Décomposition en ondes symétriques . . . . .	29

2.4	Mise en forme des quadripôles de base . . . . .	29
2.4.1	Ondes Planes . . . . .	29
2.4.2	Ondes Symétriques . . . . .	31
<b>3</b>	<b>Décomposition en sous-systèmes faible coût</b>	<b>33</b>
3.1	Mise en forme d'une structure de Kelly-Lochbaum . . . . .	34
3.1.1	Interprétation physique . . . . .	34
3.1.2	Identification des fonctions de transfert . . . . .	37
3.1.3	Ecriture des quadripôles aux interfaces de 2 tronçons . . . . .	39
3.2	Stabilité et causalité . . . . .	40
3.2.1	Stabilité pour les fonctions de transfert individuelles . . . . .	40
3.2.2	Causalité . . . . .	41
3.2.3	Stabilité globale d'une concaténation de tronçons . . . . .	42
3.3	Mise en forme de la structure simulable . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Proposition d'une structure pour la simulation de tronçons à courbures négatives</b>	<b>47</b>
4.1	Problèmes d'instabilités . . . . .	48
4.2	Décomposition en fonctions stables, avec modes internes . . . . .	48
4.2.1	Débouclage de la structure de base . . . . .	49
4.2.2	Séparation des pôles et des zéros en fonctions stables . . . . .	49
4.2.3	Stabilité des fonctions . . . . .	51
4.2.4	Causalité . . . . .	52
4.2.5	Réalisation numérique . . . . .	53
	<b>Conclusion</b>	<b>55</b>
	<b>A Symboles Mathématiques et Constantes Physiques</b>	<b>59</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>61</b>

# Table des figures

1.1	Phase de $\Gamma(s)$ dans le plan complexe . . . . .	16
1.2	Quadripôle de base . . . . .	18
1.3	Fonction $T(s)$ sous forme d'un système bouclé. . . . .	18
1.4	Fonction $R(s)$ sous forme d'un système bouclé. . . . .	18
1.5	Fusion de deux quadripôles . . . . .	19
1.6	Structure adaptée à la simulation temporelle, sans boucle instantanée infinie .	20
1.7	Détails du quadripôle simulable <b>J</b> . . . . .	20
3.1	Interprétation physique . . . . .	35
3.2	Structure associée à l'interprétation physique . . . . .	35
3.3	Quadripôle à l'interface de deux tronçons . . . . .	40
3.4	Structure sans décalage . . . . .	42
3.5	Structure avec décalage . . . . .	42
3.6	Structure avec normalisation . . . . .	43
3.7	Structure optimisée pour la simulation . . . . .	44
3.8	Résultats de calculs d'impédance. . . . .	45
4.1	Débouclage à la jonction de deux quadripôles de transfert . . . . .	49
4.2	Quadripôle de jonction simulé . . . . .	50
4.3	Représentation de Laplace de $H_{21}^z$ . . . . .	54
4.4	Réponse fréquentielle de $H_{21}^z$ en module. . . . .	54
4.5	Profil de la concaténation des 2 tronçons . . . . .	54



# Introduction

## Synthèse sonore et modélisation physique

Depuis leur création, les équipes de l'IRCAM, Analyse-Synthèse et Acoustique-Instrumentale, tentent de proposer aux musiciens des outils de synthèse sonore leur permettant de créer des sons naturels ou inouïs. Les techniques utilisées par l'ensemble des experts en synthèse sonore présentent chacune avantages et inconvénients :

- L'échantillonnage consiste à enregistrer les notes d'un instrument une à une et à les reproduire en temps voulu. La qualité sonore est très bonne aux dépens d'un manque de contrôle sur la synthèse du son et donc d'une reproduction convaincante de l'expression du musicien. Même si cette technique est utilisée par certains synthétiseurs, elle n'est pas à proprement parler une synthèse.

- La synthèse par modèles mathématiques abstraits, tels que la synthèse soustractive ou la synthèse par modulation de fréquence, permet un contrôle plus fin des paramètres de synthèse mais fournit des sons "électroniques", dont le manque de naturel est reconnaissable. Cependant elle a connu un grand succès concrétisé par les synthétiseurs *Moog*, pour la synthèse soustractive dans les années 70, et par les synthétiseurs *DX-7* pour la synthèse FM dans les années 80.

Puisque l'obtention de transitoires d'attaque réalistes est particulièrement difficile avec ce dernier type de synthèse, aujourd'hui beaucoup de synthétiseurs utilisent une synthèse hybride de ces deux types. L'attaque est produite par la lecture d'un son pré-enregistré, et la partie tenue est synthétisée par un modèle mathématique. Malheureusement il reste des manques en ce qui concerne les transitions entre deux notes consécutives.

- La synthèse par modèles physiques consiste à modéliser l'instrument mathématiquement puis numériquement, à l'aide d'une étude théorique la plus complète possible du phénomène physique de sa production sonore.

Ce dernier type de synthèse permet la réalisation d'outils informatiques de *lutherie virtuelle* pouvant conduire à une synthèse "physiquement censée" d'instruments inexistant. Elle peut alors servir aux luthiers à "prédire" numériquement les résultats produits par une modification de la fabrication de l'instrument. La réalisation numérique permet ainsi un gain de temps et d'argent comparé à la réalisation "matérielle", dans la recherche d'instruments plus performants. Dans le cadre de l'IRCAM, ce type de synthèse est utilisé par le logiciel *Modalys* qui permet aux compositeurs de fabriquer pour leurs pièces des instruments *imaginaires*.

Les industriels de l'informatique musicale s'intéressent de plus en plus à ce type de synthèse. En effet, puisqu'ils modélisent le fonctionnement interne de l'instrument, ils produisent des transitoires d'attaques et des transitions de notes consécutives beaucoup plus convaincantes que tous les autres types de synthèses. Parmi les produits commerciaux, nous pouvons citer le *VL1* de *Yamaha*, commercialisé en 1994, et le logiciel *BRASS* d'*Arturia* commercialisé récemment dont le rendu pour les sons de trompettes est remarquable. Précisons que le logiciel *BRASS* s'appuie sur le modèle de *Winset* développé par les chercheurs de l'IRCAM.



## Sujet du stage

Ce stage fait suite à un stage que j'ai effectué l'an dernier, au sein de l'équipe *Analyse-Synthèse* de l'IRCAM sous l'encadrement de Thomas Hélie, dans le cadre de mon master 1 d'acoustique *SDI-MIS* de Paris 6. Il portait sur la simulation de propagation d'ondes dans les tubes évasés pour la synthèse sonore d'instrument à vent. Il avait abouti à un modèle complexe d'instrument de cuivre simple, de type trompette droite, et à sa simulation temporelle en temps-réel sous le logiciel *Pure-Data*. Cependant, le modèle obtenu souffrait de deux principaux manques : premièrement, en raison d'instabilités dans les tubes à courbures négatives nous étions restreints à modéliser les courbures positives, par exemple les pavillons. Deuxièmement, même si le modèle a été validé par la simulation, la structure en guide d'ondes obtenue est très complexe.

Par conséquent ce second stage a porté sur la simulation de propagation d'ondes dans les tubes à courbures quelconques et sur l'optimisation du modèle, toujours dans le but de réaliser la simulation en temps-réel. Précisons que d'une part seul le résonateur a été étudié, et non l'excitateur pourtant indispensable pour la synthèse sonore, et d'autre part seul le comportement linéaire est considéré, les non-linéarités du tube sont actuellement en étude par un autre stagiaire.

Les techniques déjà existantes de synthèse d'instruments à vent par modèles physiques utilisent pour la plupart une modélisation du tube acoustique par une concaténation de tubes cylindriques ou coniques, les ondes s'y propageant sont alors considérées comme planes ou sphériques respectivement. En faisant tendre la longueur des tubes élémentaires vers une valeur infinitésimale, nous pouvons obtenir une caractérisation des ondes par l'équation de *Webster*. D'autres modélisations consistent à mesurer sur l'instrument la réponse impulsionnelle du résonateur et à la simuler par convolution temporelle pour la première réflexion et par une boucle à retard pour les réflexions successives. Ce type de modélisation et très performant mais n'est pas paramétrique, il n'est donc pas possible de modéliser des instruments inexistantes.

Le modèle développé lors du stage a l'avantage, par rapport à ces prédécesseurs, de ne pas imposer la forme des isobares dans le tube. De plus, ce modèle est paramétrique et permet donc l'obtention d'un instrument virtuel à partir des données physiques et géométriques.

La principale difficulté a été la stabilisation du système simulant les tubes à courbures négatives. Malheureusement, nous ne sommes pas parvenus à obtenir à la fois un système optimisé et stable dans ce cas, ainsi nous proposerons un système optimisé mais instable avec les courbures négatives, et un système stable cependant très complexe.

## Plan du document

Le document est organisé comme suit :

La première partie présente l'état de l'art et les outils qui seront utilisés lors du travail. Nous verrons les précédents modèles de résonateurs d'instruments à vent, et dont notre modèle

est en quelque sorte le successeur. Suivra la présentation d'un formalisme mathématique intéressant, les *représentations diffusives*, dans le cas de la modélisation des pertes viscothermiques. Enfin, nous rappellerons les résultats du travail de l'an dernier.

Dans la deuxième partie nous effectuerons la décomposition de la pression acoustique en ondes progressives causales et stables. Notre démarche s'intéressera aux décompositions qui assurent la stabilité des ondes, en utilisant un critère basé sur l'énergie acoustique.

Nous verrons dans la troisième partie comment nous avons pu obtenir une structure optimisée par une interprétation physique des phénomènes acoustiques et une identification pour faire le lien avec les résultats mathématiques. Nous verrons que cette nouvelle structure, dite de *Kelly-Lochbaum*, présente non seulement l'avantage d'un gain en temps de calculs numériques, mais permet également de réutiliser des résultats existants pour ce type de structures.

Dans la quatrième partie nous verrons en quoi la précédente structure n'est pas réalisable numériquement dans le cas des courbures négatives. Nous ferons alors une proposition d'une structure stable mais complexe, basée sur l'analyse des modes internes aux tronçons de tube.

## Chapitre 1

# Etat de l'art et outils

Avant de décrire le travail effectué durant le stage, nous allons présenter les différents outils théoriques que nous aurons à utiliser par la suite. Dans un premier temps les équations d’ondes dans les tubes à section variable seront présentées, nous finirons par l’équation aux dérivées partielles prenant en considération à la fois la courbure du tube et les pertes viscothermiques. Comme nous le verrons ces pertes engendrent des difficultés, nous introduirons alors le formalisme des représentations diffusives, ainsi que leur approximation en vue d’une simulation numérique. Enfin sera présenté le travail effectué l’an passé, et qui portait uniquement sur les tubes à courbure positive.

## 1.1 Modèles de tubes acoustiques et équations des ondes

La propagation d’ondes dans les tubes acoustiques est un problème à trois dimensions de l’espace. Cependant, pour des raisons de simulabilité en temps-réel, il est préférable de réduire ce nombre de dimensions. En considérant des tubes à symétrie de révolution, le problème se réduit à deux dimensions. Nous allons voir dans cette première partie les différentes solutions qui ont été proposées pour réduire le nombre de dimensions à une dimension. Ces différentes réductions de modèles permettent de représenter les propagations d’ondes longitudinales mais ne tiennent pas compte des modes transversaux. Cependant, en raison des faibles rayons des tubes des instruments de musique, de l’ordre du centimètre dans la partie cylindrique, ces modèles constituent une très bonne approximation puisque les modes transversaux apparaissent en hautes fréquences, d’autant plus hautes que le rayon est faible. De plus, le fonctionnement de l’instrument est principalement produit par les premiers modes, par le couplage non-linéaire avec l’excitateur.

### 1.1.1 Equation de Webster dans les cylindres

Une première modélisation des tubes acoustiques est obtenue en approchant le tube par une fonction constante par morceaux. C’est-à-dire que des portions de tube cylindriques sont concaténées les unes aux autres et que les ondes se propageant sont de type *ondes planes*.

Denis Matignon dans [Mat94], a concaténé des cylindres dont la longueur est égale à la distance parcourue par l’onde acoustique durant une période d’échantillonnage. Ainsi la simulation de la propagation d’onde dans le tronçon, se réduit par un simple retard d’un échantillon, pondéré par un filtre linéaire simulant les pertes viscothermiques, de fonction de transfert :  $H(s) = e^{-\epsilon\sqrt{s}}$ , où  $\epsilon$  est proportionnel au coefficient des pertes viscothermiques. Avec des coefficients de réflexion et de transmission aux interfaces de deux tronçons successifs dépendant du saut de section et assurant la continuité du débit, il finit par l’obtention d’une structure de filtre en treilli.

Une équation des ondes peut être établie en faisant tendre la longueur des tronçons vers zéro : nous obtenons alors l’équation des pavillons, dénommées parfois *équation de Webster*, pour des tubes à section variable pour une hypothèse d’ondes planes.

$$\left[ \frac{1}{c_0^2} \partial_t^2 - \frac{2R'(z)}{R(z)} \partial_z - \partial_z^2 \right] [p(z, t)] = 0, \quad (1.1)$$

où  $z$  est l’abscisse sur l’axe de révolution,  $p(z, t)$  la pression acoustique à l’abscisse  $z$ ,  $R(z)$  est le rayon du tube et  $c_0$  est la célérité du son. Précisons qu’ici, les pertes sont négligées.

### 1.1.2 Equation de Webster dans les cônes

Une amélioration du modèle précédent est de ne plus considérer une concaténation de cylindres, mais de cônes. Les ondes qui s’y propagent sont alors à symétrie sphérique.

Dans [Duc01], Eric Ducasse propose une démarche proche de celle de [Mat94], mais le profil du tube est approximé par une fonction affine par morceaux, avec un raccord de classe  $C^0$ , c’est-à-dire avec une continuité de section mais une discontinuité de conicité. Les isobares sont alors de type sphérique et perpendiculaire à la paroi.

De même il est possible d’obtenir une équation aux dérivées partielles caractérisant l’onde acoustique dans des tubes à section variable pour des ondes à symétrie sphérique. Nous obtenons la même équation que la précédente, mais cette fois-ci la coordonnée de l’espace n’est plus l’abscisse du tube  $z$ , mais le point d’intersection de l’isobare (sphérique) avec l’axe de révolution  $\xi$  (cf. [JAK99]).

$$\left[ \frac{1}{c_0^2} \partial_t^2 - \frac{2\tilde{R}'(\xi)}{\tilde{R}(\xi)} \partial_\xi - \partial_\xi^2 \right] [p(\xi, t)] = 0. \quad (1.2)$$

Même si ce modèle est un raffinement du précédent, il reste quelques problèmes d’interprétation physique. En effet, au raccord de deux cônes, la discontinuité de conicité entraîne que les isobares de part et d’autre de l’interface ne sont pas confondues. Dans le cas d’une conicité croissante, ceci impliquerait que des zones de tube (aux interfaces des tronçons) n’ont pas d’état acoustique.

De plus, les deux équations de Webster présentées ci-dessus sont conservatives.

### 1.1.3 Equation de Webster-Lokshin avec pertes visco-thermiques et courbures

Pour réduire le problème posé à un problème mono-dimensionnel, dans [Hél02], Thomas Hélie propose d’indexer les isobares, et en faisant une approximation d’ondes quasi-sphériques à la paroi, il obtient une équation de Webster qui ne suppose pas une géométrie figée des isobares. Précisons que l’hypothèse de quasi-sphéricité postule que les isobares tendent au niveau de la paroi vers une symétrie sphérique jusqu’à l’ordre 2. Comparé au précédent modèle, cette hypothèse est moins restrictive puisqu’elle n’impose rien sur les dérivées  $n$ -ième pour  $n > 2$  et que les isobares peuvent a priori avoir une allure quelconque à l’intérieur du tube. L’équation obtenue, sans pertes, est l’équation de Webster pour laquelle la variable de l’espace est l’abscisse curviligne à la paroi  $l$ .

Une version de cette équation incluant un terme dû aux pertes visco-thermiques à la paroi a été également établie. Elle prend en compte l’impédance acoustique à la paroi du tube (cf. [Bru98, pages 112-115]). Cette nouvelle équation aux dérivées partielles est baptisée : *Equation de Webster-Lokshin*. Cette équation caractérise les ondes longitudinales dans des tubes à section variable avec courbure non nulle, en présence de pertes visco-thermiques. Elle s’écrit :

$$\left[ \left( \frac{1}{c_0^2} \partial_t^2 + \frac{2\varepsilon(l)}{c_0^{\frac{3}{2}}} \partial_t^{\frac{3}{2}} + \Upsilon(l) \right) - \partial_l^2 \right] [r(l)p(l, t)] = 0, \quad (1.3)$$

où  $\varepsilon(l) = \kappa_0 \frac{\sqrt{1-r'(l)^2}}{r(l)}$  quantifie les pertes visco-thermiques,  $r(l)$  est le rayon du tube en fonction de l'abscisse curviligne sur sa paroi,  $\Upsilon(l) = r''(l)/r(l)$  est la courbure du tube.

Dans la suite du travail nous serons amenés également à utiliser l'équation de conservation des moments, dites *Equation d'Euler* :

$$\rho_0 \partial_t v(l, t) + \partial_l p(l, t) = 0, \quad (1.4)$$

valable hors des couches limites.

## 1.2 Représentations diffusives et approximations

Comme nous le verrons au chapitre 2, l'équation de Webster-Lokshin (équation 1.3) fait apparaître une fonction,  $\Gamma(s)$  dans le domaine de Laplace, définie par son carré de la façon suivante :

$$\Gamma(s)^2 = \left(\frac{s}{c_0}\right)^2 + 2\varepsilon \left(\frac{s}{c_0}\right)^{\frac{3}{2}} + \Upsilon. \quad (1.5)$$

L'apparition de la racine carrée dans le plan complexe pose des problèmes de définition univoque de la fonction. Dans ce qui suit nous introduisons quelques notions d'analyse dans le plan complexe et leur conséquence dans notre cas. Puis nous présentons la notion de *représentations diffusives* qui est un outil mathématique particulièrement bien adapté à l'étude de notre problème. Enfin, nous donnons un moyen d'approcher efficacement ces représentations en vue de la simulation numérique.

### 1.2.1 Notions d'analyse dans le plan complexe

La plupart des fonctions complexes sont définies en prolongeant les propriétés qu'elles ont dans  $\mathbb{R}$ . Par exemple la fonction carrée  $f(x) = x^2$  est une fonction au sens habituel et son prolongement dans  $\mathbb{C}$  est immédiat. Mais il en est autrement de sa fonction inverse  $g(x) = \sqrt{x}$ . A une valeur  $y$  de la fonction  $f(x)$ , correspondent deux antécédents  $g(y) = \sqrt{y}$  et  $g(y) = -\sqrt{y}$ . Autrement dit la racine carrée possède deux *branches* (ou *déterminations*) et on doit en choisir une pour définir une application. En utilisant la représentation polaire d'un nombre complexe  $z = \rho e^{i\theta}$ , une définition *naturelle* de sa racine est :

$$\sqrt{z} = \sqrt{\rho} e^{i\frac{\theta}{2}}.$$

Mais alors que le changement  $\theta \mapsto \theta + 2\pi$  laisse  $z$  invariant, il change le signe de sa racine. Ainsi on dit que la racine carrée est *bivalente* contrairement à une application qui est, par définition, *univalente* (ou *univoque*). Lorsque l'on fait varier  $\theta$  de 0 à  $2\pi$ ,  $z$  décrit un cercle autour de l'origine, et l'argument de sa racine augmente de  $\pi$ , d'où un changement de signe. Ainsi, en tournant une fois autour de l'origine nous passons d'une détermination à une autre. Pour définir la racine carrée de façon univoque, il faut s'interdire de tourner plus d'un tour autour de l'origine et définir une frontière appelée *coupure*. Cette coupure relie l'origine, que

l'on appelle *point de branchement*, à un point à l'infini. Parmi les choix (infinis) une coupure simple est par exemple une demi-droite.

On peut définir une fonction racine carrée  $z = \rho e^{\theta} \mapsto y$  par l'angle  $\theta_0$  de la coupure par rapport à l'axe  $\mathbb{R}^+$  :

$${}^{\theta_0}\sqrt{z} = {}^{\theta_0}\sqrt{\rho e^{\theta}} \triangleq \sqrt{\rho} e^{i\frac{\theta}{2}}, \quad \forall \rho \in \mathbb{R}^+ \text{ et } \forall \theta \in [\theta_0, \theta_0 + 2\pi[ .$$

Dans le cas de la racine carrée, la fonction est continue et infiniment dérivable pour tout complexe non nul dont l'argument appartient à  $] \theta_0, \theta_0 + 2\pi [$ , mais on observe une discontinuité le long de la coupure, c'est-à-dire pour  $\theta = \theta_0$ , caractérisée par un changement de signe.

### 1.2.2 Analyse des singularités

Pour  $\Upsilon > 0$ , la fonction  $\Gamma(s)$  a trois points de branchement : en 0, qui vient du  $s^{\frac{3}{2}}$ , et deux autres,  $s_1$  et  $s_2$ , qui sont racines de :

$$\Gamma(s)^2 = \left(\frac{s}{c_0}\right)^2 + 2\varepsilon \left(\frac{s}{c_0}\right)^{\frac{3}{2}} + \Upsilon = 0. \quad (1.6)$$

Pour des raisons de causalité et de stabilité du système, la fonction  $\Gamma(s)$  ne doit présenter aucune singularité dans le demi-plan complexe droit. Dans le cas des courbures positives ou nulles,  $\Upsilon \geq 0$ ,  $s_1$  et  $s_2$  appartiennent au demi-plan gauche, il suffit alors de choisir des coupures qui partent de ces points et se dirigent vers la gauche. On définit la première coupure partant de l'origine par :  $e^{i\theta_0} \mathbb{R}^+$ , et les deux autres par :  $s_k + e^{i\theta_k} \mathbb{R}^+$ ,  $\forall k \in \{1, 2\}$ . Avec comme condition pour la stabilité :  $\theta_k \in \left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right]$ ,  $\forall k \in \{0, 1, 2\}$ .

Pour que la fonction  $\Gamma(s)$  ait un sens physique, sa réponse impulsionnelle doit être réelle et donc sa transformée de Laplace doit être à symétrie hermitienne. Cette remarque impose alors que les coupures, en plus d'appartenir au demi-plan gauche pour la stabilité, doivent être symétriques par rapport à l'axe réel. C'est-à-dire que  $\theta_1$  et  $\theta_2$  vérifient :  $\theta_1 = -\theta_2[2\pi]$ . Le plus simple étant d'utiliser  $\theta_1 = \theta_2 = -\pi$ , ce qui donne deux coupures horizontales partant de  $s_1$  et  $s_2$ . De même la coupure partant de l'origine doit être obligatoirement sur  $\mathbb{R}-$ .

La figure (1.1), phase de  $\Gamma(s)$  dans le plan complexe, met en évidence les discontinuités le long des coupures horizontales, et les trois points de branchement, 0,  $s_1$  et  $s_2$ .

En ce qui concerne les courbures négatives,  $\Upsilon < 0$ , l'un des points de branchement se trouve dans le demi-plan droit, ce qui ne satisfait pas la condition de causalité et de stabilité du système. Cependant nous verrons que les fonctions de transfert globales sur des tronçons de tube, sont des fonctions de  $\Gamma(s)^2$ , et ne présentent par conséquent qu'un point de branchement en 0.

### 1.2.3 Représentations diffusives

Dans [Sta94, Mon98, MZed], il est expliqué que la spécificité des opérateurs associés à notre phénomène diffusif est que leur réponse impulsionnelle peut se décomposer sur une famille continue d'exponentielles amorties  $e^{-\xi t} \mathbf{1}_{t>0}(t)$ , associée à un poids  $\mu(\xi)$ , avec  $-\xi \in \mathbb{R}^-$  :

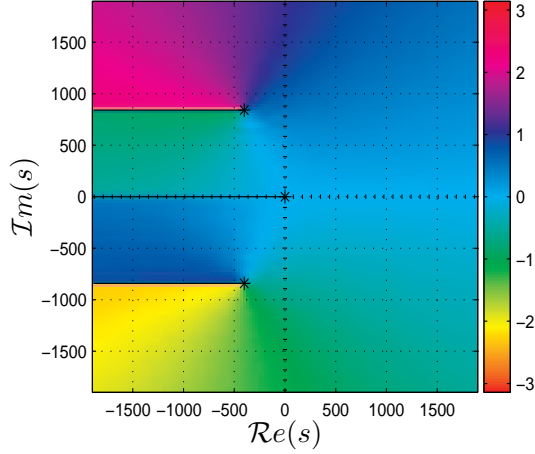


FIG. 1.1 – Phase de  $\Gamma(s)$  dans le plan complexe

$$\partial_t \phi(\xi, t) = -\xi \phi(\xi, t) + u(t) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^+, \quad (1.7)$$

$$y(t) = \int_0^\infty \mu(\xi) \phi(\xi, t) d\xi. \quad (1.8)$$

Dans notre cas, pour des fonctions coupées seulement sur  $\mathbb{R}^-$  et vérifiant le critère (1.12), le poids  $\mu(\xi)$  associé est égal au saut d'un côté à l'autre de la coupure. Ainsi elles peuvent être représentées par une famille continue de systèmes du premier ordre (cf. [Hél00] et [TD06]).

Pour une fonction de transfert  $H : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  coupée sur  $\mathbb{R}^-$ , on a :

$$\mu_H(\xi) = \frac{1}{2i\pi} \{H(-\xi + i0^-) - H(-\xi + i0^+)\} \quad (1.9)$$

Sa réponse impulsionnelle et sa transformée de Laplace sont les suivantes :

$$h(t) = \int_0^\infty \mu_H(\xi) e^{-\xi t} \mathbf{1}_{t>0}(t) d\xi, \quad (1.10)$$

$$H(s) = \int_0^\infty \frac{\mu_H(\xi)}{s + \xi} d\xi. \quad (1.11)$$

Pour assurer la convergence de ces intégrales, le critère suivant doit être vérifié :

$$\int_0^\infty \frac{|\mu_H(\xi)| d\xi}{1 + \xi} < +\infty. \quad (1.12)$$

Sans cette condition, la fonction  $H$  n'admet pas une représentation diffusive. Une condition nécessaire pour la vérification du critère est que le comportement asymptotique de  $\mu$  tende vers zéro quand  $|\xi|$  tend vers l'infini. Cependant, même si le critère n'est pas vérifié,



dans certains cas il est possible d’associer une représentation diffusive à leur dérivée (cf. [TD06]).

Dans le cas d’une fonction  $G : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  présentant deux coupures horizontales dans le demi-plan complexe gauche et symétriques par rapport à  $\mathbb{R}^-$ , nous pouvons étendre les représentations diffuses en décomposant leur réponse impulsionnelle sur une famille continue de sinusoides amorties. Nous parlons alors de représentations diffuses du second ordre (cf. [TD06]).

### 1.2.4 Approximation

La simulation d’une infinité de pôles le long des coupures est irréalisable numériquement. Dunau [Dun00], Hélie et Matignon [TD06] proposent d’approximer cette infinité de singularités par une famille finie de pôles. L’approximation consiste en une optimisation par les moindres carrés avec pondération, ici adaptée à l’audition. Dans le cas de la seule coupure sur  $\mathbb{R}^-$  le modèle de l’approximation est :

$$\tilde{H}_\mu(s) = \sum_{j=1}^{j=J} \frac{\mu_j}{s + \xi_j}. \quad (1.13)$$

où  $J$  est le nombre de pôles,  $\mu_j$  est le poids associé au pôle  $j$  et  $-\xi_j$  le pôle  $j$ .

L’approximation permet de déterminer les poids que l’on doit associer à chaque pôle pour que le modèle soit le plus proche possible de la fonction analytique. Actuellement, l’optimisation n’est pas faite sur la position des pôles. Il faudra alors placer ces pôles le plus judicieusement possible. Le critère d’optimisation est évalué dans le domaine de Fourier :

$$\mathcal{C}(\boldsymbol{\mu}) = \int_{\mathbb{R}^+} \left| \left( \tilde{H}_\mu(i\omega) - H(i\omega) \right) w_H(\omega) \right|^2 M(d\omega). \quad (1.14)$$

Nous reportons le lecteur intéressé à l’article [DMM06] pour plus de précisions sur l’optimisation et le poids perceptif. Quant à la mise en forme du schéma numérique, les détails de la méthode utilisée se trouvent dans [Mig05].

## 1.3 Présentation du travail effectué l’an passé

Lors du stage effectué l’an dernier, nous avons pu mettre en oeuvre une structure pour la simulation de propagation d’ondes dans les tubes à courbure positive ou nulle. Cette partie présente la mise en forme des quadripôles représentant les effets d’un tronçon sur des ondes progressives, et nous verrons une expression algébrique des fonctions de transfert sous forme de systèmes bouclés et retardés. Puis dans une deuxième sous-partie nous présenterons la nécessité de supprimer les boucles instantanées et la méthode utilisée. Enfin nous présenterons la structure permettant de simuler numériquement le résonateur d’un instrument simple de type trompette naturelle.

### 1.3.1 Structure de base

En considérant des paramètres de courbure et des pertes visco-thermiques constants sur une portion de tube de longueur  $L$ , l'équation de *Webster-Lokshin* ainsi que les équations de transports pour les ondes progressives choisies, nous ont permis de traduire l'effet du tronçon par quatre fonctions de transfert. La simulation peut alors être réalisée par un quadripôle symétrique présenté par la figure 1.2.

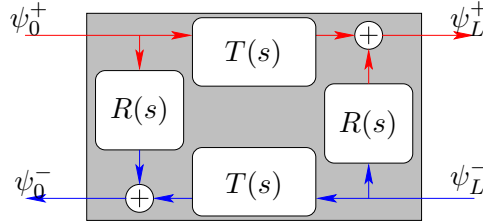


FIG. 1.2 – Quadripôle de base

La fonction  $R(s)$  simule la réflexion de l'onde à l'entrée du tronçon et la fonction  $T(s)$  la transmission à travers le tronçon. Ce sont des fonctions globales au tronçon, ainsi elles prennent en compte les réflexions multiples à l'intérieur du tronçon, à l'origine des modes internes au tronçon. L'étude de leur formule analytique permet d'hexhiber les retards et de mettre ces deux fonctions sous les formes algébriques suivantes :

$$T(s) = \tilde{T}(s) e^{-\tau s} = \frac{N_T(s)}{1 - K(s) e^{-2\tau s}} e^{-\tau s}, \quad (1.15)$$

$$R(s) = \frac{M_R(s) + N_R(s) e^{-2\tau s}}{1 - K(s) e^{-2\tau s}}. \quad (1.16)$$

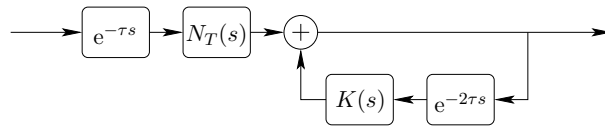


FIG. 1.3 – Fonction  $T(s)$  sous forme d'un système bouclé.

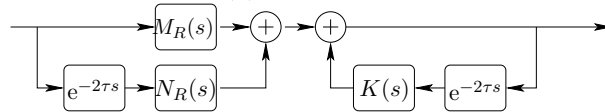


FIG. 1.4 – Fonction  $R(s)$  sous forme d'un système bouclé.

On remarque que,  $\tau$  étant égal au temps de propagation au travers du tronçon de longueur  $L$ , le retard  $e^{-\tau s}$  de  $T$  exprime le retard dû à la propagation directe à travers le tronçon. Le dénominateur de  $R(s)$  et de  $T(s)$  fait apparaître un retard  $2\tau$  (temps d'un aller-retour) à l'origine de modes internes au tronçon.

### 1.3.2 Réécriture des boucles instantanées

Pour simuler la propagation d'ondes dans un tube complet, il est alors nécessaire de concaténer plusieurs quadripôles les uns aux autres. Cependant lorsque l'on réalise un tel *branchement*, des boucles instantanées sans retard apparaissent.

Prenons l'exemple de la concaténation de deux quadripôles,  $A$  et  $B$ , présentée en haut de la figure 1.5. Si les fonctions de transfert  $A_{22}$  et  $B_{11}$  ont une réponse instantanée, la simulation numérique est irréalisable, puisque la sortie de  $A_{22}$  dépend de la sortie de  $B_{11}$ , et inversement. C'est-à-dire qu'à l'instant  $n$ , nous avons besoin de  $\phi_1^-(n)$  pour calculer  $\phi_1^+(n)$ , mais que ce dernier demande de connaître  $\phi_1^-(n)$ . On voit donc apparaître ce que nous appelons une boucle *instantanée*.

Cette boucle infinie et instantanée oblige donc à résoudre une équation. Pour ce faire nous écrivons le quadripôle équivalent,  $C$ , de la concaténation, de  $A$  et  $B$  (cf. figure 1.5). Les résultats algébriques sont donnés (équations 1.17-1.20). De là, il reste à exhiber les retards et à mettre en évidence des boucles contenant des retards supérieurs ou égaux à une période d'échantillonnage.

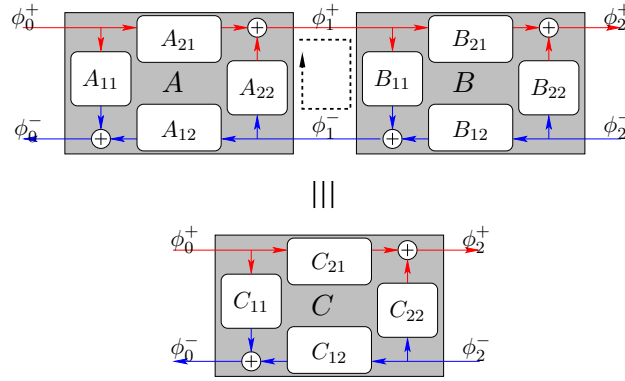


FIG. 1.5 – Fusion de deux quadripôles

$$C_{11} = A_{11} + \frac{A_{12}B_{11}A_{21}}{1 - A_{22}B_{11}}, \quad (1.17)$$

$$C_{12} = \frac{B_{12}A_{12}}{1 - A_{22}B_{11}}, \quad (1.18)$$

$$C_{21} = \frac{A_{21}B_{21}}{1 - A_{22}B_{11}}, \quad (1.19)$$

$$C_{22} = B_{22} + \frac{B_{12}A_{22}B_{21}}{1 - A_{22}B_{11}}. \quad (1.20)$$

Le dénominateur de ces fonctions équivalentes est caractéristique de la boucle. Nous retrouvons la même forme en automatique lors d'un asservissement.

Dans le cas de la concaténation de deux quadripôles de transfert de tronçons de tube, la boucle instantanée a lieu entre les deux fonctions de réflexion qui ont une réponse instantanée. Donc nous supprimons la boucle instantanée en considérant le retard en facteur de la fonction de transfert  $T(s)$ . Comme nous l'avons fait précédemment, nous obtenons un nouveau système qui contient des boucles retardées.

### 1.3.3 Présentation de la structure simulable

Pour valider notre approche, nous avons choisi de réaliser la simulation d'un instrument simple de type trompette naturelle, constitué d'une embouchure, d'un tube cylindrique, d'un pavillon de profil caténoïdal terminé par une impédance de rayonnement. Nous avons donc une concaténation de quadripôles dont les quatre quadripôles  $E_{mb}$ ,  $Q_{tube}$ ,  $Q_{pav}$  et  $Z_{ray}$  représentent les quatre éléments précédents, plus des quadripôles de conversion permettant d'adapter les grandeurs en sortie et en entrée des quadripôles. Pour des raisons de boucles instantanées, nous avons alors été amené à récrire la structure et à faire apparaître une nouvelle structure constituée de trois quadripôles séparés par les retards correspondant à la propagation des ondes progressives dans le tube cylindrique et dans le pavillon. Le schéma de la figure 1.6 illustre ce débouclage.

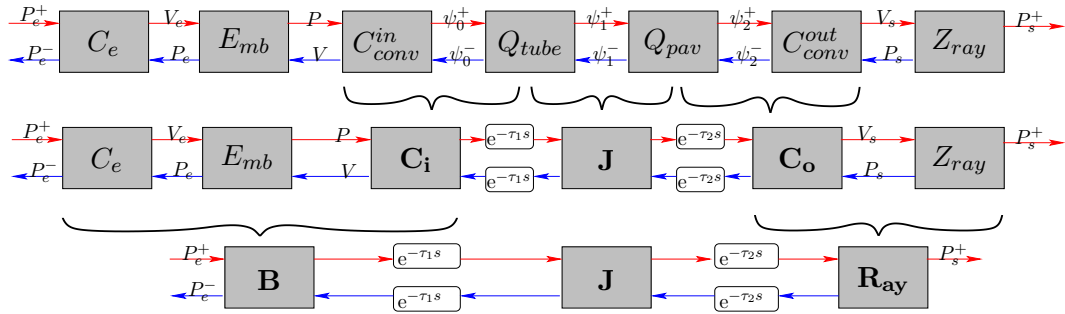


FIG. 1.6 – Structure adaptée à la simulation temporelle, sans boucle instantanée infinie

A titre indicatif, nous présentons l'allure du quadripôle  $\mathbf{J}$  en figure 1.7, qui provient directement de la réécriture du système avec exhibition des retards. Nous pouvons remarquer deux triples boucles retardées par des temps de  $2\tau_1$ ,  $2\tau_2$  et  $2(\tau_1 + 2\tau_2)$ , simulant les modes internes aux premier et second tronçons, ainsi qu'à leur concaténation.

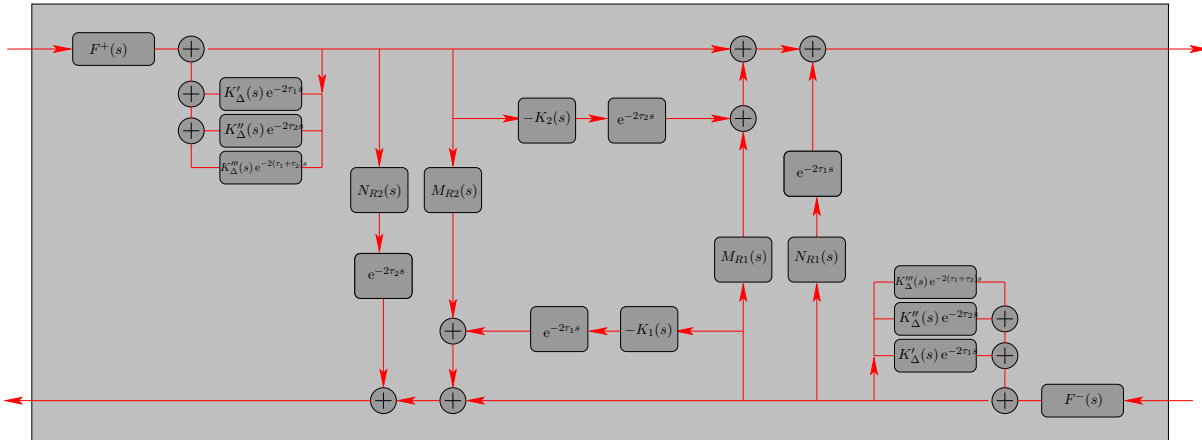


FIG. 1.7 – Détails du quadripôle simulable  $\mathbf{J}$

La simulation du système a été réalisée en langage C et implémentée dans le logiciel *Pure-Data* pour la simulation numérique en temps-réel. Malgré la complexité de la structure, les performances en temps de calcul sont satisfaisantes.

Les résultats de l'approximation de l'instrument complet et de sa simulation ont été présentés dans [DMM06], et ont permis de valider l'approximation des *représentations diffusives* par systèmes d'ordres finis.

### 1.3.4 Problème des courbures négatives

Nous avons vu que dans le cas des courbures positives, la fonction  $\Gamma(s)$  possède trois points de banchement à partie réelle négative. Si les fonctions de transfert vérifient le critère 1.12, alors elles admettent une représentation diffusive stable. Dans le cas des courbures négatives on peut démontrer que l'un des points de branchement est à partie réelle positive, ceci provoque des discontinuités dans  $\mathbb{C}_0^+$ , et donc les fonctions de transfert simulées sont instables. Cependant, nous remarquons en faisant un développement en série entière que les fonctions de transfert  $T(s)$  et  $R(s)$  sont des fonctions de  $\Gamma(s)^2$  et non de  $\Gamma(s)$ . En conséquence, les deux coupures provenant des deux points de branchement autres que 0, n'existent pas dans les fonctions globales des tronçons, mais apparaissent lors de la décomposition pour l'extraction des retards purs. Ceci signifie que ces fonctions globales des tronçons sont stables, quelques soit la courbure, mais pas les fonctions sans retard obtenues par exhibition des retards.



## Chapitre 2

# Définition des ondes progressives stables

Le but de cette partie est de chercher l'état acoustique  $\phi(l, t)$  représentant l'onde dans le tube, et sa décomposition en ondes progressives causales et stables,  $\phi^\pm(l, t)$ , telles que  $\phi^+ + \phi^- = \phi$ . Ceci afin de mettre le tube sous forme d'un système entrées-sorties.

Premièrement nous présenterons le problème et les contraintes que nous nous sommes posées. Puis nous décrirons dans une deuxième partie la méthode de calcul qui nous a permis d'obtenir de façon inductive à la fois l'expression de l'état acoustique et les expressions des ondes progressives. La partie suivante exposera les résultats, enfin nous mettrons en forme le système à deux entrées et deux sorties permettant de représenter l'effet d'un tronçon de tube sur les ondes progressives, comme cela a été brièvement présenté en partie 1.3.1.

## 2.1 Présentation

### 2.1.1 Problème posé

#### Equation de Webster

Le problème dû à la courbure reste le même en présence ou non de pertes visco-thermiques. Nous allons donc considérer l'équation de Webster sans pertes qui est conservative quelque soit la courbure  $\Upsilon$ . L'équation de Webster en  $p(l, t)$  est :

$$(\partial_t^2 - c_0^2 \partial_l^2) p(l, t) = \mathcal{L}_p(l, t) = 2c_0^2 \frac{r'(l)}{r(l)} \partial_l p(l, t), \quad (2.1)$$

où  $r(l)$  est le rayon du tube,  $l$  l'abscisse curviligne à la paroi et  $c_0$  la célérité du son.

#### Densité d'énergie acoustique

Nous définissons la densité d'énergie acoustique comme la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle acoustique sur une section de tube. Son expression est alors la suivante :

$$e_{ac} = \pi r(l)^2 \left( \frac{\rho_0}{2} v^2 + \frac{1}{2\rho_0 c_0^2} p^2 \right), \quad (2.2)$$

où  $\rho_0$  est la masse volumique de l'air. Précisons que l'énergie est une quantité positive, bornée et conservative dans le cas que nous nous sommes posé (sans pertes).

### 2.1.2 Contraintes

Partant de l'état *pression-vitesse*, pour trouver la définition des ondes progressives nous devons obtenir un changement d'état  $(p, v) \rightarrow (\phi^+, \phi^-)$  défini par un opérateur temporel  $\mathcal{F}$  stable et d'inverse stable tel que :

$$\begin{bmatrix} \phi^+(l, t) \\ \phi^-(l, t) \end{bmatrix} = \mathcal{F} \left\{ \begin{bmatrix} p(l, t) \\ v(l, t) \end{bmatrix} \right\}, \quad (2.3)$$



Nous allons procéder de façon inductive afin d'obtenir une paramétrisation de l'état acoustique  $\phi$  et des ondes progressives  $\phi^+$  et  $\phi^-$  de sorte qu'elles soient stables. Pour se faire nous nous donnons les trois hypothèses suivantes que la paramétrisation doit vérifier :

- (i) Etat acoustique : Nous définissons l'état acoustique comme le produit de la pression et d'une fonction  $g$  à déterminer, dépendant de l'abscisse curviligne à la paroi du tube.

$$\phi(l, t) = \phi^+(l, t) + \phi^-(l, t) = g(l)p(l, t). \quad (2.4)$$

Le choix d'écrire l'état sous cette forme, nous permet de pas fixer l'état dès le début, ce qui nous laisse un degré de liberté supplémentaire lors du choix final des ondes progressives, au prix de calculs plus longs. Remarquons que le choix  $g(l) = r(l)$  donne  $\phi = r \times p$ , souvent utilisé pour la description des ondes acoustiques à symétrie sphérique.

- (ii) Ondes Progressives : Nous définissons les ondes progressives par les équations de transport suivantes :

$$(\partial_t + c_0 \partial_l) \phi^+ = \mathcal{H}^+ \{\phi^+, \phi^-\}, \quad (2.5)$$

$$(\partial_t - c_0 \partial_l) \phi^- = \mathcal{H}^- \{\phi^+, \phi^-\}. \quad (2.6)$$

Les opérateurs  $(\partial_t \pm c_0 \partial_l)$  sont les opérateurs de transport, et les opérateurs  $\mathcal{H}^\pm$  sont des fonctionnelles de  $\phi^+$  et de  $\phi^-$  qui représentent le couplage des ondes progressives dû à la courbure du tube.

- (iii) Energie : Nous chercherons des ondes progressives telles que la densité d'énergie acoustique s'écrive comme une combinaison linéaire des dérivées temporelles au carré de  $\phi^\pm$ .

$$e_{ac} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} [\alpha_k^+ (\partial_t^k \phi^+)^2 + \alpha_k^- (\partial_t^k \phi^-)^2], \quad (2.7)$$

avec  $\alpha_k^\pm \geq 0 \forall k \in \mathbb{Z}$ . Puisque l'énergie est une quantité positive et bornée, ceci nous assure que les valeurs de  $\phi^+$  et de  $\phi^-$  sont simultanément bornées et ainsi qu'elles sont stables.

Si  $\mathcal{H}^\pm$  sont des opérateurs formellement représentables sous forme d'une combinaison linéaire de  $\partial_t^k \phi^\pm$ , sous les hypothèses précédentes, nous aboutissons à une paramétrisation qui nous donne une famille d'ondes progressives causales et stables.

Avec l'écriture donnée de l'état acoustique, en remplaçant  $p$  par  $\phi/g$ , l'équation de Webster devient :

$$(\partial_t^2 - c_0^2 \partial_l^2) \phi(l, t) = \mathcal{L}_\phi(l, t) = c_0^2 \left[ 2 \frac{g'}{g} \left( \frac{g'}{g} - \frac{r'}{r} \right) - \frac{g''}{g} \right] \phi(l, t) - 2c_0^2 \left[ \frac{g'}{g} - \frac{r'}{r} \right] \partial_l \phi(l, t). \quad (2.8)$$

Pour la partie suivante, nous définissons également les fonctionnelles  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  par :

$$\mathcal{H}^\pm = \frac{1}{2} (\mathcal{A} \pm \mathcal{B}). \quad (2.9)$$

## 2.2 Méthode

Le raisonnement est mené en six étapes : nous procédons par induction pour paramétriser la fonction  $g(l)$  et les fonctionnelles  $\mathcal{H}^\pm$ , afin d'obtenir une famille d'ondes progressives stables. Le choix définitif se portera sur les ondes qui simplifient les calculs.

### 2.2.1 Expression de la vitesse

En additionnant les deux équations de transport, et en appliquant l'équation d'Euler sur la dérivée spatiale de  $p = g^{-1}(\phi^+ + \phi^-)$ , nous exprimons la dérivée temporelle de la vitesse ( $\partial_t v$ ) en fonction de  $\phi^+$ , de  $\phi^-$  et de  $\mathcal{H}^+ + \mathcal{H}^- = \mathcal{B}\{\phi^+, \phi^-\}$ .

$$v(l, t) = \frac{1}{\rho_0 c_0 g} \left( \phi^+ - \phi^- + c_0 \frac{g'}{g} \partial_t^{-1} \phi - \partial_t^{-1} \mathcal{B} \right). \quad (2.10)$$

### 2.2.2 Expression de l'énergie

Puis nous injectons les expressions de la pression et de la vitesse dans le calcul de l'énergie acoustique. L'énergie acoustique s'exprime alors en fonction de  $\phi^+$ , de  $\phi^-$  et de  $\mathcal{B}\{\phi^+, \phi^-\}$ .

### 2.2.3 Paramétrisation de la fonctionnelle $\mathcal{B}$

Afin que l'énergie se mette sous la forme souhaitée (equation 2.7), nous donnons à  $\mathcal{B}\{\phi^+, \phi^-\}$  une forme générale, et nous identifions les coefficients de sorte à annuler les termes parasites tel que  $(\partial_t^k \phi^\pm)(\partial_t^l \phi^\pm)$ . Nous obtenons  $\mathcal{B}$  de la forme :

$$\mathcal{B}\{\phi^+, \phi^-\} = \beta \partial_t \phi^+ + \frac{\beta}{1 - \beta} \partial_t \phi^- + c_0 \frac{g'}{g} \phi, \quad (2.11)$$

où  $\beta$  est un coefficient, différent de 1 et pouvant dépendre de  $l$ , qui permet de paramétriser le choix des ondes progressives.

A ce stade, nous avons une condition, qui porte sur  $\mathcal{B}$ , pour que les ondes progressives soient stables. Il nous reste à déterminer la forme de  $\mathcal{A}$  pour que l'état acoustique vérifie l'équation de Webster.

### 2.2.4 Equation de Webster

Nous faisons apparaître les fonctionnelles  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  dans l'équation de Webster :

$$\begin{aligned} (\partial_t^2 - c_0^2 \partial_l^2) \phi(l, t) &= \mathcal{L}_\phi(l, t) \\ &= (\partial_t + c_0 \partial_l) (\partial_t - c_0 \partial_l) (\phi^+ + \phi^-) \\ &= (\partial_t - c_0 \partial_l) (\partial_t + c_0 \partial_l) \phi^+ + (\partial_t + c_0 \partial_l) (\partial_t - c_0 \partial_l) \phi^- \\ &= (\partial_t - c_0 \partial_l) \mathcal{H}^+\{\phi^+, \phi^-\} + (\partial_t + c_0 \partial_l) \mathcal{H}^-\{\phi^+, \phi^-\} \\ &= \partial_t (\mathcal{H}^+\{\phi^+, \phi^-\} + \mathcal{H}^-\{\phi^+, \phi^-\}) - c_0 \partial_l (\mathcal{H}^+\{\phi^+, \phi^-\} - \mathcal{H}^-\{\phi^+, \phi^-\}) \\ &= \partial_t (\mathcal{A}\{\phi^+, \phi^-\}) - c_0 \partial_l (\mathcal{B}\{\phi^+, \phi^-\}), \end{aligned}$$

et nous remplaçons  $\mathcal{B}$  par son expression obtenue en 2.2.3. Remarquons que l'équation obtenue ne permet pour le moment ni d'avoir les propriétés de l'équation de Webster, ni les propriétés des ondes progressives. En effet, l'expression de  $\mathcal{B}$  ne permet que d'assurer la stabilité des ondes, mais ne les définit pas comme des ondes progressives caractérisées par l'équation de Webster.

### 2.2.5 Paramétrisation de la fonctionnelle $\mathcal{A}$

L'équation précédemment développée fait apparaître des dérivées spatiales de  $\phi^\pm$ , à l'aide des équations de transport nous pouvons les supprimer. C'est à ce moment que les propriétés de l'équation de Webster et des ondes progressives apparaissent. Nous sommes alors en mesure d'exprimer  $\mathcal{A}$  en fonction de  $\phi^+$ , de  $\phi^-$  et éventuellement de leur dérivées temporelles.

$$\mathcal{A}\{\phi^+, \phi^-\} = A_1^+ \phi^+ + A_1^- \phi^- + A_2^+ \partial_t \phi^+ + A_2^- \partial_t \phi^-, \quad (2.12)$$

avec :

$$\begin{aligned} A_1^+ &= Q(\beta) \left( c_0 \frac{\beta}{2} \left( 1 + \frac{1}{1-\beta} \right) \frac{g'}{g} - c_0 \beta \left( \frac{g'}{g} - 2 \frac{r'}{r} \right) + c_0 \beta' + c_0 \left( \frac{g'}{g} - 2 \frac{r'}{r} \right) \right), \\ A_1^- &= Q(\beta) \left( c_0 \frac{\beta}{2} \left( 1 + \frac{1}{1-\beta} \right) \frac{g'}{g} - c_0 \frac{\beta}{1-\beta} \left( \frac{g'}{g} - 2 \frac{r'}{r} \right) + \frac{c_0 \beta'}{(1-\beta)^2} - c_0 \left( \frac{g'}{g} - 2 \frac{r'}{r} \right) \right), \\ A_2^+ &= Q(\beta) \left( \frac{\beta^2}{2} \left( 1 + \frac{1}{1-\beta} \right) - \beta \right), \\ A_2^- &= Q(\beta) \left( \frac{\beta^2}{2(1-\beta)} \left( 1 + \frac{1}{1-\beta} \right) + \frac{\beta}{1-\beta} \right), \\ Q(\beta) &= \left( 1 - \frac{\beta}{2} \left( 1 - \frac{1}{1-\beta} \right) \right)^{-1}. \end{aligned}$$

$g$  et  $\beta$  sont des fonctions de  $l$  paramétrisant respectivement l'état acoustique et les ondes progressives.

### 2.2.6 Symétrisation des ondes

Nous avons pu constater qu'une condition nécessaire et suffisante pour avoir des quadripôles de transfert à structure symétrique est :

$$\mathcal{H}^+\{\phi^+, \phi^-\} = \mathcal{H}^-\{\phi^-, \phi^+\}. \quad (2.13)$$

Ce qui est équivalent à ce que  $\mathcal{A}$  soit une fonctionnelle de  $\phi = \phi^+ + \phi^-$ , et que  $\mathcal{B}$  soit une fonctionnelle de  $\phi^+ - \phi^-$ . Or les expressions obtenues en 2.2.3 et en 2.2.5 ne permettent pas de vérifier simultanément ces deux conditions quel que soit le choix de la fonction  $g(l)$  et du coefficient  $\beta$ . Ceci nous indique donc qu'il n'est pas possible de définir des ondes progressives à la fois caractérisées par des équations de structure symétrique et à la fois stables au sens de l'énergie.

Une autre piste a été de considérer le potentiel acoustique  $\varphi$  comme fonction d'état. On définit le potentiel acoustique de la manière suivante :

$$p(l, t) = -\rho_0 \partial_t \varphi(l, t), \quad (2.14)$$

$$v(l, t) = \nabla(\varphi(l, t)) = \partial_l \varphi(l, t) \quad (2.15)$$

En opérant de la même manière nous aboutissons aux mêmes conclusions, à une dérivée près.

## 2.3 Résultats

### 2.3.1 Décomposition en Ondes Planes

Pour assurer la stabilité des ondes, nous avons choisi d'utiliser la décomposition en ondes progressives de type ondes planes. Même si nous n'obtenons pas une structure des quadripôles symétriques nous verrons en 3.1.3 que dans le cas de concaténation de tronçons dont le raccord est de classe  $C^1$ , nous obtenons le même résultat qu'avec des ondes donnant une structure symétrique mais n'assurant pas la stabilité. Bien que ce changement de variable soit utilisé pour les ondes planes, l'équation de *Webster* dans les pavillons n'impose pas une symétrie plane aux ondes, comme nous l'avons vu en 1.1.3, elles ont une forme géométrique non imposée à l'intérieur du tube.

Ce changement de variable se traduit par le choix de  $g(l) = r(l)$  et  $\beta(l) = 0$ .

L'équation de Webster et les équations de transport sont alors les suivantes :

$$\left( \partial_l^2 - \frac{1}{c_0^2} \partial_t^2 \right) \phi(l, t) = \Upsilon(l) \phi(l, t), \quad (2.16)$$

$$(\partial_t \pm c_0 \partial_l) \phi^\pm(l, t) = \pm c_0 \zeta(l) \phi^\mp(l, t), \quad (2.17)$$

où  $\zeta(l) = r'(l)/r(l)$ .

Cependant, nous devons considérer les pertes visco-thermiques. Les expressions de l'équation de *Webster-Lokshin* (non conservative) et des équations de transport des ondes associées sont alors les suivantes :

$$\left[ \partial_l^2 - \frac{1}{c_0^2} \partial_t^2 \right] \phi(l, t) = \Upsilon(l) \phi(l, t) + \frac{2}{c_0^2} \varepsilon(l) \partial_t^{\frac{3}{2}} \phi(l, t), \quad (2.18)$$

$$[\partial_t \pm c_0 \partial_l] \phi^\pm(l, t) = \pm c_0 \zeta(l) \phi^\mp(l, t) - \varepsilon(l) c_0^{\frac{1}{2}} \partial_t^{\frac{1}{2}} (\phi^+ + \phi^-). \quad (2.19)$$

Dans le domaine de Laplace, nous obtenons l'équation suivante :

$$\partial_l^2 \phi(l, s) - \left[ \frac{s^2}{c_0^2} + 2\varepsilon(l) \frac{s^{\frac{3}{2}}}{c_0} + \Upsilon(l) \right] \phi(l, s) = 0, \quad (2.20)$$

où  $s \in \mathbb{C}$  est la variable de Laplace.

Nous pouvons exprimer le passage des variables  $(p, v)$  aux variables  $(\phi^+, \phi^-)$  :

$$\begin{bmatrix} \phi^+(l, t) \\ \phi^-(l, t) \end{bmatrix} = \frac{r(l)}{2} \begin{bmatrix} 1 & \rho_0 c_0 \\ 1 & -\rho_0 c_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(l, t) \\ v(l, t) \end{bmatrix}, \quad (2.21)$$

dont le changement réciproque est :

$$\begin{bmatrix} p(l, t) \\ v(l, t) \end{bmatrix} = \frac{1}{r(l)} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ (\rho_0 c_0)^{-1} & -(\rho_0 c_0)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi^+(l, t) \\ \phi^-(l, t) \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

### 2.3.2 Décomposition en ondes symétriques

Dans [TD06], un changement de variables est proposé qui permet d'obtenir une structure symétrique des quadripôles. C'est ce choix que nous avons fait l'an dernier. Cependant ces ondes progressives n'assurent pas la stabilité au sens de l'énergie, et nous avons pu constater une instabilité dans le cas des courbures négatives. C'est la raison qui a motivé en début de ce stage la recherche d'un critère de stabilité pour la recherche d'ondes progressives. Nous avons choisi de les présenter parce que grâce à la simplicité des expressions analytiques qu'elles donnent, elles nous ont permis de mettre en place des idées, que nous avons pu ensuite appliquer au cas des ondes de type planes.

Nous donnons l'équation de *Webster-Lokshin*, qui est inchangée, et les équations de transport :

$$\left[ \partial_l^2 - \frac{1}{c_0^2} \partial_t^2 \right] \psi(l, t) = \Upsilon(l) \psi(l, t) + \frac{2}{c_0^{\frac{3}{2}}} \varepsilon(l) \partial_t^{\frac{3}{2}} \psi(l, t), \quad (2.23)$$

$$[\partial_t \pm c_0 \partial_l] \psi^\pm(l, t) = - \left[ \varepsilon(l) \sqrt{c_0} \partial_t^{\frac{1}{2}} + \frac{\Upsilon(l) c_0^2}{2} \partial_t^{-1} \right] (\psi^+(l, t) + \psi^-(l, t)), \quad (2.24)$$

et la conversion des variables est :

$$\begin{bmatrix} \psi^+(l, t) \\ \psi^-(l, t) \end{bmatrix} = \frac{r(l)}{2} \begin{bmatrix} 1 & \rho_0 c_0 \\ 1 & -\rho_0 c_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(l, t) \\ v(l, t) \end{bmatrix} + \frac{c_0 r'(l)}{2r(l)} \partial_t^{-1} p(l, t) \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

avec  $\Psi(l, t) = r(l)p(l, t) = \psi^+(l, t) + \psi^-(l, t)$ .

## 2.4 Mise en forme des quadripôles de base

### 2.4.1 Ondes Planes

Pour réaliser la simulation de la propagation des ondes progressives dans une portion de tube, nous devons écrire la formule analytique en résolvant l'équation de Webster-Lokshin. Pour rendre cette résolution plus facile, nous choisissons de considérer pour un tronçon de tube que les coefficients de la courbure et des pertes visco-thermiques sont constants. Rappelons l'équation de Webster-Lokshin dans le domaine de Laplace :

$$\partial_l^2 \phi(l, s) - \left[ \frac{s^2}{c_0} + 2\varepsilon \frac{s}{c_0} + \Upsilon \right] \phi(l, s) = 0.$$

Choisir un rayon de tube,  $r(l)$ , à courbure constante revient à considérer un profil caténoïdal sur la longueur du tronçon. Son expression est alors du type :  $r(l) = a \cosh(\sqrt{\Upsilon}l) + b \sinh(\sqrt{\Upsilon}l)$ . La résolution de l'équation de Webster-Lokshin donne alors :

$$\phi(l, s) = \begin{cases} A(s) e^{\Gamma(s)l} + B(s) e^{-\Gamma(s)l} \\ \text{ou} \\ A(s) \cosh(\Gamma(s)l) + B(s) \sinh(-\Gamma(s)l), \end{cases} \quad (2.26)$$

$$\text{avec } \Gamma(s)^2 = \left(\frac{s}{c_0}\right)^2 + 2\varepsilon \left(\frac{s}{c_0}\right)^{\frac{3}{2}} + \Upsilon.$$

Nous avons deux écritures possibles, soit en exponentielles soit en cosinus hyperboliques, nous choisissons d'utiliser les cosinus hyperboliques, mais la démarche est la même en exponentielles. Nous donnerons les résultats de l'écriture en exponentielles en 3.1.2. On peut alors exprimer la pression  $p(l, s) = \phi(l, s)/r(l)$  et la vitesse à partir de l'équation d'Euler :

$$\begin{cases} p(l, s) = \frac{A(s)}{r(l)} \cosh(\Gamma(s)l) + \frac{B(s)}{r(l)} \sinh(\Gamma(s)l) \\ v(l, s) = \frac{A(s)}{\rho_0 c_0 r(l)} (\zeta(l) \cosh(\Gamma(s)l) - \Gamma(s) \sinh(\Gamma(s)l)) \\ \quad + \frac{B(s)}{\rho_0 c_0 r(l)} (\zeta(l) \sinh(\Gamma(s)l) - \Gamma(s) \cosh(\Gamma(s)l)) \end{cases}$$

Nous exprimons les résultats précédents en écriture matricielles, et la conversion  $(p, v)$  en  $(\phi^+, \phi^-)$  (cf. equation 2.21 et 2.22) nous permet d'exprimer l'expression des ondes progressives en fonction des constantes  $A(s)$  et  $B(s)$  :

$$\begin{bmatrix} p(l, s) \\ v(l, s) \end{bmatrix} = M_{(p,v)}(l) \begin{bmatrix} A(s) \\ B(s) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \phi^+(l, s) \\ \phi^-(l, s) \end{bmatrix} = M_\phi(l) \begin{bmatrix} A(s) \\ B(s) \end{bmatrix}$$

Pour récrire l'effet du tronçon, entre les abscisses 0 et  $L$ , sur les ondes progressives, nous récrivons le problème sous une forme de quadripôle où les entrées sont  $\phi^+(0, s)$  et  $\phi^-(L, s)$  et les sorties  $\phi^+(L, s)$  et  $\phi^-(0, s)$  :

$$\begin{bmatrix} \phi^+(L, s) \\ \phi^-(0, s) \end{bmatrix} = [M_\phi(L, 0)M_\phi(0, L)^{-1}] \begin{bmatrix} \phi^+(0, s) \\ \phi^-(L, s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T^+(s) & R^d(s) \\ R^g(s) & T^-(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi^+(0, s) \\ \phi^-(L, s) \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

où  $M_\phi(l_1, l_2)$  est une matrice dont la première ligne est celle de  $M_\phi(l_1)$  et sa seconde ligne celle de  $M_\phi(l_2)$ . A l'aide du logiciel de calcul symbolique *Maple* nous avons obtenu les expressions analytiques des quatre fonctions de la matrice de transfert. Nous avons pu remarquer que les fonctions  $T^+(s)$  et  $T^-(s)$  sont identiques, nous leur donnerons le même nom  $T(s)$ .

$$T(s) = \left\{ \left[ 1 - \frac{c_0}{2s} (\zeta_l - \zeta_0) \right] \cosh(\Gamma l) + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{c_0 \Gamma}{s} + \frac{s}{c_0 \Gamma} \right) - \frac{1}{\Gamma} \left( \zeta_l - \zeta_0 + \frac{c_0}{s} \zeta_0 \zeta_l \right) \right] \sinh(\Gamma l) \right\}^{-1} \quad (2.28)$$

$$R^d(s) = \left\{ \left[ \frac{c_0}{s} (\zeta_l - \zeta_0) \right] \cosh(\Gamma l) - \left[ \left( \frac{c_0 \Gamma}{s} - \frac{s}{c_0 \Gamma} \right) - \frac{1}{\Gamma} \left( +\zeta_0 + \zeta_l + \frac{c_0}{s} \zeta_0 \zeta_l \right) \right] \sinh(\Gamma l) \right\} \frac{T(s)}{2} \quad (2.29)$$

$$R^g(s) = \left\{ \left[ \frac{c_0}{s} (\zeta_l - \zeta_0) \right] \cosh(\Gamma l) - \left[ \left( \frac{c_0 \Gamma}{s} - \frac{s}{c_0 \Gamma} \right) - \frac{1}{\Gamma} \left( -\zeta_0 - \zeta_l + \frac{c_0}{s} \zeta_0 \zeta_l \right) \right] \sinh(\Gamma l) \right\} \frac{T(s)}{2} \quad (2.30)$$

La fonction  $T(s)$  représente la transmission globale de l'onde à travers le tronçon. Les fonctions  $R^d(s)$  et  $R^g(s)$  représentent les réflexions globales des ondes par le tronçon, à droite et à gauche. Avec l'écriture en exponentielles (cf. partie 3.1.2), nous pouvons aisément remettre ces fonctions sous forme de systèmes bouclés en exhibant les retards purs, nous avons présenté l'expression algébrique en partie 1.3.1 (équations 1.15 et 1.16), nous comprenons donc que ces trois fonctions de transfert contiennent les réflexions multiples qui ont lieu à l'intérieur du tronçon, et naturellement la fonction  $T(s)$  a en facteur un retard pur correspondant au temps de propagation de l'onde dans le tube.

## 2.4.2 Ondes Symétriques

En procédant de même avec la décomposition en ondes symétriques, nous obtenons un quadripôle symétrique dont les expressions en cosinus hyperboliques sont les suivantes :

$$T(s) = \left\{ \cosh(\Gamma(s)L) + \frac{1}{2} \left( \frac{s}{c_0 \Gamma(s)} + \frac{c_0 \Gamma(s)}{s} \right) \sinh(\Gamma(s)L) \right\}^{-1}, \quad (2.31)$$

$$R(s) = \frac{1}{2} \left( \frac{s}{c_0 \Gamma(s)} - \frac{c_0 \Gamma(s)}{s} \right) \sinh(\Gamma(s)L) T(s). \quad (2.32)$$

Dans [TD06], Thomas Hélie propose une réécriture permettant d'exhiber les retards à partir de l'écriture en exponentielles :

$$T(s) = \frac{(1 - E(s)^2) D(s)}{1 - E(s)^2 D(s)^2} e^{-\tau s}, \quad (2.33)$$

$$R(s) = \frac{-E(s) + E(s) D(s)^2}{1 - E(s)^2 D(s)^2} e^{-2\tau s}. \quad (2.34)$$

avec  $\tau = L/c_0$  et :

$$D(s) = e^{-(\Gamma(s) - s/c_0)L}, \quad (2.35)$$

$$E(s) = \frac{c_0 \Gamma(s) - s}{c_0 \Gamma(s) + s}. \quad (2.36)$$





## Chapitre 3

# Décomposition en sous-systèmes faible coût

La structure mise en oeuvre l’an dernier découlait directement de l’écriture algébrique du système en supprimant les boucles instantanées. Comme nous avons pu le constater, le quadripôle  $\mathbf{J}$  de la figure 1.7 possède 14 fonctions de transfert, sans retard, qui sont simulées par l’utilisation des représentations diffusives. De plus, dans le cas d’un branchement de deux tronçons à courbures strictement positives, la plupart de ces fonctions possèdent 5 coupures, et non 3, puisqu’elles résultent de la *fusion* des deux quadripôles. En conséquence, même si la simulation du système en temps-réel a été très satisfaisante du point de vue utilisation des ressources CPU, dans le cas d’un instrument plus complexe, contenant plus de 2 tronçons, on peut prévoir une surcharge de calculs.

Pour diminuer le nombre de calculs, nous avons réussi lors de ce stage à récrire le système sous une forme bien plus efficace en temps de calculs. Nous verrons dans un premier temps la mise en forme de cette nouvelle structure, puis nous démontrerons la stabilité et la causalité des fonctions de transfert et du système global, dans le cas des courbures positives. Enfin nous présenterons les quadripôles à simuler.

### 3.1 Mise en forme d’une structure de Kelly-Lochbaum

Au début du stage, nous avons l’intuition qu’il était possible de récrire totalement la structure de l’an dernier afin de la mettre sous forme d’une structure de *Kelly-Lochbaum*. En effet, nous avons vu en (1.3.3) que les modes internes au tronçon sont simulés par plusieurs boucles en entrée du quadripôle  $\mathbf{J}$ , et par les boucles retardées entre deux quadripôles simulables consécutifs. La question que nous nous sommes alors posée est de savoir s’il est possible de simuler ces réflexions multiples seulement par les retards insérés entre deux quadripôles consécutifs. Malheureusement, ni l’écriture analytique ni l’écriture algébrique ne nous ont permis de mettre en évidence une telle structure simplifiée.

Nous ferons dans un premier temps l’interprétation physique des différents phénomènes qui agissent sur l’onde acoustique et nous écrirons les formules, abstraites, des fonctions de réflexion et de transmission globales qui en résultent. Dans une deuxième partie nous identifierons les quantités abstraites précédentes à partir des formules analytiques des fonctions globales du tronçon données en (3.1.2). Cette identification sera faite au prix d’hypothèses que nous justifierons. A partir de cette nouvelle structure, et des formules analytiques des fonctions de transfert qui la composent, nous ferons le débouclage lors de la concaténation de deux tronçons, il apparaîtra alors la structure de *Kelly-Lochbaum* simplifiée tant attendue.

#### 3.1.1 Interprétation physique

A l’entrée d’un tronçon, une onde acoustique subit une réflexion partielle et une transmission partielle. La partie réfléchie repart un sens opposé, et la partie transmise pénètre dans le tronçon (cf. flèches bleues sur la figure 3.1). Puis elle se propage jusqu’à l’autre extrémité du tronçon en subissant un amortissement dû entre autres aux pertes visco-thermiques (cf. flèches rouges sur la figure 3.1). Enfin, arrivée à une extrémité, une partie de l’onde est transmise vers l’extérieur, et l’autre partie est réfléchie et se repropage en sens contraire à travers le tronçon (cf. flèches vertes sur la figure 3.1).

En nommant de façon abstraite ces différentes réflexions et transmissions, nous obtenons le quadripôle représenté en figure 3.2. Précisons que puisque le tronçon n’est connecté à aucun autre tronçon, les réflexions et transmissions que nous venons de présenter n’ont pas



FIG. 3.1 – Interprétation physique

une réelle signification physique, c'est pourquoi nous les appellerons réflexions et transmissions *virtuelles*. Ajoutons qu'elles définissent les quadripôles des *demi-interfaces* à droite et à gauche du tronçon.

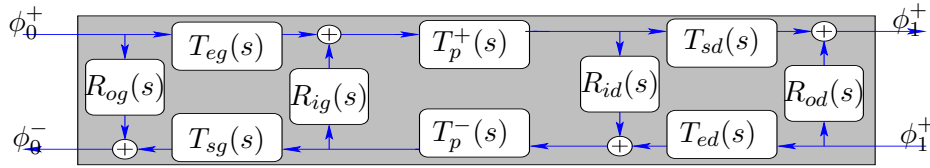


FIG. 3.2 – Structure associée à l'interprétation physique

Les indices des fonctions virtuelles ont les significations suivantes : "+" pour les ondes aller et "-" pour les ondes retour, en ce qui concerne les transmissions à travers le tronçon. "e" pour les ondes *entrant* dans le tronçon et "s" pour les ondes qui en *sortent*, "i" pour les réflexions internes (*inside*) et "o" pour les réflexions externes (*outside*). Les indices "g" et "d" indiquent de quel coté du tronçon se trouvent les fonctions, *gauche* ou *droite*.

Nous pouvons désormais écrire les formules algébriques des fonctions de transfert globales de transmissions et de réflexions du tronçon.

$$T_{troncon}^+ = \frac{T_{eg}T_{sd}T_p^+}{1 - R_{id}R_{ig}T_p^-T_p^+}, \quad (3.1)$$

$$T_{troncon}^- = \frac{T_{ed}T_{sg}T_p^-}{1 - R_{id}R_{ig}T_p^-T_p^+}, \quad (3.2)$$

$$R_{troncon}^g = R_{og} + \frac{R_{id}T_{eg}T_{sg}T_p^+T_p^-}{1 - R_{id}R_{ig}T_p^-T_p^+}, \quad (3.3)$$

$$R_{troncon}^d = R_{od} + \frac{R_{ig}T_{ed}T_{sd}T_p^+T_p^-}{1 - R_{id}R_{ig}T_p^-T_p^+}. \quad (3.4)$$

Pour l'identification avec les expressions analytiques, il est préférable de récrire les deux réflexions globales sous forme d'une simple fraction :

$$R_{troncon}^g = \frac{R_{og} + R_{id}(T_{eg}T_{sg} - R_{og}R_{ig})T_p^+T_p^-}{1 - R_{id}R_{ig}T_p^-T_p^+}, \quad (3.5)$$

$$R_{troncon}^d = \frac{R_{od} + R_{ig}(T_{ed}T_{sd} - R_{od}R_{id})T_p^+T_p^-}{1 - R_{id}R_{ig}T_p^-T_p^+}. \quad (3.6)$$

Le dénominateur de ces expressions vient de la boucle entre les fonctions  $T_p^+$ ,  $R_{id}$ ,  $T_p^-$  et  $R_{ig}$ . Remarquons qu'a priori, les transmissions de propagation ont un retard pur en facteur, ce qui signifie que la boucle n'est pas instantanée.

En comparant ces expressions aux expressions analytiques des ondes symétriques avec exhibition des retards (cf. equation 2.33 et 2.34), nous avons pu immédiatement identifier ces quantités abstraites et avons obtenu :

$$\begin{aligned} T_p^+ &= T_p^- = D, \\ R_{og} &= R_{od} = -R_{ig} = -R_{id} = E, \\ T_{eg} &= T_{ed} = 1 + E \quad \text{et} \\ T_{sg} &= T_{sd} = 1 - E. \end{aligned}$$

Pour s'intéresser à la décomposition de type ondes planes, nous avons besoin de réaliser cette identification sur les expressions analytiques des fonctions de transfert associées.

### 3.1.2 Identification des fonctions de transfert

Grâce à la simplicité des formules obtenues pour les fonctions de transfert globales pour les ondes progressives  $\psi^\pm$ , qui donnent une structure symétrique, nous avons réussi à facilement identifier les expressions analytiques de toutes les fonctions de réflexions et de transmissions virtuelles. Mais puisque nous avons choisi les ondes progressives de type ondes planes, pour assurer la stabilité, il est nécessaire d'effectuer une nouvelle identification.

En partie 2.4.1 nous avons présenté les formules analytiques de  $T(s)$ ,  $R_d(s)$  et  $R_g(s)$  écrites en cosinus hyperboliques (equations 2.28-2.30), pour mettre en évidence les retards et faciliter l'identification, nous donnons les écritures équivalentes en exponentielles :

$$T_{troncon} = 4 \frac{s\Gamma(s)}{c} \times \frac{T_p(s)}{d(s) - k(s)T_p(s)^2}, \quad (3.7)$$

$$R_{troncon}^g = \frac{(m^g(s) - d(s)) + (n^g(s) + k(s))T_p(s)^2}{d(s) - k(s)T_p(s)^2}, \quad (3.8)$$

$$R_{troncon}^d = \frac{(m^d(s) - d(s)) + (n^d(s) + k(s))T_p(s)^2}{d(s) - k(s)T_p(s)^2}, \quad (3.9)$$

avec :

$$T_p(s) = e^{-\Gamma(s)L}, \quad (3.10)$$

$$m^g(s) = 2 \frac{s}{c_0} \left( \Gamma(s) + \frac{s}{c_0} - \zeta_d \right),$$

$$m^d(s) = 2 \frac{s}{c_0} \left( \Gamma(s) + \frac{s}{c_0} + \zeta_g \right),$$

$$n^g(s) = 2 \frac{s}{c_0} \left( \Gamma(s) - \frac{s}{c_0} + \zeta_d \right),$$

$$n^d(s) = 2 \frac{s}{c_0} \left( \Gamma(s) - \frac{s}{c_0} - \zeta_g \right),$$

$$k(s) = \Gamma(s)^2 + \left( \frac{s}{c_0} \right)^2 + (\zeta_g - \zeta_d) \frac{s}{c_0} - \zeta_g \zeta_d - \left( 2 \frac{s}{c_0} + \zeta_g - \zeta_d \right) \Gamma(s),$$

$$= \left( \Gamma(s) - \frac{s}{c_0} + \zeta_d \right) \left( \Gamma(s) - \frac{s}{c_0} - \zeta_g \right),$$

$$d(s) = \Gamma(s)^2 + \left( \frac{s}{c_0} \right)^2 + (\zeta_g - \zeta_d) \frac{s}{c_0} - \zeta_g \zeta_d + \left( 2 \frac{s}{c_0} + \zeta_g - \zeta_d \right) \Gamma(s),$$

$$= \left( \Gamma(s) + \frac{s}{c_0} - \zeta_d \right) \left( \Gamma(s) + \frac{s}{c_0} + \zeta_g \right).$$

Nous avons donc 4 équations qui lient les expressions analytiques et abstraites des 4 fonctions de transfert globales, et 10 inconnues qui sont les fonctions de réflexion et de transmission virtuelles.

Sachant que la transmission à travers le tronçon est symétrique,  $T_{troncon}^+ = T_{troncon}^-$ , nous avons l'égalité suivante :

$$T_{eg} T_{sd} T_p^+ = T_{ed} T_{sg} T_p^-.$$

A l'aide d'un développement asymptotique, que nous ferons en (3.2.2), nous constatons que la fonction  $T_p$  est une fonction causale retardée par  $\tau = c_0/L$ , correspondant au temps de propagation de l'onde dans le tronçon. Nous définissons donc la fonction  $\tilde{T}_p$  tel que :

$$T_p(s) = e^{-\Gamma(s)L} = e^{-(\Gamma(s)-s/c_0)L} e^{-\tau s} = \tilde{T}_p(s) e^{-\tau s}.$$

En conséquence le retard est contenu dans la fonction  $T_p(s)$  et nous faisons la première hypothèse qui nous permet d'identifier les fonctions  $T_p^+$  et  $T_p^-$  :

$$\text{Hypothèse 1 : } T_p^+ = T_p^- = T_p.$$

Les fonctions des réflexions virtuelles externes sont alors aussitôt identifiées :

$$R_{od}(s) = \frac{m^d(s) - d(s)}{d(s)} = -\frac{\Gamma(s) - \frac{s}{c_0} - \zeta_d}{\Gamma(s) + \frac{s}{c_0} - \zeta_d}, \quad (3.11)$$

$$R_{og}(s) = \frac{m^g(s) - d(s)}{d(s)} = -\frac{\Gamma(s) - \frac{s}{c_0} + \zeta_g}{\Gamma(s) + \frac{s}{c_0} + \zeta_g}. \quad (3.12)$$

Le dénominateur nous permet d'écrire le produit des fonctions des réflexions virtuelles internes :

$$R_{id}(s)R_{ig}(s) = \frac{k(s)}{d(s)} = \frac{\left(\Gamma(s) - \frac{s}{c_0} + \zeta_d\right) \left(\Gamma(s) - \frac{s}{c_0} - \zeta_g\right)}{\left(\Gamma(s) + \frac{s}{c_0} - \zeta_d\right) \left(\Gamma(s) + \frac{s}{c_0} + \zeta_g\right)}. \quad (3.13)$$

Pour continuer l'identification, nous faisons une nouvelle hypothèse qui semble raisonnable :

Hypothèse 2 : *les fonctions de réflexions virtuelles dépendent des paramètres du côté où elles se trouvent.*

Ceci signifie que les fonctions virtuelles indicées d'un  $g$ , dépendent de  $\zeta_g$  et non de  $\zeta_d$ , et réciproquement. Nous constatons premièrement que  $R_{og}$  et  $R_{od}$  vérifient cette hypothèse, et nous pouvons identifier les réflexions virtuelle internes à partir de l'équation 3.13 :

$$R_{id}(s) = \frac{\Gamma(s) - \frac{s}{c_0} + \zeta_d}{\Gamma(s) + \frac{s}{c_0} - \zeta_d}, \quad (3.14)$$

$$R_{ig}(s) = \frac{\Gamma(s) - \frac{s}{c_0} - \zeta_g}{\Gamma(s) + \frac{s}{c_0} + \zeta_g}. \quad (3.15)$$

Pour assurer la continuité de la pression à chaque extrémités du tronçon, nous posons la troisième hypothèse :

Hypothèse 3 :  $T(s) = 1 + R(s)$ , où  $T$  et  $R$  sont la réflexion et la transmission associées à une même onde incidente.

Cette dernière hypothèse nous donne directement les transmissions à partir de leurs réflexions associées, pour valider l'hypothèse nous avons simplement constaté que les égalités restantes sont vérifiées.

Voici le résultat des identifications :

$$T_p^+(s) = T_p^-(s) = T_p(s) = e^{-\Gamma(s)L}, \quad (3.16)$$

$$R_{od}(s) = -\frac{\Gamma(s) - \frac{s}{c_0} - \zeta_d}{\Gamma(s) + \frac{s}{c_0} - \zeta_d}, \quad (3.17)$$

$$R_{og}(s) = -\frac{\Gamma(s) - \frac{s}{c_0} + \zeta_g}{\Gamma(s) + \frac{s}{c_0} + \zeta_g}, \quad (3.18)$$

$$R_{id}(s) = \frac{\Gamma(s) - \frac{s}{c_0} + \zeta_d}{\Gamma(s) + \frac{s}{c_0} - \zeta_d}, \quad (3.19)$$

$$R_{ig}(s) = \frac{\Gamma(s) - \frac{s}{c_0} - \zeta_g}{\Gamma(s) + \frac{s}{c_0} + \zeta_g}, \quad (3.20)$$

$$T_{ed}(s) = 1 + R_{od}(s) = \frac{2\frac{s}{c_0}}{\Gamma(s) + \frac{s}{c_0} - \zeta_d}, \quad (3.21)$$

$$T_{eg}(s) = 1 + R_{og}(s) = \frac{2\frac{s}{c_0}}{\Gamma(s) + \frac{s}{c_0} + \zeta_g}, \quad (3.22)$$

$$T_{sd}(s) = 1 + R_{id}(s) = \frac{2\Gamma(s)}{\Gamma(s) + \frac{s}{c_0} - \zeta_d}, \quad (3.23)$$

$$T_{sg}(s) = 1 + R_{ig}(s) = \frac{2\Gamma(s)}{\Gamma(s) + \frac{s}{c_0} + \zeta_g}. \quad (3.24)$$

### 3.1.3 Ecriture des quadripôles aux interfaces de 2 tronçons

Lors de la concaténation de deux tronçons, nous connectons le quadripôle de la demi-interface de droite du premier tronçon au quadripôle de la demi-interface de gauche du second tronçon. Puisque toutes les fonctions de ces demi-interfaces n'ont pas de retard, nous nous retrouvons dans le cas vu en 1.3.2 avec apparition d'une boucle instantanée. Pour résoudre ce problème, nous écrivons les fonctions du quadripôle équivalent. Nous obtenons alors le quadripôle d'interface des deux tronçons, constitué de deux réflexions et de deux transmissions. Les fonctions obtenues ont cette fois-ci une réelle signification physique, puisqu'elles résultent de la concaténation de deux tronçons.

Dans le cas d'un raccordement de classe  $C^1$  du profil, c'est-à-dire sans discontinuité de section ni de pente mais possiblement de courbure, nous obtenons le quadripôle donné en figure 3.3 qui simule les réflexions et transmissions réelles à l'interface des tronçons indicés 1 et 2. Ce quadripôle ne dépend plus que d'une fonction de transfert,  $R_{(1,2)}$ , qui est la réflexion réelle de l'interface (1, 2) pour les ondes aller et dont voici l'expression analytique :

$$R_{(1,2)} = \frac{\Gamma_1(s) - \Gamma_2(s)}{\Gamma_1(s) + \Gamma_2(s)}, \quad (3.25)$$

où  $\Gamma_k(s)$  est la fonction  $\Gamma(s)$  paramétrée par les coefficients du tronçon  $k$ .

Cette structure est particulièrement intéressante car après la concaténation de  $N$  tronçons nous obtenons une structure de Kelly-Lochbaum que nous pourrions mettre sous forme de filtre en treillis.

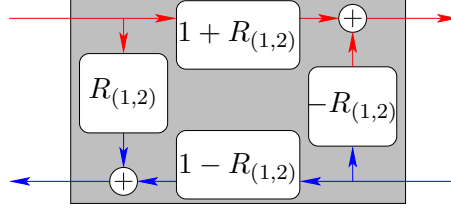


FIG. 3.3 – Quadripôle à l’interface de deux tronçons

## 3.2 Stabilité et causalité

Pour envisager la simulation numérique, nous devons nous assurer de la stabilité à la fois des fonctions de transfert et du système complet résultant de la concaténation de  $N$  tronçons. Cette partie présente ces résultats avec les démonstrations. Nous avons également démontré la causalité de chaque sous-système.

### 3.2.1 Stabilité pour les fonctions de transfert individuelles

Nous n’avons que deux fonctions de transfert à étudier :  $T_{p_k}$  pour la propagation d’onde dans le tronçon  $k$  et  $R_{(k,k+1)}$  à l’interface des tronçons  $k$  et  $k + 1$ .

Pour démontrer la stabilité de  $R_{(k,k+1)}$ , nous commençons par démontrer que  $\Gamma(s)$  est à partie réelle positive dans le demi-plan droit et que sa partie imaginaire est du même signe que  $s$ , quelles que soient la courbure  $\Upsilon$  et les pertes  $\varepsilon$ . On en déduit alors que  $R_{(k,k+1)}$  est inférieur à 1 en module dans tout le demi-plan droit. En effet,

$$\begin{aligned}
 |R_{(k,k+1)}|^2 &= \left( \frac{\Gamma_k(s) - \Gamma_{k+1}(s)}{\Gamma_k(s) + \Gamma_{k+1}(s)} \right) \left( \frac{\overline{\Gamma_k(s) - \Gamma_{k+1}(s)}}{\overline{\Gamma_k(s) + \Gamma_{k+1}(s)}} \right) \\
 &= \frac{|\Gamma_k(s)|^2 + |\Gamma_{k+1}(s)|^2 - 2\mathcal{R}e \left( \Gamma_k(s) \overline{\Gamma_{k+1}(s)} \right)}{|\Gamma_k(s)|^2 + |\Gamma_{k+1}(s)|^2 + 2\mathcal{R}e \left( \Gamma_k(s) \overline{\Gamma_{k+1}(s)} \right)}, \\
 \text{avec : } \quad &\mathcal{R}e \left( \Gamma_k(s) \overline{\Gamma_{k+1}(s)} \right) \geq 0,
 \end{aligned}$$

donc  $|R_{(k,k+1)}(s)| \leq 1, \forall s \in \overline{\mathbb{C}_0^+}$ .

Précisons que nous avons en réalité une inégalité stricte excepté pour le raccordement d’un cône ( $\Upsilon = 0$ ) et d’un tronçon à courbure non nulle. Dans ce cas  $|R_{(1,2)}| = 1$  en  $s = 0$ , ceci signifie que la contribution constante dans un signal est intégralement réfléchi.

En ce qui concerne la fonction de transfert  $T_p$ , puisque la fonction  $\Gamma(s)$  est à partie réelle positive dans le demi-plan droit, alors  $|T_p(s)| = \left| e^{-\Gamma_k(s)L} \right| \leq 1, \forall s \in \overline{\mathbb{C}_0^+}$ . De même, nous avons une inégalité stricte, excepté en  $s = 0$  pour les cônes,  $\Upsilon = 0$ .

Dans le cas des courbures positives ou nulles, puisque nous pouvons choisir des coupures dans le demi-plan gauche, le fait que ces deux fonctions soient bornées en module nous assure qu’il n’y a pas de singularité dans le demi-plan droit, et donc que ces deux fonctions de transfert sont stables.



### 3.2.2 Causalité

Nous définissons les espaces des fonctions de *Hardy* de degré  $m$  de la façon suivante :

$$\mathbb{H}^m(\mathbb{C}_0^+) = \left\{ H : \mathbb{C}_0^+ \rightarrow \mathbb{C} \text{ tel que } H \text{ est holomorphe et tel que} \right. \\ \left. \| H \|_{\mathbb{H}^m} = \sup_{\zeta > 0} \left[ \int_{\mathbb{R}} |H(\zeta + i\omega)|^m \right]^{\frac{1}{m}} < \infty \right\}$$

Une condition suffisante pour qu'une fonction  $H$  soit causale, est qu'il existe un entier  $m$  tel que  $H$  soit dans  $\mathbb{H}^m(\mathbb{C}_0^+)$ .

Dans le cas des courbures positives ou nulles, nous venons de démontrer que ces fonctions sont holomorphes dans  $\mathbb{C}_0^+$ . Puisque nos deux fonctions de transfert sont bornées dans  $\mathbb{C}_0^+$ , il reste à étudier leur comportement asymptotique quand  $|s|$  tend vers l'infini.

Commençons par l'étude du comportement asymptotique de  $\Gamma$  en l'infini pour  $s \in \mathbb{C}_0^+$  :

$$\begin{aligned} \Gamma_k(s) &= \sqrt{\left(\frac{s}{c_0}\right)^2 + 2\varepsilon_k \left(\frac{s}{c_0}\right)^{3/2} + \Upsilon_k} = \frac{s}{c_0} \sqrt{1 + 2\varepsilon_k \sqrt{\frac{c_0}{s}} + \Upsilon_k \left(\frac{c_0}{s}\right)^2} \\ &= \frac{s}{c_0} \sqrt{1+u} = \frac{s}{c_0} \left[ 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + O(u^3) \right] \text{ pour } u = \frac{1}{s} \rightarrow 0, \\ &= \frac{s}{c_0} + \varepsilon_k \sqrt{\frac{s}{c_0}} + O(1), \text{ quand } |s| \rightarrow \infty \quad \forall s \in \mathbb{C}_0^+. \end{aligned}$$

La fonction de transmission à travers le tronçon devient :

$$\begin{aligned} T_{p_k}(s) &= e^{-\Gamma_k(s)L} = e^{\varepsilon_k \sqrt{\frac{s}{c_0}} L_k + O(1)} e^{-\tau_k s} \\ &= O(1) e^{\varepsilon_k \sqrt{\frac{s}{c_0}} L_k} e^{-\tau_k s}. \text{ quand } |s| \rightarrow \infty \quad \forall s \in \mathbb{C}_0^+. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Nous remarquons premièrement un retard pur apparaître,  $e^{-\tau s}$  pour  $\tau = L/c_0$ , et ce qui reste en facteur,  $e^{\varepsilon_k \sqrt{\frac{s}{c_0}} L_k}$ , est une fonction d'un espace de Hardy dans  $\mathbb{C}_0^+$  pour des pertes visco-thermique non nulles ( $\varepsilon \neq 0$ ).

En ce qui concerne la fonction de réflexion à l'interface :

$$\begin{aligned} R_{(k,k+1)} &= \frac{\Gamma_k(s) - \Gamma_{k+1}(s)}{\Gamma_k(s) + \Gamma_{k+1}(s)} = \left(\frac{c_0}{2s}\right) \frac{(\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) \sqrt{\frac{s}{c_0}} + O(1)}{1 + \frac{1}{2}(\varepsilon_k + \varepsilon_{k+1}) \sqrt{\frac{c_0}{s}} + O\left(\frac{1}{s}\right)} \\ &= \frac{1}{2}(\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) \sqrt{\frac{c_0}{s}} + O\left(\frac{1}{s}\right) \text{ quand } |s| \rightarrow \infty \quad \forall s \in \mathbb{C}_0^+. \end{aligned}$$

Puisque  $R_{(k,k+1)}$  est  $O(\sqrt{1/s})$ , sa norme de Hardy est finie pour  $m > 2$ . Nous en déduisons donc que  $R_{(k,k+1)}$  appartient à tout espace de Hardy  $\mathbb{H}^m(\mathbb{C}_0^+)$ , pour tout  $m > 2$ .

En conclusion, la réflexion à l'interface est une fonction stable et causale, et la fonction de transmission est une fonction stable, causale et retardée de  $L/c_0$ .

### 3.2.3 Stabilité globale d'une concaténation de tronçons

Pour démontrer la stabilité globale de la concaténation de  $N$  tronçons, nous procéderons à plusieurs changements de variables qui permettent de mettre la structure sous forme d'un filtre en treillis.

Cette partie reprend la démarche mise en oeuvre dans [Mat94], ainsi nous choisissons pour les différents états acoustiques des notations cohérentes avec le document.

La forme originale de la structure pour la concaténation de deux tronçons est celle de la figure 3.4.

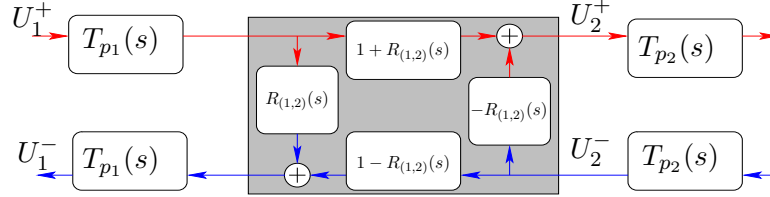


FIG. 3.4 – Structure sans décalage

Les entrées sont  $U_1^+$  et  $U_2^-$ , et les sorties  $U_1^-$  et  $U_2^+$ . La relation liant les entrées aux sorties est la suivante :

$$\begin{bmatrix} U_1^- \\ U_2^+ T_{p1} \end{bmatrix} = T_{p1}^2 Q^{(1,2)} \begin{bmatrix} U_1^+ \\ U_2^- T_{p1}^{-1} \end{bmatrix},$$

avec :

$$Q^{(1,2)} = \begin{bmatrix} R_{(1,2)} & 1 - R_{(1,2)} \\ 1 + R_{(1,2)} & -R_{(1,2)} \end{bmatrix}.$$

Nous faisons un premier changement de variables :

$$X_1^\pm = U_1^\pm \quad \text{et} \quad X_2^\pm = T_{p1}^{-1} U_2^\pm.$$

La nouvelle relation du système décalé est la suivante :

$$\begin{bmatrix} X_1^- T_{p1}^{-2} \\ X_2^+ \end{bmatrix} = Q^{(1,2)} \begin{bmatrix} X_1^+ \\ X_2^- \end{bmatrix}.$$

Ce changement de variables permet de décaler les fonctions  $T_p$  de la branche aller, du haut, sur la chaîne retour et en fin de concaténation pour la conversion inverse.

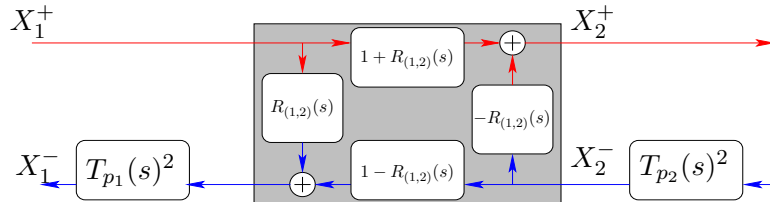


FIG. 3.5 – Structure avec décalage

Nous faisons un dernier changement de variables :

$$Y_1^\pm = X_1^\pm \quad \text{et} \quad Y_2^\pm = \frac{X_2^\pm}{1 + R_{(1,2)}}.$$

Ce changement de variables produit une nouvelle relation entrée-sortie qui peut alors se mettre sous forme de filtre en treillis comme le montre la figure 3.6.

$$\begin{bmatrix} Y_1^- T_{p_1}^{-2} \\ Y_2^+ \end{bmatrix} = Q_n^{(1,2)} \begin{bmatrix} Y_1^+ \\ Y_2^- \end{bmatrix},$$

avec :

$$Q_n^{(1,2)} = \begin{bmatrix} R_{(1,2)} & 1 - R_{(1,2)}^2 \\ 1 & -R_{(1,2)} \end{bmatrix}.$$

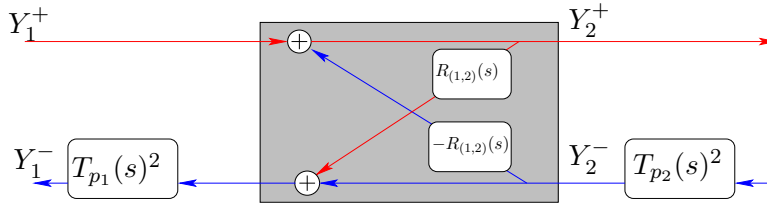


FIG. 3.6 – Structure avec normalisation

Dans le cas d'une concaténation d'un nombre quelconque de tronçons, nous faisons les changements de variables suivant :

$$X_k^\pm = \left( \prod_{j=1}^{k-1} T_{p_j}^{-1} \right) U_k^\pm, \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} Y_k^\pm &= \left( \prod_{j=1}^{k-1} \left( 1 + R_{(j,j+1)}^{-1} \right) \right) X_k^\pm \\ &= \left( \prod_{j=1}^{k-1} \left( 1 + R_{(j,j+1)}^{-1} \right) T_{p_j}^{-1} \right) U_k^\pm. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Les relations liant les entrées aux sorties d'un quadripôle s'en déduisent comme pour une simple concaténation :

$$\begin{bmatrix} Y_j^- T_{p_j}^{-2} \\ Y_{j+1}^+ \end{bmatrix} = Q_n^{(j,j+1)} \begin{bmatrix} Y_j^+ \\ Y_{j+1}^- \end{bmatrix}$$

Nous obtenons ainsi la concaténation de  $N - 1$  cellules élémentaires d'un filtre en treillis. En bout de chaîne, il est alors nécessaire de réaliser la conversion inverse, de  $Y$  vers  $U$ , par la multiplication par une fonction de transfert qui est un produit de toutes les fonctions de transfert de la chaîne.

$$U_n^\pm = \left( \prod_{j=1}^{n-1} (1 + R_{(j,j+1)}) T_{p_j} \right) Y_n^\pm.$$

Dans le cas d'un filtre en treillis à coefficient réels constants, une condition nécessaire et suffisante à la stabilité est que tous les coefficients des cellules du filtre en treillis soient strictement inférieurs à 1 en module, (cf. ([MG73])). Dans le cas de tronçons à courbures strictement positives, nous avons démontré que les fonctions  $T_p$  et  $R_{(k,k+1)}$  ont leur module strictement inférieur à 1 dans  $C_0^+$ . La stabilité est donc assurée. De plus, dans le cas général, seule la contribution constante d'un signal pourrait poser un problème. L'étude de ce cas n'est pas présentée ici.

### 3.3 Mise en forme de la structure simulable

Les changements de variables précédents nous ont permis de vérifier la stabilité de la concaténation de  $N$  tronçons, mais la structure obtenue n'est pas simulable dans le cas de branchements de tubes en parallèle, que l'on rencontre dans les instruments avec pistons ou palettes (trompette ou trombone). En effet, la conversion de la variable  $U_N^-$  à  $Y_N^-$  en bout de chaîne est anticausale (cf. equation 3.28). Ce changement de variable n'est donc réalisable que dans le cas où l'onde retour est nulle ou négligée, c'est-à-dire en fin du pavillon ou pour un trou. De plus la conversion qui rend la variable  $U_N^+$  à partir de  $Y_N^+$  est un produit des  $N$  fonctions de transfert, qui risque fort d'utiliser des ressources CPU, ce qui ne réduit finalement pas le coût.

Cependant, la forme originale du quadripôle de l'interface peut-être réécrite astucieusement et ne faire apparaître qu'une seule fois la fonction  $R_{(k,k+1)}$  pour la simulation. Cette écriture proposée à l'origine dans [MG76], pour une équation des ondes et des quadripôles plus simples se transpose parfaitement à notre cas.

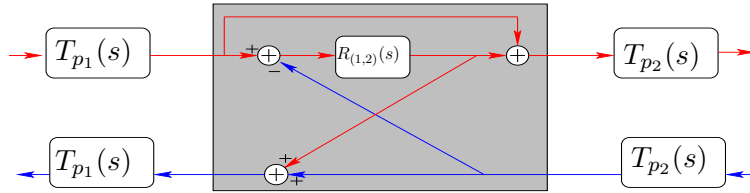


FIG. 3.7 – Structure optimisée pour la simulation

Comparé à la structure mise en oeuvre l'an dernier, nous passons de quadripôles simulés par 14 fonctions de transfert à 3 fonctions d'une complexité légèrement réduite : une seule des 3 fonctions possède 5 coupures,  $R_{(k,k+1)}$ , et les 2 autres,  $T_{p_k}$ , en possèdent 3, dans le cas des courbures strictement positives.

Malheureusement, dans le cas des courbures négatives, le point de branchement à partie réelle positive, à l'origine d'une singularité dans  $C_0^+$ , provoque des instabilités. C'est pourquoi cette structure n'est encore réalisable que pour des courbures positives.

La figure 3.8 présente le résultat obtenu par notre modèle. Nous y faisons une comparaison avec une courbe d'impédance obtenue expérimentalement sur un trombone, mesure faite à

l'IRCAM par l'équipe *Acoustique Instrumentale*. Nous faisons apparaître pour notre modèle l'impédance exacte et son approximation en temps discret, obtenue après approximation de toutes les fonctions de transfert de la structure, mise en forme du schéma numérique et recombinaison pour le calcul de l'impédance totale de l'instrument. Ici le profil du tube est approximé par 5 portions de courbes à courbures constantes, et dont les raccords sont de classe  $C^1$ . L'embouchure est modélisée par une compliance acoustique, pour la cuvette, et par une résistance acoustique en série avec une masse acoustique, pour la queue (cf. [Mig05]). L'impédance de rayonnement est modélisée par un système du second ordre (cf. [Hél02]). Après concaténation des tronçons et débouclage aux extrémités, nous obtenons un système que nous avons pu simuler numériquement en temps-réel.

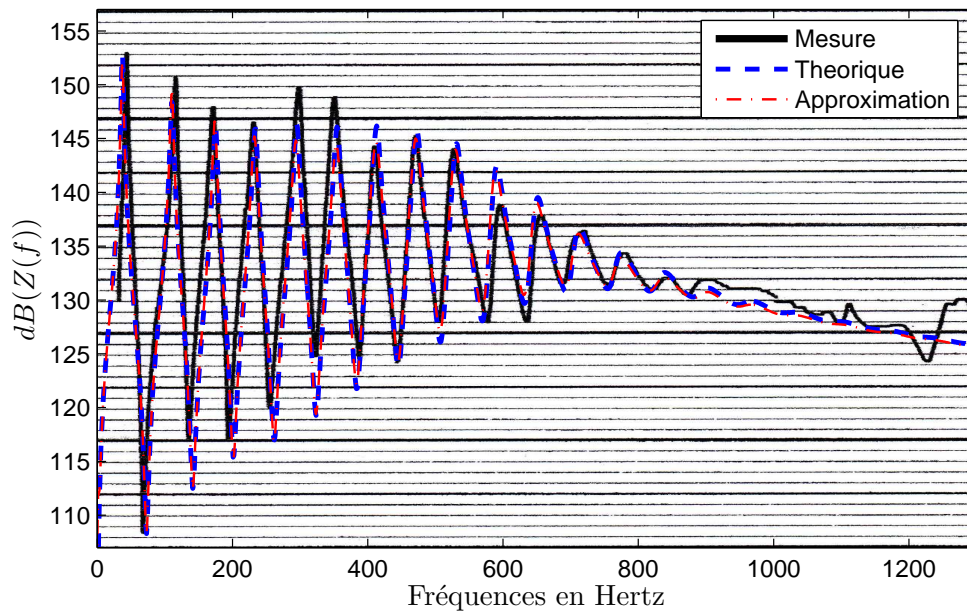


FIG. 3.8 – Comparaison de l'impédance acoustique d'entrée mesurée sur un trombone (mesure réalisée par l'équipe *Acoustique Instrumentale* de l'IRCAM), avec l'impédance calculée par notre modèle et son approximation, simulable en temps-réel.



## Chapitre 4

# Proposition d'une structure pour la simulation de tronçons à courbures négatives

## 4.1 Problèmes d'instabilités

En raison du point de branchement à partie réelle positive, dans le cas des courbures négatives, les fonctions de transfert obtenues précédemment,  $R_{(k,k+1)}$  et  $T_p$ , ne correspondent pas à des systèmes stables. Cependant, puisque les fonctions de réflexion et de transmission globales du tronçon ( $T$ ,  $R_g$  et  $R_d$ ) sont des fonctions de  $\Gamma^2$ , avec pour seul point de branchement 0 (voir leurs expressions analytiques en cosinus hyperbolique (cf. équations 2.28-2.30), le comportement global du tronçon est stable. Ce problème vient donc de leur décomposition en sous-systèmes avec exhibition des retards.

Dans [JGP90], Jean Kergomard fait un raisonnement sur des cônes convergents, et déduit que la réponse impulsionnelle de la réflexion commence à diverger, puis se stabilise et finit par converger en 0. La structure que nous avons mise en oeuvre permet d'aboutir à la même conclusion.

Considérons une impulsion se propageant dans le sens positif qui entre dans un tronçon à courbure négative. Elle est partiellement réfléchiée par la réflexion virtuelle  $R_{og}$ . La partie qui entre revient à l'extrémité gauche avec un retard de  $2L/c_0$ , puis subit des réflexions multiples caractérisant les modes internes au tronçon.

Puisque la réflexion  $R_{og}$  est instable, la réponse impulsionnelle commence par diverger, mais comme nous savons que le tronçon est globalement stable, cela signifie que les réflexions multiples, qui n'arrivent pas avant  $2\tau$ , permettent de stabiliser le système.

Nous pouvons alors nous poser la question qui nous laisse peu d'espoirs : *Puisque ce sont les retards qui permettent de stabiliser le système, est-il possible d'extraire les retards tout en conservant des fonctions stables et sans retards.*

En effet, parmi les deux écritures possibles des fonctions des transfert globales, l'une permet d'exhiber les retards mais fait apparaître des fonctions de  $\Gamma$ , instables (cf. l'écriture en exponentielles partie 3.1.2), et l'autre permet de conserver des fonctions de  $\Gamma^2$ , stables, mais qui ont des retards internes (cf. l'écriture en cosinus hyperboliques équations 2.28-2.30).

En faisant un développement asymptotique quand  $|s| \rightarrow \infty$  pour  $s \in \mathbb{C}_0^+$ , nous avons développé une méthode permettant de séparer les retards et des fonctions de  $\Gamma^2$  causales et sans retards, mais en conservant une fonction  $\epsilon(s)$  en  $\Gamma^2$  contenant du retard. L'intérêt d'utiliser un développement asymptotique est que la fonction  $\epsilon(s)$  tend d'autant plus vite en 0, que l'on pousse l'ordre du développement.

Malheureusement, une telle décomposition a fait apparaître systématiquement des pôles dans le demi-plan droit. En utilisant le critère de *Routh* nous avons pu démontrer que ces pôles ne peuvent disparaître même en utilisant un autre changement de variables.

## 4.2 Décomposition en fonctions stables, avec modes internes

La solution que nous proposons, consiste à considérer les fonctions globales stables, en  $\Gamma^2$ . Mais puisqu'elles contiennent des retards qui apparaissent sous forme de modes internes, nous allons simuler chacun de ces modes par une paire de pôles.

Dans un premier temps nous présenterons le débouclage qui apparaît entre les fonctions  $R_d^{(1)}$  et  $R_g^{(2)}$  lors de la concaténation de deux tronçons. Puis nous verrons la factorisation des pôles et des zéros en fonctions de  $\Gamma^2$ . Enfin nous étudierons la stabilité et la causalité des fonctions obtenues, ce qui nous amènera à les modifier.



### 4.2.1 Débouclage de la structure de base

La concaténation de deux quadripôles de transfert fait apparaître une boucle instantannée. En faisant les débouclages nous obtenons la structure de la figure 4.1, où  $\Delta(s) = 1 - R_d^{(1)}(s)R_g^{(2)}(s)$ .

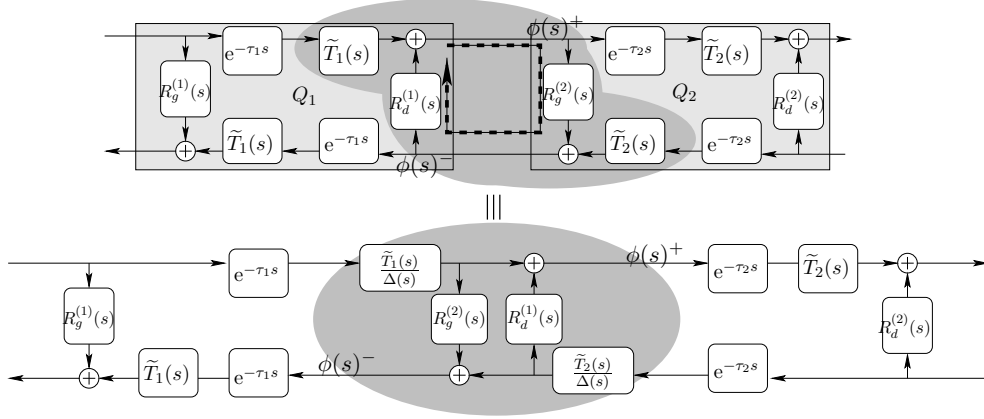


FIG. 4.1 – Débouclage à la jonction de deux quadripôles de transfert

Nous ne détaillons pas les calculs, ils sont identiques à ceux de la partie (1.3.2).

### 4.2.2 Séparation des pôles et des zéros en fonctions stables

Examinons les expressions algébriques des quatre fonctions de transfert décomposées en fonctions sans retard :

$$\frac{\tilde{T}_1(s)}{\Delta(s)} = F^+(s) \frac{(1 - K_2(s) e^{-2\tau_2 s})}{1 - (K'_\Delta(s) e^{-2\tau_1 s} + K''_\Delta(s) e^{-2\tau_2 s} + K'''_\Delta(s) e^{-2(\tau_1 + \tau_2) s})}, \quad (4.1)$$

$$\frac{\tilde{T}_2(s)}{\Delta(s)} = F^-(s) \frac{(1 - K_1(s) e^{-2\tau_1 s})}{1 - (K'_\Delta(s) e^{-2\tau_1 s} + K''_\Delta(s) e^{-2\tau_2 s} + K'''_\Delta(s) e^{-2(\tau_1 + \tau_2) s})}, \quad (4.2)$$

$$R_g^{(1)}(s) = \frac{M_R^1(s) + N_R^1(s) e^{-2\tau_1 s}}{1 - K_1(s) e^{-2\tau_1 s}}, \quad (4.3)$$

$$R_d^{(2)}(s) = \frac{M_R^2(s) + N_R^2(s) e^{-2\tau_2 s}}{1 - K_2(s) e^{-2\tau_2 s}}. \quad (4.4)$$

Nous constatons que  $R_d^{(1)}$  (respectivement  $R_g^{(2)}$ ) contient des modes dus aux réflexions multiples en  $2\tau_1 = L_1/c_0$  (resp.  $2\tau_2$ ) apparaissant au dénominateur et des zéros dus à la réflexion instantannée et à la première réflexion du tronçon retardée par  $2\tau_1$  (resp.  $2\tau_2$ ). Quant à la fonction  $\tilde{T}_1/\Delta$  (resp.  $\tilde{T}_2/\Delta$ ), nous remarquons des zéros dus à un retard en  $2\tau_2$  (resp.  $2\tau_1$ ) au numérateur et des pôles dus aux modes internes aux deux tronçons, c'est-à-dire en  $2\tau_1$ ,  $2\tau_2$  et  $2(\tau_1 + \tau_2)$  (de même pour  $\tilde{T}_2/\Delta$ ).

De plus, le numérateur de  $\tilde{T}_1/\Delta$  (resp.  $\tilde{T}_2/\Delta$ ) dont proviennent les zéros est identique au dénominateur de  $R_g^{(2)}$  (resp.  $R_d^{(1)}$ ) dont proviennent les pôles.

Ainsi, il est intéressant de factoriser de la fonction  $\tilde{T}_1/\Delta$  (resp.  $\tilde{T}_2/\Delta$ ), une fonction qui contient les zéros du tronçon en raison de la réflexion en  $2\tau_2$  (resp.  $2\tau_1$ ) et qui soit une fonction de  $\Gamma^2$  causale et stable. Nous aboutissons alors à un quadripôle de jonction de la forme présentée en figure 4.2, pour laquelle :

$$\frac{\tilde{T}_1(s)}{\Delta(s)} = H^+(s)H_{21}^z(s), \quad \frac{\tilde{T}_2(s)}{\Delta(s)} = H^-(s)H_{12}^z(s), \quad R_d^{(1)}(s) = \frac{H_{22}^z(s)}{H_{12}^z(s)} \quad \text{et} \quad R_g^{(2)}(s) = \frac{H_{11}^z(s)}{H_{21}^z(s)}.$$

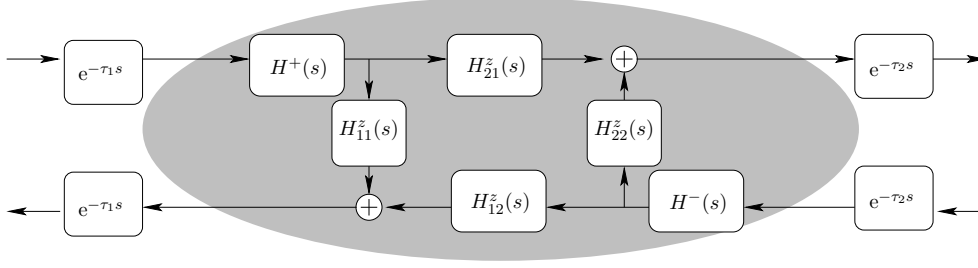


FIG. 4.2 – Quadripôle de jonction simulé

Nous choisissons  $H^+$  et  $H^-$  coupées sur  $\mathbb{R}^-$  et présentant des pôles dus aux retards en  $2\tau_1$ ,  $2\tau_2$  et  $2(\tau_1 + \tau_2)$ . Nous choisissons  $H_{11}^z$  et  $H_{21}^z$  (resp.  $H_{22}^z$  et  $H_{12}^z$ ) également coupées sur  $\mathbb{R}^-$  et présentant des zéros en  $2\tau_2$  (resp.  $2\tau_1$ ). Ceci permet de rassembler les modes internes des tronçons dans seulement deux fonctions,  $H^+$  et  $H^-$ , en vue d'une meilleur efficacité en temps de calculs.

En mettant le terme  $1 - K_2(s)e^{-2\tau_2 s}$  sous forme de cosinus hyperboliques, nous sommes en mesure de donner une expression factorisée constituée de fonctions de  $\Gamma^2$  :

$$\begin{aligned} 1 - K_2(s)e^{-2\tau_2 s} &= 1 - R_{ig}^{(2)}(s)R_{id}^{(2)}(s)e^{-2\Gamma_2(s)L_2} \\ &= G_2(s) \times H_{21}^z(s), \end{aligned} \quad (4.5)$$

avec :

$$\begin{aligned} G_2(s) &= \left[ \frac{2\Gamma_2(s)e^{-(\Gamma_2(s)-s/c_0)L_2}}{\text{den}(s)} \right], \\ H_{21}^z(s) &= \left[ \left( a_2(s) \frac{\sinh(\Gamma_2(s)L_2)}{\Gamma_2(s)} + b_2(s) \cosh(\Gamma_2(s)L_2) \right) e^{-\tau_2 s} \right], \\ \text{den}(s) &= \left( \Gamma_2(s) + \frac{s}{c_0} + \zeta_g^{(2)} \right) \left( \Gamma_2(s) + \frac{s}{c_0} - \zeta_d^{(2)} \right), \\ a_2(s) &= \left( \Gamma_2(s)^2 + \left( \frac{s}{c_0} \right)^2 - \zeta_g^{(2)}\zeta_d^{(2)} + \frac{s}{c_0} (\zeta_g^{(2)} - \zeta_d^{(2)}) \right), \\ b_2(s) &= \left( 2\frac{s}{c_0} + \zeta_g^{(2)} - \zeta_d^{(2)} \right). \end{aligned}$$

A ce stade nous avons écrit le numérateur de  $\tilde{T}_1/\Delta$ , ou le dénominateur de  $R_g^{(2)}(s)$ , sous forme d'un produit d'une fonction de  $\Gamma^2$  contenant des zéros,  $H_{21}^z$ , et d'une fonction de  $\Gamma$  sans retard,  $G_2$ .

Nous procédons de même sur  $1 - K_1(s) e^{-2\tau_1 s}$  pour la fonction  $H_{12}^z$ .  
Nous obtenons donc finalement :

$$H_{12}^z(s) = \left[ a_1(s) \frac{\sinh(\Gamma_1(s)L_1)}{\Gamma_1(s)} + b_1(s) \cosh(\Gamma_1(s)L_1) \right] e^{-\tau_1 s}, \quad (4.6)$$

$$H_{21}^z(s) = \left[ a_2(s) \frac{\sinh(\Gamma_2(s)L_2)}{\Gamma_2(s)} + b_2(s) \cosh(\Gamma_2(s)L_2) \right] e^{-\tau_2 s}, \quad (4.7)$$

$$H_{11}^z(s) = R_g^{(2)}(s) H_{21}^z(s), \quad (4.8)$$

$$H_{22}^z(s) = R_d^{(1)}(s) H_{12}^z(s), \quad (4.9)$$

$$H^+(s) = \frac{\tilde{T}_1(s)}{\Delta(s)} \frac{1}{H_{21}^z(s)}, \quad (4.10)$$

$$H^-(s) = \frac{\tilde{T}_2(s)}{\Delta(s)} \frac{1}{H_{12}^z(s)}, \quad (4.11)$$

avec :

$$a_k(s) = \left( \Gamma_k(s)^2 + \left( \frac{s}{c_0} \right)^2 - \zeta_g^{(k)} \zeta_d^{(k)} + \frac{s}{c_0} (\zeta_g^{(k)} - \zeta_d^{(k)}) \right), \quad (4.12)$$

$$b_k(s) = \left( 2 \frac{s}{c_0} + \zeta_g^{(k)} - \zeta_d^{(k)} \right). \quad (4.13)$$

Ces expressions définissent parfaitement le quadripôle de la figure 1.2 à l'aide de fonctions de transfert en  $\Gamma^2$ .

### 4.2.3 Stabilité des fonctions

Les 4 fonctions de départ sont des fonctions de  $\Gamma^2$ , en les multipliant ou en les divisant par une fonction de  $\Gamma^2$ ,  $H_{21}^z$  et  $H_{12}^z$ , nous conservons des fonctions de  $\Gamma^2$ . Nous pouvons donc les choisir sans coupure sur  $\mathbb{C}_0^+$ . Les éventuelles singularités dans le demi-plan droit ne proviendront alors pas des coupures que nous choisirons dans  $\overline{\mathbb{C}_0^-}$ . Pour l'étude de la stabilité, il reste à étudier l'existence d'éventuels pôles dans  $\mathbb{C}_0^+$ .

Pour les fonctions  $H_{21}^z$  et  $H_{12}^z$ , la stabilité est évidente. Malheureusement en raison du manque de temps et de la complexité des formules analytiques, nous n'avons pas encore prouvé l'absence de pôles dans le demi-plan droit pour les 4 fonctions restantes ( $H_{11}^z$ ,  $H_{22}^z$ ,  $H^+$  et  $H^-$ ).

Cependant, pour des paramètres typiques de tubes d'instruments, en traçant les représentations de Laplace dans  $\mathbb{C}_0^+$  des fonctions de transfert, en module et en phase (calculs numériques en *Matlab*), nous n'avons pas observé de pôles dans le demi-plan droit. En cas d'implémentation de cette méthode, nous devrons vérifier par ce moyen la stabilité de toutes les fonctions simulées. *La preuve va être cherchée d'ici la fin du stage.*

#### 4.2.4 Causalité

Pour étudier la causalité de ces fonctions, nous admettons qu'elles ne présentent pas de singularités dans  $\mathbb{C}_0^+$  et nous faisons une étude asymptotique quand  $s \rightarrow 0$  et  $|s| \rightarrow \infty$  afin de savoir si elles appartiennent à un espace de Hardy (cf. [Par04]).

Nous avons effectué le développement asymptotique à l'aide du logiciel de calculs symboliques *Maple*. Le résultat pour la fonction  $H_{21}^z$  est le suivant :

$$\begin{aligned} H_{21}^z(s) &= O(s) e^{\tau_2 \beta_2 \sqrt{s}} && \text{pour } |s| \rightarrow \infty, \\ H_{21}^z(s) &= O(1) && \text{pour } s \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Le développement asymptotique en l'infini montre que la fonction  $H_{21}^z$  n'appartient pas à un espace de Hardy, la causalité de la fonction n'est donc pas assurée. Pour la rendre causale nous proposons de la remplacer par la fonction suivante :

$$H_{21}'(s) = H_{21}^z(s) \frac{e^{-\tau_2 \beta_2 \sqrt{s}}}{(s+a)^\alpha} \text{ avec } a > 0 \text{ et } \alpha \geq 3/2. \quad (4.14)$$

Les développements en l'infini et en zéro montrent que cette nouvelle fonction est causale :

$$H_{21}'(s) = O\left(\frac{1}{s^{\alpha-1}}\right) \text{ pour } |s| \rightarrow \infty, \quad (4.15)$$

$$H_{21}'(s) = O(1) \text{ pour } s \rightarrow 0 \text{ et } a \neq 0. \quad (4.16)$$

Nous définissons  $H_{12}'(s)$  à partir de  $H_{12}^z(s)$  de la même façon et nous définissons les quatre fonctions restantes :

$$H_{11}'(s) = R_g^{(2)}(s) H_{21}'(s), \quad (4.17)$$

$$H_{22}'(s) = R_d^{(1)}(s) H_{12}'(s), \quad (4.18)$$

$$H^{+'}(s) = \frac{\tilde{T}_1}{\Delta(s)} \frac{1}{H_{21}'(s)}, \quad (4.19)$$

$$H^{-'}(s) = \frac{\tilde{T}_2}{\Delta(s)} \frac{1}{H_{12}'(s)}, \quad (4.20)$$

Nous avons ensuite pu vérifier que ces nouvelles fonctions appartiennent à un espace de Hardy, et donc qu'elles sont causales. La fonction multiplicatrice  $\left(\frac{e^{-\tau_2 \beta_2 \sqrt{s}}}{(s+a)^\alpha}\right)$  qui permet de faire appartenir  $H_{21}'$  (resp.  $H_{12}'$ ) à un espace de Hardy, aurait pu poser problème dans la définition de  $H^{+'}$  (resp.  $H^{-'}$ ), mais l'étude asymptotique en l'infini montre que le dérivateur fractionnaire  $(s+a)^\alpha$  se compense naturellement par un terme  $e^{-\tau \beta \sqrt{s}}$ . Nous avons pu en effet observer numériquement que la réponse fréquentielle commence par augmenter fortement, ce qui correspond au comportement du dérivateur, puis chute violemment grâce à l'exponentielle qui s'exprime en plus hautes fréquences.

$$H^{+'}(s) = O(s^{\alpha-1})e^{-\tau\beta\sqrt{s}}, \quad \text{quand } |s| \rightarrow \infty \text{ avec } s \in \mathbb{C}_0^+. \quad (4.21)$$

Précisons que contrairement à la structure de Kelly-Lochbaum valable pour les courbures positives (cf. chapitre 3), cette structure n'a pas de justification physiquement censée. Les factorisations que nous avons effectuées permettent simplement une réécriture mathématique du système en vue d'une simulation plus efficace en temps de calculs. Quant aux modifications artificielles effectuées en équation 4.14, elles nous permettent d'obtenir des fonctions stables et causales appartenant à un espace de Hardy.

Nous proposerons en perspectives de chercher une solution physiquement interprétable, qui permettrait entre autre d'obtenir des preuves de stabilité plus simples.

#### 4.2.5 Réalisation numérique

Pour approximer les six fonctions de transfert précédemment présentées, nous devons dans un premier temps déterminer la position exacte des pôles caractérisant les modes internes. Puis nous placerons les pôles le long de la coupure, que nous choisirons sur  $\mathbb{R}^-$ , pour l'approximation de la représentation diffusive. Il restera à réaliser l'approximation des résidus de chaque pôles par une optimisation des moindres carrés brièvement présentée en partie (1.2.4).

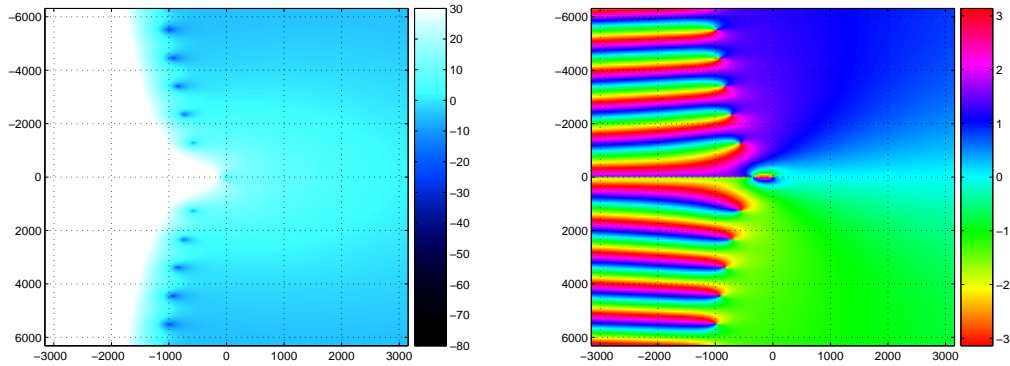


FIG. 4.3 – Représentation de Laplace de la Fonction  $H_{21}^z$ . A gauche est représenté le module et à droite la phase. Les paramètres utilisés sont illustrés par le profil du tube en figure 4.5. Nous remarquons les zéros de la fonction ainsi que la coupure sur  $\mathbb{R}^-$  caractérisée par le changement de signe (voir la phase).

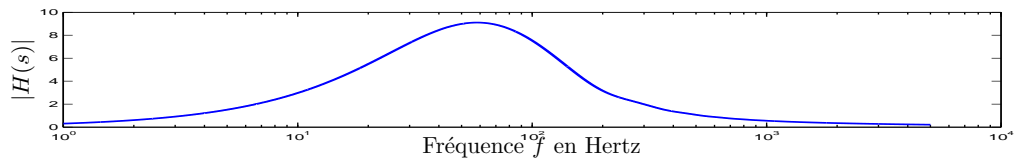


FIG. 4.4 – Réponse fréquentielle de  $H_{21}^z$  en module.

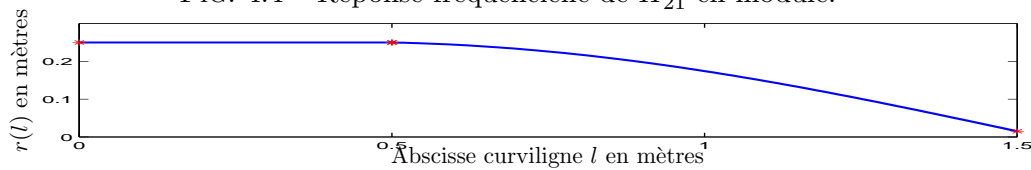


FIG. 4.5 – Profil utilisé pour l’affichage de la fonction  $H_{21}^z$ . Les étoiles délimitent les deux tronçons de longueur 50cm et 1m.

# Conclusion

## Résumé du document

Ce travail avait pour but la modélisation de la propagation d'ondes acoustiques dans les tubes pour la simulation numérique en temps-réel. Suite au travail de l'an dernier, nous avons deux buts principaux : le modélisation des tronçons à courbures négatives par des systèmes stables et l'amélioration de la structure. Ces deux objectifs sont atteints, mais pas simultanément. En effet nous avons pu réduire la complexité du système par une structure simple mais instable pour les courbures négatives, et nous avons proposé une solution pour la modélisation des courbures négatives mais relativement complexe.

Dans un premier temps nous avons présenté les travaux déjà existants et les outils mathématiques adaptés à la résolution de notre problème.

Dans une seconde partie nous avons déterminé la décomposition en ondes progressives causales et stables, que nous avons utilisée pour la modélisation du tube en guide d'ondes. Puis nous avons écrit l'effet d'un tronçon sur ces ondes par un quadripôle à 4 fonctions de transfert.

La troisième partie a concerné l'optimisation de la structure pour les courbures positives. Nous avons vu que grâce à un raisonnement physiquement censé et simple, nous avons été en mesure de récrire le quadripôle en structure de Kelly-Lochbaum, ce que nous n'avions pas réussi à partir des équations analytiques ou algébriques. Le lien avec les mathématiques a pu se faire grâce à une identification.

Lors de la quatrième partie, nous avons proposé une méthode qui permet de conserver des fonctions stables dans le cas des courbures négatives. Pour ce faire nous avons dû considérer des fonctions contenant des retards internes, et qui s'expriment soit par des modes internes ou par un réseau de zéros.

## Perspectives

Pour l'aboutissement d'un modèle complet d'instrument à vent, il reste encore un certain nombre de points à développer ou à éclaircir. Parmi les choses facilement implémentables, puisqu'il existe déjà un certain nombre de données, on peut citer :

- Premièrement la modélisation des pistons (ou pallettes) avec plusieurs tubes en parallèles, des trous et des clefs. Nous pouvons également envisager de produire de façon assez approximative les coulisses par un simple retard variable et une interpolation entre deux fonctions,  $T_{p_{max}}$  et  $T_{p_{min}}$ , calculées pour la longueur maximale et minimale de la coulisse. Cependant, une étude plus rigoureuse semble très délicate.

- Pour obtenir un son, il est nécessaire de réaliser la connexion du résonateur sur un modèle d'excitateur. Il existe un certain nombre de modèles d'excitateurs, il serait intéressant de réaliser cette connexion, au moins pour le plaisir d'entendre de ses propres oreilles le fruit du travail fourni.

D'autres points demanderont plus de réflexion :

- Le premier problème à résoudre est celui de la modélisation des tubes à courbures négatives par une structure de type Kelly-Lochbaum. J'ai appris un certain nombre de choses sur le travail de recherche, notamment qu'il arrive de ne pas trouver les solutions cherchées, et de les trouver quand on ne les cherche plus. Avec plus de temps, plus de recul et plus de



lecture d'articles, peut-être arriverons nous à trouver l'idée qui nous a manquée. Cette solution s'obtiendra probablement par une réinterprétation physique des phénomènes acoustiques.

- Il est également nécessaire de réaliser l'amélioration de l'optimisation. Actuellement, les pôles sont placés sur la coupure et leurs poids sont optimisés par les moindres carrés, mais nous n'avons pas de méthode permettant de déterminer la position optimale des pôles selon la fonction à optimiser. Nous avons simplement choisi de les placer selon un espacement en échelle logarithmique. Par manque de temps, nous n'avons pas introduit de contraintes sur l'optimisation. Cependant la stabilité du système est prouvée pour des fonctions,  $R_i$  et  $T_p$ , inférieures à 1 en module dans  $\mathbb{C}_0^+$ . Si les approximations dépassent 1 en module, alors il y a risque d'instabilités.

- Finalement, il est intéressant de compléter le modèle par la prise en compte des non-linéarités qui apparaissent dans des effets dits de *cuivrage* et qui permettent à l'instrumentiste d'enrichir le timbre de son instrument pour une expressivité plus marquée.



## Annexe A

# Symboles Mathématiques et Constantes Physiques

Voici la signification des symboles mathématiques utilisés dans le document et les valeurs des constantes physiques que nous avons utilisées :

Symbol :	$\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$
Nom :	Dérivée partielle par rapport à $x$

TAB. A.1 – Tableau des symboles mathématiques

Symbol :	$c_0$	$\rho$	$\mu$	$\kappa_0$
Nom :	célérité du son	masse volumique de l'air	viscosité de cisaillement	pertes viscothermiques
Valeur :	344	1.2	$1.8 \cdot 10^{-5}$	$3.5 \cdot 10^{-4}$
Unité :	m/s	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$	$\text{kg} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$	$\text{m}^{1/2}$

TAB. A.2 – Tableau des constantes physiques



# Bibliographie

- [Bru98] M. Bruneau, *Manuel d'acoustique fondamentale*, Hermès, Paris, 1998.
- [DMM06] T. Helie D. Matignon and R. Mignot, *Criterion design for optimizing low-cost approximations of infinite dimensional systems : towards efficient real-time simulation*, IFAC WORKSHOP "Control Application of Optimisation" (2006).
- [Duc01] E. Ducasse, *Modélisation et simulation dans le domaine temporel d'instruments à vent à anche simple en situation de jeu : méthodes et modèles*, Ph.D. thesis, ENSAM, 2001.
- [Dun00] M. Dunau, *Représentations diffusives de seconde espèce : introduction et expérimentation*, Master's thesis, DEA d'Automatique, Toulouse, 2000.
- [Hél00] D. Héleschewitz, *Analyse et simulation de systèmes différentiels fractionnaires et pseudo-différentiels linéaires sous représentation diffusive*, Ph.D. thesis, Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications, 2000.
- [Hél02] Th. Hélie, *Modélisation physique des instruments de musique en systèmes dynamiques et inversion (Physical modeling of musical instruments with dynamic systems and inversion processes)*, Ph.D. thesis, Université Paris-Sud, Orsay, France, 2002, pp. 17–53.
- [JAK99] A. Barjau J. Agullo and D.H. Keefe, *Acoustic propagation in flaring, axisymetric horns : I. a new family of unidimensional solutions*, *Acoustica* **85** (1999).
- [JGP90] J. Kergomard J. Gilbert and J.D. Polack, *On the reflection functions associated with discontinuities in conical bores*, *J. Acoust. Soc. Am.* **04** (1990).
- [Mat94] D. Matignon, *Représentations en variables d'état de guides d'ondes avec dérivation fractionnaire*, Ph.D. thesis, Université Paris-Sud, 1994.
- [MG73] J.D. Markel and A.H. Gray, *On autocorrelation equations as applied to speech analysis*, *IEEE Trans. Audio and Electroacoust.* **AU-21** (1973), no. 2, pp. 69–79.
- [MG76] J.D. Markel and A.H. Gray, *Linear prediction of speech*, Springer-Verlag, Berlin, 1976.
- [Mig05] R. Mignot, *Simulation de propagation d'ondes dans les tubes évasés avec pertes visco-thermiques pour la synthèse sonore en temps-réel*, Master's thesis, Université Paris 6, 2005.
- [Mon98] G. Montseny, *Diffusive representation of pseudo-differential time-operators*, *ESAIM Proceedings* **5** (1998), 159–175.
- [MZed] D. Matignon and H. J. Zwart, *Standard diffusive systems as well-posed linear systems*, *Systems and Control Letters* (2005 (submitted)).

- [Par04] J. R. Partington, *Linear operators and linear systems*, London Mathematical Society Student Texts (No. 60), Cambridge University Press, London, 2004.
- [Sta94] O. J. Staffans, *Well-posedness and stabilizability of a viscoelastic equation in energy space*, Trans. Amer. Math. Soc. **345** (1994), no. 2, 527–575, Note : in § 5 standard diffusive representations of the first kind are defined ; in § 6, generalized diffusive representations of the second kind are introduced.
- [TD06] T.Hélie and D.Matignon, *Diffusive representations for the analysis and simulation of flared acoustic pipes with visco-thermal losses*, Math. Models and Method in Applied Sciences (M3AS) **05** (2006).