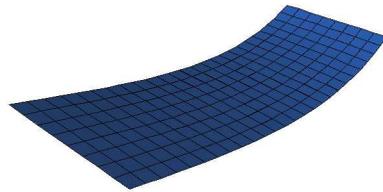


Développement d'éléments coques et modélisation
de la précontrainte
Application à la synthèse sonore dans le logiciel
Modalys



Projet de Recherche
Insa de Rouen, Département Mécanique
Janvier 2005

David Roze

Responsable du stage à l'Ircam : Joël Bensoam
Responsable du stage à l'Insa : Abdelkhalak El Hami

Remerciements

Je tiens à remercier mon tuteur Joël Bensoam pour ses précieux conseils et tout le temps qu'il a consacré au bon déroulement de ce projet, ainsi que Abdelkhalak El Hami responsable du stage à l'Insa. Merci également aux autres membres de l'équipe acoustique instrumentale, René Caussé, Nicholas Ellis, Christophe Vergez et Gérard Bertrand pour leur aide et leur accueil.

Je souhaite aussi remercier tous mes collègues du labo 7, Claudia, Aude, André, Matthias et Ambroise, avec qui j'ai passé plus ou moins de temps, mais toujours des très bons moments.

Table des matières

Introduction	5
1 Ecriture du problème général	7
1.1 Formulation variationnelle	7
1.2 Cinématique	8
1.3 Etude statique	10
1.4 Etude dynamique	11
1.5 Etude de la précontrainte	12
2 Discrétisation par éléments finis	14
2.1 Choix de l'élément	14
2.2 Matrice de raideur	15
2.3 Matrice masse	16
2.4 Conditions aux limites	16
2.5 Intégration numérique	18
2.6 Validation : Etude des fréquences propres	18
2.7 Implémentation de l'élément dans le code	20
2.8 Détermination de la matrice de raideur élémentaire	20
2.9 Détermination de la matrice masse élémentaire	21
2.10 Ecriture des conditions aux limites	22
3 Discrétisation en éléments coques par assemblage d'éléments plaques	23
3.1 Utilisation d'un degré de liberté fictif	24
3.2 Comparaison des éléments	25
4 Calcul statique et problème de verrouillage	28
4.1 Résolution du problème en statique	28
4.2 Verrouillage	28
4.3 Nouvelle étude des performances de l'élément	30
5 Etude de la précontrainte	33
5.1 Introduction	33
5.2 Application à la plaque	33
5.3 Création de la matrice de raideur géométrique	34
5.4 Validation de la matrice de raideur géométrique	35
Conclusion	39
Annexes	40

A	Discrétisation de l'énergie de déformation	40
A.1	Energie de déformation due au cisaillement	40
A.2	Energie de membrane	41
A.3	Discrétisation de l'énergie de précontrainte	42
B	Développement de la matrice de raideur géométrique	44
C	Détermination des conditions aux limites (hypothèses de Kirschoff)	46
	Références	48

Introduction

La synthèse sonore a pour but d'offrir aux artistes un élargissement des outils disponibles. Depuis quelques dizaines d'années, on cherche dans le cadre d'activités plus ou moins musicales à recréer les sons et en particulier ceux des instruments de musique. Et ce afin de mieux pouvoir les retravailler.

Historiquement, une des premières méthodes utilisée pour faire de la synthèse sonore était l'échantillonnage. Ce procédé qui consiste à enregistrer puis à rejouer un même son montre vite ses limites quand il s'agit de reproduire un jeu instrumental. En effet, est-ce que le fait de rejouer le même son plus fort va modifier ses caractéristiques. En écoutant un musicien, il est aisé de se rendre compte que le simple choix de la nuance (doux ou fort par exemple) peut jouer sur nombres de paramètres : l'attaque, la pression et la vitesse de l'air, l'extinction... L'échantillonnage ne tient évidemment pas compte de tout ceci.

Une nouvelle méthode de production de son utilisant la modélisation physique a donc été imaginée et approfondie, en particulier à l'Ircam. L'utilisation de ces modèles nécessite de définir un excitateur et un résonateur. La simulation de la structure permet alors de mieux tenir compte de la réalité en modélisant précisément la géométrie. La méthode des guides d'ondes par exemple permet de résoudre les équations des ondes en régime stationnaire. L'assemblage de plusieurs guides d'ondes peut permettre de créer une clarinette en tenant compte de l'oscillation de l'anche au niveau du bec, de la position des trous, et enfin du pavillon pour le rayonnement. Plusieurs synthétiseurs commerciaux ont utilisé cette technique à partir des années 90, et plusieurs projets de l'Ircam sont également basés dessus.

La dernière technique de synthèse sonore en date est en fait la synthèse modale. Grâce à une prise en compte assez poussée de la géométrie de la structure, le calcul des modes de vibrations permet d'effectuer une synthèse sonore en un point de l'objet choisi par l'utilisateur. Même si le rayonnement n'est pas pris en compte pour l'instant, le logiciel Modalys développé à l'Ircam permet d'effectuer une synthèse sonore sur tout type de système résonateur-excitateur imaginé par le compositeur. Ainsi Mauro Lanza compositeur à l'Ircam a-t-il écrit une partie de la musique de l'opéra *Le songe de Médée* grâce au logiciel Modalys.

L'équipe *Acoustique instrumentale* de l'Ircam continue d'enrichir Modalys de nouvelles fonctionnalités (cf. [1]). Ainsi sous la responsabilité de Joël Bensoam j'ai été chargé d'enrichir le module Éléments Finis de Modalys d'éléments bidimensionnels. En effet cette partie du programme qui calcule les données modales nécessaires à la synthèse sonore n'acceptait que les éléments hexaédriques. Ce type d'élément principalement destiné aux structures massives convenait donc peu à la discrétisation de structures minces, telles qu'une table d'harmonie de piano. Puis dans un second temps j'ai étudié

le phénomène de précontrainte afin de l'appliquer dans Modalys. L'exemple de la table d'harmonie de piano correspond tout à fait aux applications qui seront faites de ce travail. En effet une des spécificités de l'étude vibro-acoustique des instruments de musiques est l'obligation, pour obtenir des résultats corrects, de tenir compte de la précontrainte et de son influence sur les modes et donc sur la justesse de l'instrument. Il peut être intéressant de se demander à quoi ressemblerait le son d'un piano avec une table d'harmonie non précontrainte.

Nous verrons donc dans ce rapport les différents problèmes posés par la mise en oeuvre de la théorie des plaques dans la méthode des éléments finis.

Une première section présentera les équations générales et les différentes hypothèses qui leurs sont appliquées. Dans les deux sections suivantes, la discrétisation de ces équations nous fournira les matrices élémentaires que nous validerons par une analyse modale. Enfin la question de la précontrainte sera posée à travers la résolution du problème statique et la création de la matrice de raideur géométrique. Une fois confiants en les modes et déformées calculés, la détermination du premier mode de flambement d'une plaque carrée nous permettra de valider l'élément.

1 Ecriture du problème général

1.1 Formulation variationnelle

La formulation variationnelle pour une structure linéarisée précontrainte est issue des équations d'équilibre de la mécanique des milieux continus dans un espace tridimensionnel (réf. [3]). Elle se présente sous la forme suivante

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho \ddot{\mathbf{u}} \hat{v}_k d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{km}^0 \mathbf{u}_{l,m} \hat{v}_{l,k} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbb{C}_{klmn} \tilde{e}_{mn}(\mathbf{u}) \hat{d}_{kl} d\Omega \\ + \int_{\partial\Omega} t_k^0 (\mathbf{u}_{k,k} - \tilde{e}_n) \hat{v}_k d\partial\Omega = \int_{\Omega} \rho \bar{f}_k \hat{v}_k d\Omega + \int_{\partial\Omega} \bar{t}_k \hat{v}_k d\partial\Omega \end{aligned} \quad (1.1)$$

avec

- Ω : volume de la structure précontrainte
- \mathbf{u} : champ de déplacement
- \hat{v} : champ de déplacement virtuel
- $\hat{d}_{kl} = \frac{1}{2}(\hat{v}_{k,l} + \hat{v}_{l,k})$: champ de vitesse de déformation virtuel
- $\tilde{e}_{mn} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_{m,n} + \mathbf{u}_{n,m})$
- \mathbb{C} : matrice de la loi de comportement
- \bar{t} : forces surfaciques
- f : forces volumiques
- \tilde{e}_n et t_k^0 sont des termes de surface qui seront négligés par la suite

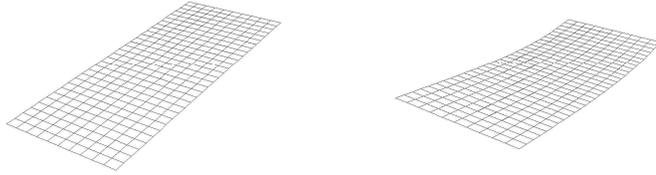


FIG. 1 – L'objet de notre étude est de résoudre un problème statique sur la plaque Ω^0 avant d'effectuer une analyse modale tenant compte de la précontrainte sur la plaque déformée Ω

La figure 1 présente l'objet de notre étude dans le cadre de la modélisation de la précontrainte. La plaque au repos Ω^0 subit une déformation plus ou moins importante. C'est autour de la configuration d'équilibre de la plaque déformée Ω que seront étudiées les vibrations. Cette structure a une dimension négligeable devant les deux autres ce qui permet d'exprimer différemment la formulation variationnelle (1.1).

La première hypothèse utilisée est que nous limitons l'étude à un comportement élastique linéaire qui nous permet d'utiliser la matrice de Hook. Il est alors pratique d'écrire les tenseurs de contrainte et de déformation sous forme vectorielle

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} \end{bmatrix} \quad \sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix}$$

Le problème consiste alors à trouver \mathbf{u} tel que $\forall \hat{v}$

$$\int_{\Omega} \rho \hat{v} \ddot{\mathbf{u}} d\Omega + \int_{\Omega} \hat{v}^t B^t C B \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Omega} \hat{v} E^t \Sigma^0 E \mathbf{u} d\Omega = \int_{\Omega} \rho \bar{f}_k \hat{v}_k d\Omega + \int_{\partial\Omega} \bar{t}_k \hat{v}_k d\partial\Omega \quad (1.2)$$

1.2 Cinématique

La spécificité de notre volume Ω intervient alors puisque l'épaisseur e est négligeable devant les autres dimensions. Deux choix de théorie sont alors possibles :

Les plaques de Kirchoff ne prennent pas en compte le cisaillement transverse et sont donc adaptées aux structures minces. Cependant la discrétisation peut se révéler complexe car le déplacement normal à la plaque et les rotations sont couplés.

La théorie de Mindlin prend en compte le cisaillement transverse. La modélisation des plaques épaisses devient alors possible. Ces hypothèses présentent l'avantage d'une discrétisation par éléments finis plus aisée. En effet un élément linéaire peut suffire à interpoler tous les degrés de liberté qui sont indépendants les uns des autres. Le champ de déplacement devient une fonction de deux rotations et du déplacement normal à la plaque présentés figure 2

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_{(x,y)} \\ v_{(x,y)} \\ w_{(x,y)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z\beta_x \\ z\beta_y \\ w \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

Ce choix nous permet de déterminer la forme de la matrice B qui fait le lien entre les déplacements et les déformations

$$\epsilon = Bq \quad (1.4)$$

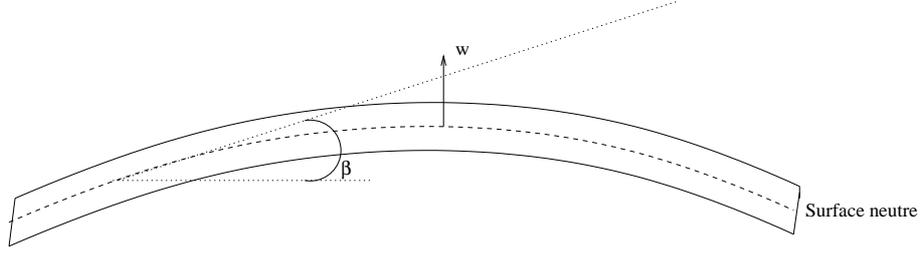


FIG. 2 – Cinématique de la plaque

avec

$$B = \begin{bmatrix} 0 & z \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & z \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & z \frac{\partial}{\partial y} & z \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x} & 1 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} w \\ \beta_x \\ \beta_y \end{bmatrix}$$

Le terme associé à la précontrainte s'écrit sous la forme matricielle E qui calcule toutes les dérivées des déplacements

$$E = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & z \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & z \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & z \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & z \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La formulation variationnelle est alors adaptée au problème de plaque de volume Ω , présentée figure 3, ayant subi une déformation caractérisée par le champ de contrainte σ^0 . Le problème devient de trouver le champ de déplacement q tel que $\forall \hat{q}$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho \hat{q} \ddot{q} d\Omega + \int_{\Omega} \hat{q}^t B(z)^t \mathbb{C} B(z) q d\Omega + \int_{\Omega} \hat{q} E(z) \Sigma^0 E(z) q d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \rho \bar{f}_k \hat{q}_k d\Omega + \int_{\partial\Omega} \bar{t}_k \hat{q}_k d\partial\Omega \end{aligned}$$

Afin d'exprimer la formulation variationnelle et de simplifier l'intégration sur Ω , il est possible d'exprimer la dépendance en z afin d'avoir pour notre étude une intégration analytique dans l'épaisseur et une intégration numérique sur

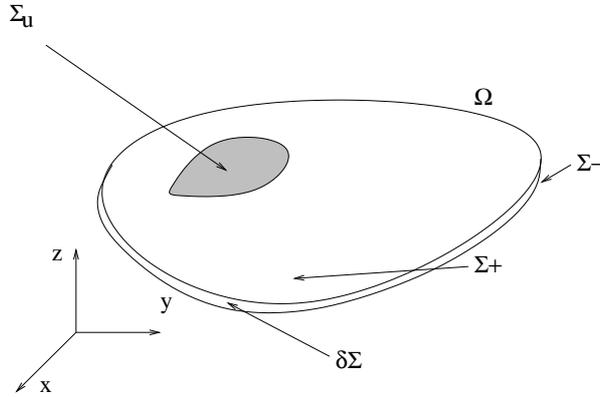


FIG. 3 – Le solide Ω a une dimension négligeable devant les deux autres

la surface. Dans le domaine continu, cela suppose que notre plaque est plane dans le plan xy . Une fois l'étape de discrétisation effectuée, cette condition ne pose aucun problème, nos éléments étant plans.

1.3 Etude statique

En se limitant au cas où σ^0 est un champ créé par une contrainte mécanique en petite déformation, il faut résoudre un problème de statique où seul intervient un terme de raideur matérielle, les termes d'inertie et de pré-contrainte étant nuls

$$\int_{\Omega} \hat{q}^t B(z) C B(z) q d\Omega = \int_{\Omega} \rho \bar{f}_k \hat{q}_k d\Omega + \int_{\partial\Omega} \bar{t}_k \hat{q}_k d\partial\Omega \quad (1.5)$$

L'équation (1.5) est équivalente à la recherche du minimum de $J(v)$

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} v^t B^t(z) C B(z) v d\Omega - \int_{\Omega} \bar{f} v d\Omega - \int_{\partial\Omega} \bar{t}_k v d\partial\Omega \quad (1.6)$$

Compte tenu des équations (1.3) et (1.4), la loi de Hook pour un matériau isotrope donne

$$\begin{aligned} J(q) &= \frac{E}{2(1-\nu^2)} \int_{\Omega} (z\beta_{x,x})^2 + (z\beta_{y,y})^2 + 2\nu z^2 (\beta_{x,x}\beta_{y,y}) \\ &+ \frac{1-\nu}{2} (z^2 (\beta_{x,y} + \beta_{y,x})^2 + (w_{,x} + \beta_x)^2 + (w_{,y} + \beta_y)^2) d\Omega \\ &- \int_{\Omega} f q d\Omega - \int_{\partial\Omega} \bar{t}_k q d\partial\Omega \end{aligned}$$

Le terme des forces volumiques sera négligé par la suite, tandis que les forces surfaciques seront associées aux surfaces définies figure 3.

$$\int_{\partial\Omega} \bar{t}_k q d\partial\Omega = \int_{\Sigma^+} P_+ q d\Sigma^+ + \int_{\Sigma^-} P_- q d\Sigma^- + \int_{\delta\Sigma} P_{tranche} q d\delta\Sigma \quad (1.7)$$

La fonctionnelle peut être simplifiée en intégrant sur l'épaisseur

$$\begin{aligned}
J(q) &= \frac{Ee^3}{24(1-\nu^2)} \left(\int_{\Sigma} (\beta_{x,x})^2 + (\beta_{y,y})^2 + 2\nu(\beta_{x,x}\beta_{y,y}) \right. \\
&+ \left. \frac{1-\nu}{2} (\beta_{x,y} + \beta_{y,x})^2 d\Sigma \right) \\
&+ \frac{Ee\kappa}{4(1+\nu)} \int_{\Sigma} (w_{,x} + \beta_x)^2 + (w_{,y} + \beta_y)^2 d\Sigma \\
&- \int_{\Sigma^+} P_+ q d\Sigma^+ - \int_{\Sigma^-} P_- q d\Sigma^- - \int_{\delta\Sigma} P_{tranche} q d\delta\Sigma \quad (1.8)
\end{aligned}$$

avec Σ plan neutre de la plaque. Les deux premières lignes de l'équation (1.8) sont les termes de flexion, la troisième ligne comprend le cisaillement transverse puis l'équation se termine par l'écriture des forces extérieures. Le terme de cisaillement transverse a vu apparaître un coefficient $\kappa = \frac{5}{6}$. Ce facteur se retrouve souvent dans la littérature sous le nom de *facteur de correction du cisaillement transverse* (cf. réf.[4]).

1.4 Etude dynamique

Avant de résoudre le problème avec précontrainte, il faut valider notre code avec un élément simple. L'objectif principal de cet étude est de prendre en compte la précontrainte dans une analyse modale. Les éléments plaque seront donc tout d'abord validés par une analyse modale et une comparaison des fréquences obtenues avec les résultats analytiques (issus des abaques de Leissa [5]) et expérimentaux (spectres des modes propres d'une plaques obtenus par Yvon et Derre lors d'un stage à l'Ircam [9]).

Le terme d'inertie de la forme variationnelle est réécrit de la manière suivante

$$\begin{aligned}
m_{(u,v)} &= \int_{\Omega} \rho \hat{v} \ddot{u} d\Omega \\
&= \int_{\Omega} \rho \hat{q}^t B_0^t B_0 \ddot{q} d\Omega + \int_{\Omega} \rho z \hat{q}^t B_1^t B_1 \ddot{q} d\Omega \\
&= e \int_{\Sigma} \rho \hat{q}^t B_0^t B_0 \ddot{q} d\Sigma + \frac{e^3}{12} \int_{\Sigma} \rho \hat{q}^t B_1^t B_1 \ddot{q} d\Sigma \quad (1.9)
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{u}} &= \begin{bmatrix} z\ddot{\beta}_x \\ z\ddot{\beta}_y \\ \ddot{w} \end{bmatrix} (B_0 + zB_1)\ddot{\mathbf{q}} = (B_0 + zB_1) \begin{bmatrix} \ddot{w} \\ \ddot{\beta}_x \\ \ddot{\beta}_y \end{bmatrix} \\ B_0 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ B_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

La résolution en dynamique et en statique sera réalisée grâce à la discrétisation présentée en section 2. La partie statique est destinée à résoudre l'équation

$$KU = F \quad (1.10)$$

tandis que la partie dynamique avec la prise en compte des termes d'inertie étudie le problème aux valeurs propres écrit dans le domaine fréquentiel

$$(K - \omega^2 M)\Phi = 0. \quad (1.11)$$

1.5 Etude de la précontrainte

Le phénomène de précontrainte intervient dans l'analyse modale par une raideur supplémentaire due à un champ de contraintes. Ce dernier peut-être d'origine quelconque cependant l'étude a été restreinte aux petites déformations résultant de l'analyse statique. Cette raideur supplémentaire est appelée raideur géométrique et est définie dans la matrice K_σ

$$((K + K_\sigma) - \omega^2 M)\Phi = 0 \quad (1.12)$$

Comme le montre l'équation (1.1), la raideur géométrique dépend du tenseur de contrainte σ^0 . Ce tenseur est obtenu grâce au calcul des déformations auxquelles on applique la loi de Hook, les déformations étant calculées par les dérivations du champ de déplacement. Dans le cas des petites déformations de plaques en flexion, ce tenseur est de la forme

$$\begin{aligned}\sigma^0 &= \begin{bmatrix} za & zb & c \\ zb & zd & g \\ c & g & zf \end{bmatrix} \\ &= z\sigma_f + \sigma_c \\ &= z \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ b & d & 0 \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & g \\ c & g & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

De la même manière la matrice E peut s'écrire

$$\begin{aligned}
E(z) &= E_0 + zE_1 \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Durant l'intégration dans l'épaisseur les puissances de z impaires vont disparaître car notre plaque est supposée isotrope homogène. La forme bilinéaire de la matrice de raideur géométrique s'écrit alors

$$\begin{aligned}
k_{\sigma(u,v)}^0 &= \int_{\Omega} \hat{q} E^t \Sigma^0 E q d\Omega \\
&= \int_{\Omega} \hat{q} E_0^t \Sigma_{\sigma_c}^0 E_0 q d\Omega + \int_{\Omega} z^2 \hat{q} E_1^t \Sigma_{\sigma_c}^0 E_1 q d\Omega \\
&\quad + \int_{\Omega} z^2 \hat{q} E_0^t \Sigma_{\sigma_f}^0 E_1 q d\Omega + \int_{\Omega} z^2 \hat{q} E_1^t \Sigma_{\sigma_f}^0 E_0 q d\Omega \quad (1.13)
\end{aligned}$$

La discrétisation de cette forme bilinéaire sert à construire K_{σ} qui en tenant compte du champ de contraintes permet d'observer une évolution des modes et de prévoir le phénomène de flambage qui intervient lorsque l'une des fréquences propres devient nulle comme présenté dans la section 5.4.

2 Discrétisation par éléments finis

La discrétisation de la forme variationnelle est faite par la méthode des éléments finis. Les matrices de raideur et de masse élémentaires doivent être déterminées, pour effectuer la résolution.

2.1 Choix de l'élément

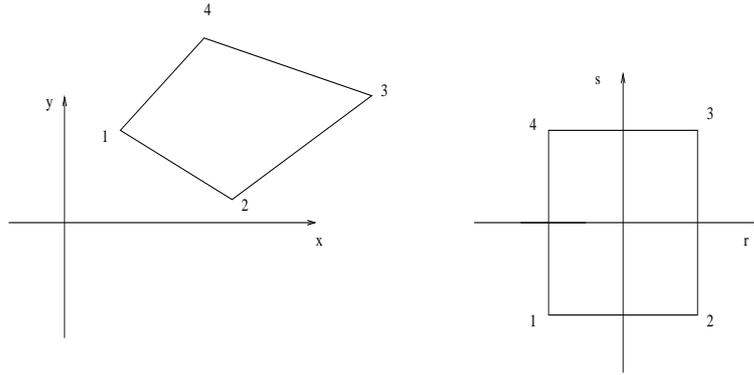


FIG. 4 – Espace réel et espace de référence (les côtés ont pour coordonnée 1 ou -1 suivant chaque axe) du quadrangle

Les quadrangles isoparamétriques sont utilisés pour mailler notre structure en ayant des fonction d'interpolations identiques pour la géométrie et les degrés de liberté. L'élément quadrangle à 4 noeuds est en effet plus simple à interpoler qu'un triangle. De plus ce type d'élément est suffisamment performant pour modéliser des plaques avec cisaillement transverse tandis qu'il est insuffisant pour utiliser les hypothèses de Kirchoff. La coordonnée x d'un point du volume peut alors s'écrire

$$x_i = \sum_{i=1}^n x_i N_{i(r,s)} = N^t X \quad (2.1)$$

où r et s sont les axes des coordonnées de références (cf. fig. 4).

Le vecteur N est défini ainsi

$$N = \begin{pmatrix} (1-r)(1-s) \\ (1+r)(1-s) \\ (1+r)(1+s) \\ (1-r)(1+s) \end{pmatrix}$$

Jacobien La matrice de passage entre les deux espaces est la matrice Jacobienne. Elle permet d'exprimer les relations entre les dérivées selon les deux

types de coordonnées.

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix}$$

L'écriture suivante résulte de l'application des fonctions d'interpolation sur les quatres noeuds de l'élément

$$J = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (1+s)(X_3 - X_4) + (1-s)(X_2 - X_1) & (1+s)(Y_3 - Y_4) + (1-s)(Y_2 - Y_1) \\ (1+r)X_3 - X_2 + (1-r)(X_4 - X_1) & (1+r)(Y_3 - Y_2) + (1-r)(Y_4 - Y_1) \end{bmatrix}$$

Les coordonnées intrinsèques sont utilisées pour faciliter l'intégration numérique en se limitant à un domaine en deux dimensions entre -1 et 1. Pour une plaque en flexion, 3 degrés de liberté sont nécessaires : w, β_x, β_y .

$$\begin{bmatrix} \beta_{x,x} \\ \beta_{x,y} \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \beta_{x,r} \\ \beta_{x,s} \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} N_{,r}^t \\ N_{,s}^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{x_1} \\ \beta_{x_2} \\ \beta_{x_3} \\ \beta_{x_4} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

2.2 Matrice de raideur

L'équation (1.5) peut maintenant être discrétisée en fonction de l'élément choisi. Les matrices B pour le phénomène de flexion et le cisaillement deviennent des fonctions de l'interpolation N

$$\begin{aligned} [\epsilon_f] &= \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{xy} \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} \beta_{x,x} \\ \beta_{y,y} \\ \beta_{x,y} + \beta_{y,x} \end{bmatrix} = z [B_f] \{q\} \\ &= z \begin{bmatrix} J_{1*}^{-1} & 0 \\ 0 & J_{2*}^{-1} \\ J_{2*}^{-1} & J_{1*}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & N_{,r}^t & 0 \\ 0 & N_{,s}^t & 0 \\ 0 & 0 & N_{,r}^t \\ 0 & 0 & N_{,s}^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ \beta_{x_1} \\ \beta_{x_2} \\ \beta_{x_3} \\ \beta_{x_4} \\ \beta_{y_1} \\ \beta_{y_2} \\ \beta_{y_3} \\ \beta_{y_4} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

avec $[J_{1*}^{-1}] = [J_{11}^{-1} J_{12}^{-1}]$ et $[J_{2*}^{-1}] = [J_{21}^{-1} J_{22}^{-1}]$

$$\begin{aligned}
[\epsilon_c] &= \begin{bmatrix} \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_x + w_{,x} \\ \beta_y + w_{,y} \end{bmatrix} = [B_c] \{q\} \\
&= \begin{bmatrix} J_{1*}^{-1} & 1 & 0 \\ J_{2*}^{-1} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{,r}^t & 0 & 0 \\ N_{,s}^t & 0 & 0 \\ 0 & N^t & 0 \\ 0 & 0 & N^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ \beta_{x_1} \\ \beta_{x_2} \\ \beta_{x_3} \\ \beta_{x_4} \\ \beta_{y_1} \\ \beta_{y_2} \\ \beta_{y_3} \\ \beta_{y_4} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

La matrice de raideur élémentaire est définie par

$$\begin{aligned}
K^e &= K_f^e + K_c^e = \frac{e^3}{12} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B_f]^t [C_f] [B_f] \det [J] dr ds \\
&\quad + \frac{5}{6} e \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B_c]^t [C_c] [B_c] \det [J] dr ds
\end{aligned}$$

2.3 Matrice masse

La discrétisation du terme d'inertie (cf. équation (1.9)) permet de la même manière d'écrire une matrice masse élémentaire avec de nouvelles matrices B dépendantes de N. La matrice M élémentaire peut alors s'écrire

$$\begin{aligned}
M^e &= \int_{\Omega_e} \rho [B_c]^t [B_c] d\Omega_e + \int_{\Omega_e} z^2 \rho [B_f]^t [B_f] d\Omega_e \\
&= \int_{\Omega_e} \rho \begin{bmatrix} NN^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} d\Omega_e + \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} z^2 dz \int_{\Sigma_e} \rho \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & NN^t & 0 \\ 0 & 0 & NN^t \end{bmatrix} d\Sigma_e \\
&= e \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \rho \begin{bmatrix} NN^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \det [J] dr ds + \\
&\quad \frac{e^3}{12} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \rho \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & NN^t & 0 \\ 0 & 0 & NN^t \end{bmatrix} \det [J] dr ds
\end{aligned}$$

où Ω_e est le volume de l'élément

2.4 Conditions aux limites

La prise en compte des conditions aux limites se fait en utilisant le formalisme des multiplicateurs de Lagrange. La minimisation de l'équation (1.8)

peut se mettre sous la forme d'une fonctionnelle quadratique $E(v)$ (cf. réf. [3])

$$E(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - f(v) \quad (2.3)$$

$f(v)$ étant le produit des forces appliquées au système avec le champ de déplacement. La minimisation de E consiste à trouver q tel que pour tout champ virtuel v : $E(q) < E(v)$ En écrivant le problème sous la forme d'un Lagrangien $L(v)$ l'expression de la condition de Dirichlet \bar{u} apparaît :

$$L(v) = E(v) + \mu(v - \bar{u}) \quad (2.4)$$

Après discrétisation, la prise en compte des conditions aux limites modifie le système (1.10). La condition nécessaire de la minimisation de L (et donc de E) est l'existence d'une solution (u, λ) du système :

$$\begin{bmatrix} \mathbb{K} & \mathbb{C}^t \\ \mathbb{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ \bar{u} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

avec

- \mathbb{C} coefficients appliqués aux degrés de libertés soumis aux déplacement imposés
- q vecteur des degrés de libertés
- λ vecteur des forces de réaction aux condition de Dirichlet
- f vecteur des forces imposées à la structure
- \bar{u} vecteur déplacement imposé (condition de Dirichlet)

Cette expression est utilisée dans le code de Modalys pour définir les conditions aux limites grâce à la matrice \mathbb{C} . En effet nous retrouvons bien par différenciation de L :

$$\mathbb{K}q + \mathbb{C}^t\lambda = f_{Dirichlet} + f_{Imposee} \quad (2.6)$$

$$\mathbb{C}q = \bar{u} \quad (2.7)$$

La création de la matrice \mathbb{C} nous permet de choisir entre des appuis simples, des encastrement ou tout autre déplacement imposé pour chaque degré de liberté. La matrice \mathbb{C} suivante par exemple effectue les blocages :

$$\begin{aligned} w + \theta_x &= 0 \\ \theta_x &= 0 \\ \theta_y &= 0 \\ \mathbb{C} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & . & . \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La résolution de (2.5) permet donc de calculer les déplacements aux noeuds q en fonction des forces f et des déplacements imposés \bar{u} .

Ces résultats constituent la base de la modification apportée au code de Modalys. Le calcul des matrices élémentaires et des conditions aux limites doivent en effet être réécrit pour tenir compte à la fois de la théorie des plaques et de l'élément choisi.

2.5 Intégration numérique

Les matrices générées peuvent vite se révéler imposantes par la taille et par le degré des polynômes. L'intégration exacte est donc quasiment impossible et il faut faire appel à des méthodes d'intégration numérique. La méthode de Gauss par exemple fait appel à des sommations de nos polynômes en certains points grâce à une pondération. Les polynômes d'ordre 2 qui composent les termes à intégrer seront calculés avec deux points d'intégration suivant chaque axe. Les valeurs données par les tables sont alors :

- Position des points : $\pm \frac{1}{\sqrt{3}} = \pm 0,577$ suivant r et s
- Poids : 1x1 pour chaque point

2.6 Validation : Etude des fréquences propres

En comparant les résultats avec des solutions analytiques simples (appuis sur les quatre bords) nous avons remarqué un décalage important dans les fréquences calculées(cf. fig.5).

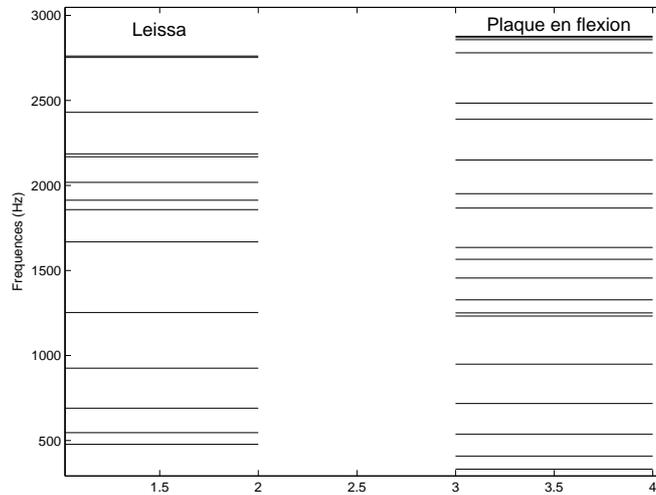


FIG. 5 – Fréquences propres analytiques et numériques avec intégration exacte (plaque rectangulaire en appui simple sur les quatre bords)

D'après Bathe [2], ces erreurs sont dues à une surestimation de la rigidité dans la discrétisation par éléments finis. Une des solutions proposée par Hughes [10] consiste à effectuer une intégration réduite sur l'élément afin de compenser l'excès de rigidité. Cette intégration réduite n'est effectuée que sur

la partie de cisaillement de la matrice K avec un point de Gauss situé en $[0, 0]$ et avec un poids de 4 (2×2) car l'intégration se fait suivant les deux directions quel que soit le nombre de points de Gauss (cf. fig. 7). Les fréquences alors obtenues se rapprochent très nettement des solutions analytiques comme le montre la figure 6.

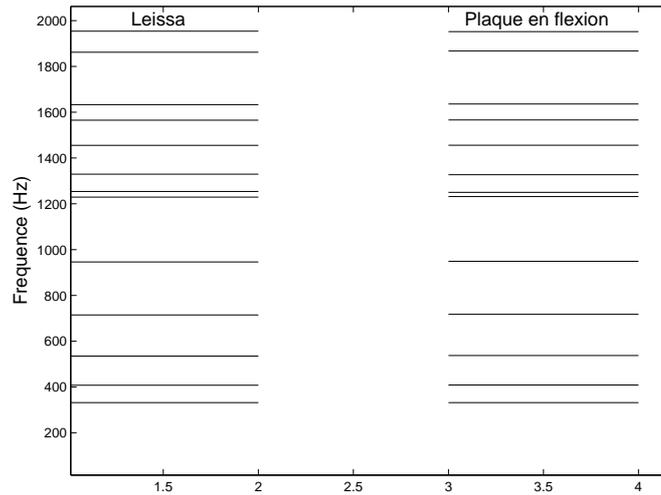


FIG. 6 – Fréquences propres analytiques et numériques avec intégration réduite de la raideur en cisaillement (plaque rectangulaire en appui simple sur les quatre bords)

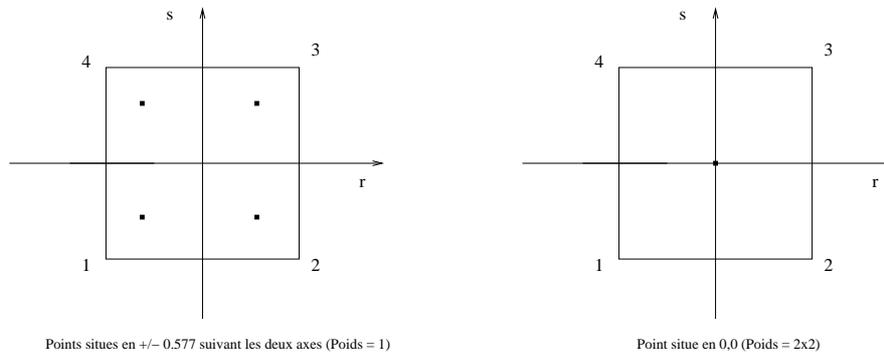


FIG. 7 – Intégration exacte avec 2×2 points de Gauss et intégration réduite avec 1 point de Gauss

Cependant il est important de noter que les deux courbes se séparent et présentent des valeurs de plus en plus différentes à partir du 25ème mode. Il est possible que le modèle numérique ne soit pas remis en cause ici, mais plutôt les tables de solutions analytiques qui perdent en précision avec l'augmentation du nombre de lignes nodales comme le précise Leissa ([5] p.43).

2.7 Implémentation de l'élément dans le code

La partie éléments finis du logiciel Modalys est basé sur la classe CMMObject (ContinuousMediaMechanics) qui gère un objet mécanique. Cette dernière travaille sur des maillages (classe Mesh) comme cela est montré à la figure 8. Les éléments (classe Element) à définir sont regroupés sous formes de vecteur pour former le maillage. Enfin les noeuds sont également référencés dans un vecteur pour chaque élément. Grâce à l'héritage des classes,

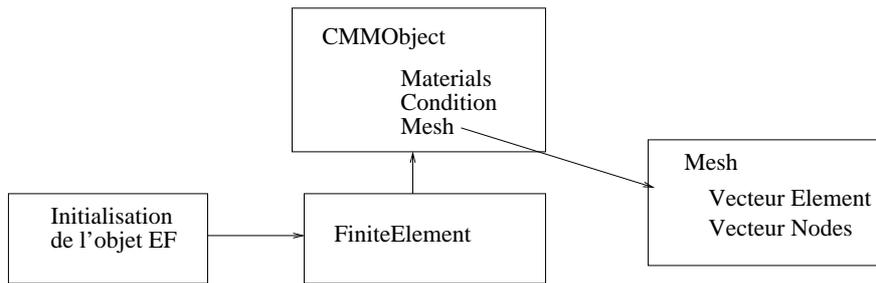


FIG. 8 – Hiérarchie des classes principales de l'objet "Eléments Finis" dans Modalys

toutes les fonctions nécessaires à la création des matrices de raideur K et de masse M sont définies et ne nécessitent alors que la spécialisation propre à chaque type d'élément, à savoir :

- la dimension
- le nombre de noeuds
- le nombre et le type de degré de liberté à chaque noeud (déplacement ou rotation)
- les fonctions d'interpolations

Une fois ces paramètres déterminés (cf. section 2.1) la classe du quadrilatère doit pouvoir créer les matrices masse et raideur élémentaires afin de les assembler dans la classe Element et d'écrire les matrices globales qui seront utilisées dans CMMObject pour lancer la résolution du système.

2.8 Détermination de la matrice de raideur élémentaire

L'écriture de cette matrice se réfère évidemment à la théorie (cf. section 2.2 sur la matrice de raideur) mais a été décomposée de la manière suivante car l'intégration numérique est effectuée simultanément :

- Calcul des fonctions d'interpolation et de leurs dérivées, aux points de Gauss
- Calcul du jacobien J , de son déterminant et de j son inverse
- La matrice D est le produit de j et des dérivées suivant r et s des fonctions d'interpolation. D est donc la matrice de passage des dérivées

selon r et s aux dérivées selon x et y

$$D = \begin{matrix} j_{11}N_{1,r} + j_{12}N_{1,s} & j_{11}N_{2,r} + j_{12}N_{2,s} & j_{11}N_{3,r} + j_{12}N_{3,s} & j_{11}N_{4,r} + j_{12}N_{4,s} \\ j_{21}N_{1,r} + j_{22}N_{1,s} & j_{21}N_{2,r} + j_{22}N_{2,s} & j_{21}N_{3,r} + j_{22}N_{3,s} & j_{21}N_{4,r} + j_{22}N_{4,s} \end{matrix} \quad (2.8)$$

- Assemblage des matrices E dont le produit avec les ddl de l'élément nous fournira tous les ddl interpolés et leurs dérivées. Les matrices E_f et E_c sont distinguées car la matrice de raideur en flexion est intégrée de manière exacte tandis que la partie cisaillement sera calculée par intégration réduite.

$$\begin{bmatrix} w_{,x} \\ w_{,y} \\ \beta_{x,x} \\ \beta_{x,y} \\ \beta_{y,x} \\ \beta_{y,y} \\ \beta_x \\ \beta_y \end{bmatrix} = (E_f + E_c) \cdot q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & D \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ \beta_{x1} \\ \beta_{x2} \\ \beta_{x3} \\ \beta_{x4} \\ \beta_{y1} \\ \beta_{y2} \\ \beta_{y3} \\ \beta_{y4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & N^t & 0 \\ 0 & 0 & N^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ \beta_{x1} \\ \beta_{x2} \\ \beta_{x3} \\ \beta_{x4} \\ \beta_{y1} \\ \beta_{y2} \\ \beta_{y3} \\ \beta_{y4} \end{bmatrix}$$

- Enfin les matrices B en flexion et en cisaillement sont déterminées par le produit de la matrice de relation déplacement-déformation avec E

$$B_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} E_i$$

- Les matrices obtenues aux points r_i, s_j sont alors additionnées avant d'être assemblées.

$$\begin{aligned} K^e &= \sum_i \sum_j K_{r_i, s_j}^e \\ &= \sum_i \sum_j \left(\frac{e^3}{12} B_f^t C B_f \det[J]_{r_i, s_j} + e B_c^t C B_c \det[J]_{r_i, s_j} \right) \end{aligned}$$

2.9 Détermination de la matrice masse élémentaire

La fonction ComputeIntegransMass calcul également le jacobien de l'élément afin de vérifier que son déterminant n'est pas proche de zéro ce qui

poserait des problèmes de singularité. La matrice A est alors écrite à partir des fonctions d'interpolations.

$$A = \begin{bmatrix} N^t & 0 & 0 \\ 0 & N^t & 0 \\ 0 & 0 & N^t \end{bmatrix}$$

La matrice de masse élémentaire est le produit $A^t A$ affecté des coefficients propres aux hypothèses :

$$M^e = \sum_i \sum_j M_{r_i, s_j}^e = \sum_i \sum_j \rho \begin{bmatrix} eNN^t & 0 & 0 \\ 0 & \frac{e^3}{12}NN^t & 0 \\ 0 & 0 & \frac{e^3}{12}NN^t \end{bmatrix} \det[J]_{r_i, s_j}$$

2.10 Ecriture des conditions aux limites

Une fois les matrices masse et raideur créées il faut également assembler la matrice \mathbb{C} comprenant les conditions aux limites (cf. section 2.4). La classe Condition gère les conditions de Dirichlet choisies par l'utilisateur. Pour ce faire, des maillages sont créés, définis par des noeuds, des arêtes ou des quadrilatères. Tous les "sous-maillages" ainsi choisis définiront les degrés de libertés soumis à une condition de Dirichlet par l'intermédiaire d'un coefficient dans la matrice \mathbb{C} . En modifiant l'écriture de cette matrice il est déjà possible de choisir entre un encastrement et un appui simple.

Cette première étape a permis de valider le code de discrétisation des éléments en vérifiant les fréquences propres calculées. Dans l'objectif de faire un calcul statique par la suite, il faut tenir compte du fait que les maillages ne seront plus plans.

Afin que cette résolution statique soit réalisable, un changement de référentiel est nécessaire. En effet les coordonnées locales de chaque élément seront le résultat d'une rotation des coordonnées globales.

3 Discrétisation en éléments coques par assemblage d'éléments plaques

L'utilisation d'une matrice de rotation sur les 3 degrés de liberté de la flexion impose une augmentation du nombre de ces degrés de liberté. En effet si la plaque est définie dans les trois dimensions l'expression du déplacement normal w dans le référentiel local va devenir une combinaison des trois déplacements x , y et z dans le repère global. Ce changement de repère est réalisé par l'intermédiaire de la matrice Λ appliquée aux matrices élémentaires. Les éléments de cette dernière s'écrivent comme la combinaison de trois rotations calculées en fonction des coordonnées des noeuds de l'élément avec la notation présentée figure 9

$$\lambda = \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\gamma & \cos\alpha\sin\gamma & \sin\alpha \\ -\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma - \sin\gamma\cos\beta & -\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma + \cos\beta\cos\gamma & \cos\alpha\sin\beta \\ -\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma & -\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma - \sin\beta\cos\gamma & \cos\alpha\cos\beta \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

En appliquant cette rotation au trois ddl de plaque en flexion afin d'en

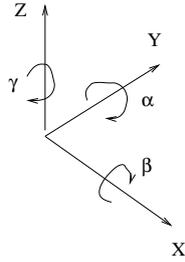


FIG. 9 – Angles de rotations utilisés pour définir la matrice de rotation dans les coordonnées globales

obtenir six en coordonnées globales, les résultats fournis par le calcul se sont dégradés et des erreurs importantes affectaient les valeurs de fréquences. Il est probable que ces erreurs étaient dues à de fausses valeur de rigidité dans la matrice de raideur globale. Des éléments "coques" doivent donc être créés. Pour ce faire les parties membranaires et flexion sont assemblées au sein de notre élément. L'écriture de la formulation variationnelle est bien entendue modifiée car le champ de déplacement devient

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u + z\beta_x \\ v + z\beta_y \\ w \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

avec u et v déplacements dans le plan neutre de l'élément. Cet assemblage qui fournit une rigidité aux degrés de liberté en déplacement dans le plan de l'élément est décrit par Zienkiewicz (cf [6]). La matrice de rotation qui

permet de passer des 6 degrés de liberté globaux aux 5 degrés de liberté locaux s'écrit alors

$$q = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \beta_x = \theta_y \\ \beta_y = \theta_x \end{bmatrix} = \Lambda Q \quad (3.3)$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda(1,1) & \lambda(1,2) & \lambda(1,3) & 0 & 0 & 0 \\ \lambda(2,1) & \lambda(2,2) & \lambda(2,3) & 0 & 0 & 0 \\ \lambda(3,1) & \lambda(3,2) & \lambda(3,3) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda(2,1) & \lambda(2,2) & \lambda(2,3) \\ 0 & 0 & 0 & \lambda(1,1) & \lambda(1,2) & \lambda(1,3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{bmatrix}$$

Les matrices élémentaires dans le repère globales sont définies par

$$K_*^e = \Lambda^t K^e \Lambda \quad (3.4)$$

$$M_*^e = \Lambda^t M^e \Lambda \quad (3.5)$$

L'utilisation de ces éléments n'a pourtant pas fourni les résultats escomptés, les fréquences propres calculées étant très éloignées de nos références analytiques (cf. réf. [5]) et expérimentales (cf. réf. [9]).

De plus nos essais effectués sur différentes géométries dans l'espace ont révélé des erreurs dans la matrice de raideur. En effet avec six degrés de liberté par noeuds, cette matrice présentait des lignes et des colonnes nulles pour la rigidité de la rotation suivant z quand la plaque est dans le plan xy .

3.1 Utilisation d'un degré de liberté fictif

L'expression de q_* observée dans l'équation (3.3) révèle ce sixième degré de liberté non utilisé dans l'élément. La rotation θ_z doit permettre de compléter les expressions des rotations θ_x et θ_y dans le repère global. Mais ce degré de liberté ne présente pas de rigidité et introduit donc une singularité dans les matrices de masse et de raideur. L'inversion de K devient alors impossible.

Après avoir recherché des solutions possibles, l'utilisation d'un degré de liberté avec une rigidité fictive est apparu comme un compromis acceptable utilisé dans plusieurs références (Code Aster (code de calcul par éléments finis développé par EDF), [6], [4]). Cette rigidité fictive est introduite une fois la rotation de la matrice élémentaire réalisée. Elle a pour valeur 10^{-5} fois la valeur la plus faible de la partie en flexion de la matrice K^e . Cette modification a l'avantage de ne pas modifier la valeur de l'énergie de déformation où θ_z n'apparaît pas.

3.2 Comparaison des éléments

Les différents éléments vus jusqu'ici présentent bien entendu des comportements différents pour le calcul de modes propres. Il est donc important de déterminer la validité du modèle. Comme le remarquait Hughes dans son article [10], l'épaisseur de la plaque joue sur l'acceptabilité des résultats.

Les figures 10 et 12 présentent les fréquences propres calculées pour une plaque encastree-encastree avec un maillage composé de 100x30 éléments. La seule différence entre ces deux courbes est donc l'épaisseur de la plaque fixée respectivement à 20 et 2 mm. Nous voyons que plus la plaque est épaisse plus l'erreur sur les fréquences augmente entre la solution analytique déterminée par Leissa [5] et le calcul numérique. Cependant en faisant abstraction des modes de membranes qui décalent la courbe des "Coques" nous remarquons que cet élément fournit les mêmes résultats que la plaque en flexion. L'ajout des phénomènes de membranes ne semble donc pas modifier la performance de notre élément en dynamique.

Hughes avait déjà remarqué que différents types d'intégration étaient nécessaires en fonction de l'épaisseur et des dimensions de l'élément. En effet l'intégration réduite résulte d'une nécessité de se rapprocher des hypothèses de Kirchoff quand la coque, qui prend en compte le cisaillement transverse, a une épaisseur qui tend vers zéro.

Pour le nombre d'éléments nécessaires, les figures 11 et 12 montrent que pour une plaque de 40 cm par 12, un maillage extrêmement fin n'est pas indispensable pour un calcul correct des premiers modes. Nous observons donc non seulement une bonne corrélation avec les fréquences calculées par Leissa mais aussi une superposition des valeurs pour les plaques et coques sur les 10 premiers modes. Ceci peut s'expliquer par le fait la plaque est mince éloignant les modes de membranes vers les hautes fréquences.

L'élément coque présente donc des performances intéressantes en utilisant l'intégration réduite sur la raideur en cisaillement. Il permet calculer des modes de membranes ce qui peut être utile pour enrichir le spectre pour la synthèse sonore. Cependant l'intégration réduite pose des difficultés quand la plaque devient épaisse en sous-estimant les fréquences propres.

Une utilisation en statique de cet élément pourra nous permettre de juger si des améliorations sont encore possibles. Afin de modéliser la précontrainte, il est maintenant nécessaire de calculer la déformation de la plaque soumise à des forces et/ou des déplacements imposés.

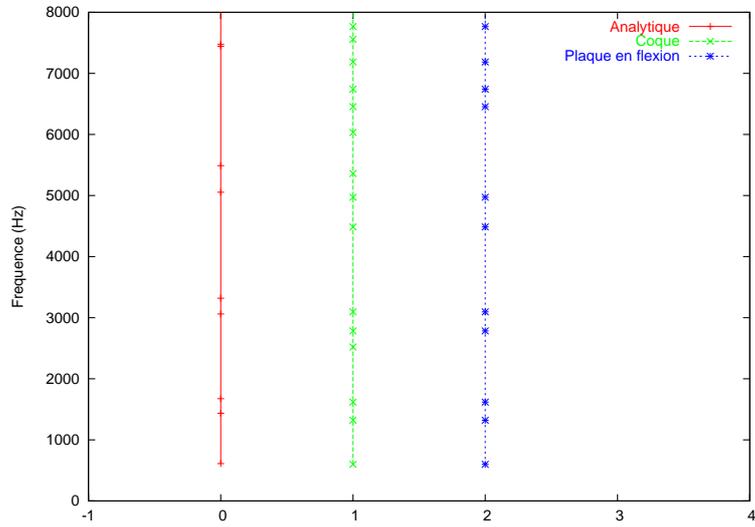


FIG. 10 – Fréquences propres pour une plaque encadrée-encadrée(CFCF) de 20 mm d'épaisseur (LxI : 400x120) avec un maillage 100x30. Les fréquences calculées sont assez éloignées des fréquences analytiques

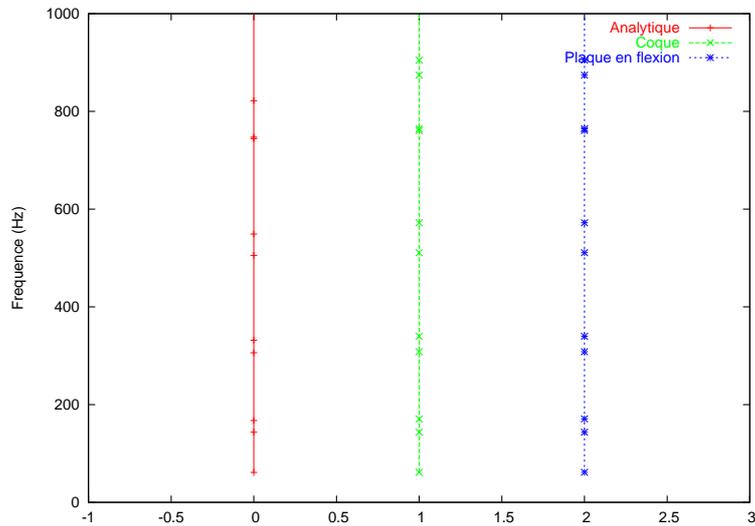


FIG. 11 – Fréquences propres (CFCF) avec un maillage 25x8(LxI : 400x120)

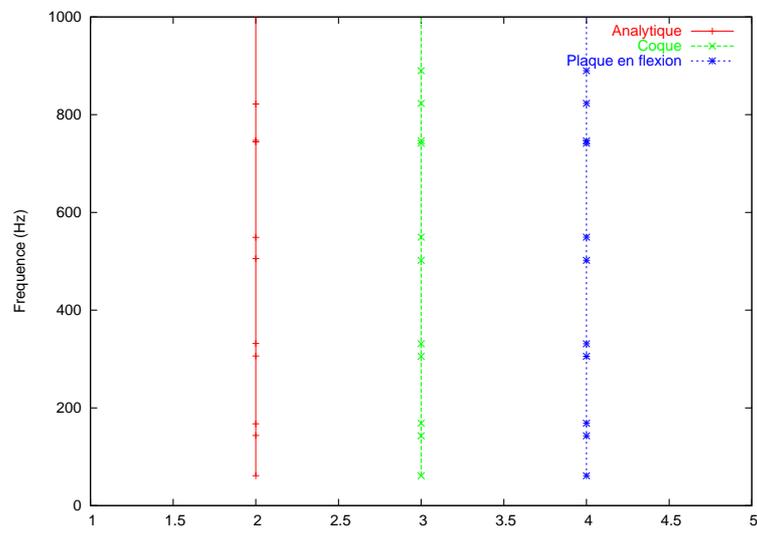


FIG. 12 – Frequences propres (CFCF) avec un maillage 100x30(Lxl : 400x120)

4 Calcul statique et problème de verrouillage

4.1 Résolution du problème en statique

Comme il a été évoqué dans la section 1.5, la construction de la matrice de raideur géométrique nécessite de connaître le champ de contrainte σ^0 dans la structure. La matrice K affectée des multiplicateurs de Lagrange est inversée afin de déterminer les déplacements résultants des conditions aux limites de Neumann et de Dirichlet.

Après avoir effectué différents tests de déformation de la plaque, il s'est avéré que les forces dans le plan de cette dernière entraînaient des erreurs dans le calcul. La déformée de la plaque présentait des oscillations comme le montre la figure 13. Cet type de résultat correspond tout à fait à une erreur

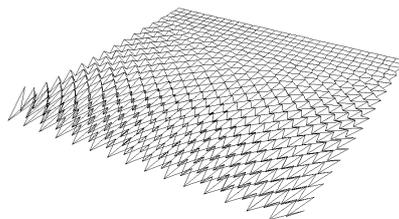


FIG. 13 – Phénomène de verrouillage sur un calcul en statique

numérique. L'ajout des phénomènes de membranes est peut être à l'origine de cette erreur car nous ne savons pas quel type d'intégration numérique lui appliquer.

4.2 Verrouillage

Dans son article, Hughes utilise l'intégration réduite pour supprimer les phénomènes de verrouillage des termes en cisaillement. Une étude approfondie de ce phénomène a été menée par G. Prathap (cf. réf. [7]) en terme de calcul d'erreur. Afin d'en déterminer les causes, il a étudié les étapes de discrétisation de la géométrie et donc les interpolations des déplacements. En identifiant les différents termes de l'énergie de déformation à des pénalités, il est possible de déterminer lesquelles n'ont aucune réalité physique et de les éliminer grâce à une intégration numérique adaptée.

Ces termes qui n'ont pas de sens physique produisent des modes à "zéro énergie" qui faussent la discrétisation. En effet ces modes apparaissent durant l'étape de discrétisation. Le développement des polynômes d'interpolation

fait apparaître des termes supplémentaires. La figure 13 présente le maillage déformé par une force imposée dans le plan sur une plaque encastree-libre. Les oscillations des déplacements le long de l'arête précontrainte illustrent bien ce phénomène. Ces termes peuvent être identifiés en réécrivant l'énergie de manière continue. Selon l'équation (1.8) l'énergie correspondant à la déformation est

$$\Pi_c = \frac{kG}{4} \int \int \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2 dx dy = \frac{kG}{4} \int \int (\theta_x - w_{,x})^2 + (\theta_y - w_{,y})^2 dx dy \quad (4.1)$$

Dans le cadre d'un quadrilatère à quatre noeuds, les variables sont interpolées de la manière suivante

$$\begin{aligned} \theta_x &= a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy \\ w &= b_0 + b_1x + b_2y + b_3xy \end{aligned}$$

Cette énergie devient alors en ne gardant que la déformation γ_{xz}

$$\begin{aligned} \pi_{xz} &= \frac{kG}{4} \int \int (\theta_x - w_{,x})^2 dx dy \\ &= \frac{kG}{4} \int \int (a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy - b_1 - b_3y)^2 dx dy \end{aligned}$$

L'intégration de ce polynôme présente alors une grande importance car le nombre de points de Gauss va influencer le nombre de termes du résultat. Les détails du calculs et du choix de l'intégration sont développés en annexe A.1. Ainsi une intégration exacte et réduite donnent respectivement pour un élément carré de côté 2

$$\begin{aligned} \pi_{xz} &= kG((\theta_x - w_{,x})_0^2 + \frac{1}{3}(\theta_x - w_{,x})_{,y0}^2 + \frac{1}{3}(\theta_{x,x})_0^2 + \frac{1}{9}(\theta_{x,xy})_0^2) \\ \pi_{xz} &= 4\pi_{xz(0,0)} = kG(a_0 - b_1)^2 = kG(\theta_x - w_{,x})_0^2 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Les quatre termes issus de l'intégration exacte comportent en fait deux contraintes physiques (les deux premiers termes) qui permettent à la plaque d'avoir un comportement de plaque mince quand l'épaisseur diminue. Les deux autres termes sont la cause du verrouillage car ils n'ont pas de sens physique (cf. A). L'intégration réduite par contre ne comporte qu'un seul terme, il manque une des contraintes de Kirchoff et l'élément est moins performant quand les plaques deviennent épaisses.

La différence observée dans le calcul des fréquences propres avec une plaque épaisse (fig. 10) est ainsi expliquée par l'équation (4.2). Le terme manquant est la cause d'une baisse de performance de l'élément de Hughes quand la plaque devient épaisse et le cisaillement transverse non négligeable. Ce terme pourrait également expliquer le verrouillage en statique par la présence de deux modes à "zéro énergie" (fig. 13). Ces modes résultent d'erreurs

numériques et n'ont aucun sens physique car l'énergie de déformation correspondante est nulle.

La méthode utilisée afin de ne garder que les deux termes nécessaires consiste alors à intégrer avec 1x2 (respectivement 2x1) points de Gauss le terme de rigidité dépendant de γ_{xz} (respectivement γ_{yz}). La matrice de rigidité élémentaire est donc calculée en plusieurs étapes avec d'un côté une intégration exacte pour la rigidité en flexion et membranaire et de l'autre côté, une intégration à 1x2 ou 2x1 points de Gauss pour le cisaillement transverse.

$$\begin{aligned}
K_c &= \kappa e \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B_c]^t [C_c] [B_c] \det [J] dr ds \\
&= \kappa e \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B_{c1}]^t [C_c] [B_{c1}] \det [J] dr ds \\
&\quad + \kappa e \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B_{c2}]^t [C_c] [B_{c2}] \det [J] dr ds \\
&= 2\kappa e ([B_{c1}]^t [C_c] [B_{c1}]_{(0, \frac{1}{\sqrt{3}})} + [B_{c1}]^t [C_c] [B_{c1}]_{(0, \frac{-1}{\sqrt{3}})}) \\
&\quad + [B_{c2}]^t [C_c] [B_{c2}]_{(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)} + [B_{c2}]^t [C_c] [B_{c2}]_{(\frac{-1}{\sqrt{3}}, 0)})
\end{aligned}$$

avec

$$[B_{c1}] = \begin{bmatrix} J_{11}^{-1} N_{,r}^t + J_{12}^{-1} N_{,s}^t & N^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

$$[B_{c2}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ J_{21}^{-1} N_{,r}^t + J_{22}^{-1} N_{,s}^t & 0 & 0 & N^t \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

4.3 Nouvelle étude des performances de l'élément

L'observation de la figure 14 montre encore un bon comportement des fréquences calculées par l'élément, même si il semble que certains modes sont légèrement décalés avec les résultats analytiques ou expérimentaux. Il faut noter pour ces derniers qu'il semble que le septième mode n'ait pas été bien perçu durant les mesures.

mode(n,m)	Fréquence analytique	Fréquence Modalys	Fréquence expérimentale
(0,0)	61	57	55
(1,0)	143	137	139
(0,1)	167	159	154
(1,1)	306	295	295
(0,2)	331	317	307
(1,2)	505	486	510

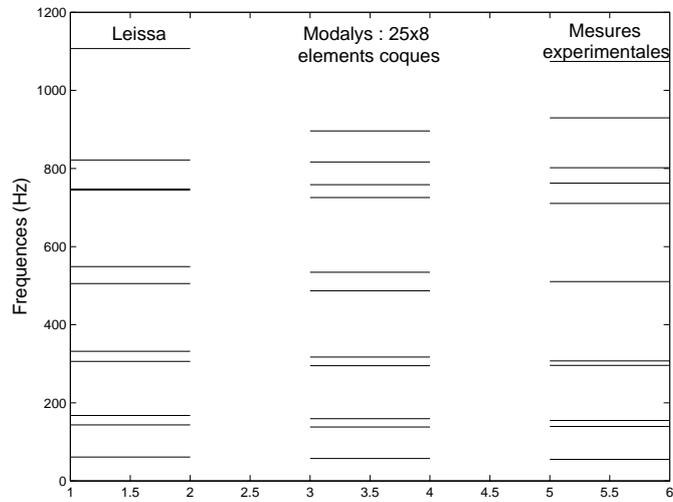


FIG. 14 – Comparaison des fréquences propres avec la nouvelle intégration du cisaillement

En statique le verrouillage pour les effets de membrane a bien disparu comme le montre la figure 15. Une plaque carrée encastrée-libre est soumise à deux forces de compression dans son plan aux angles opposés à l'encastrement. Le changement d'intégration sur le cisaillement transverse a donc également modifié les propriétés de l'élément pour les analyses statiques.

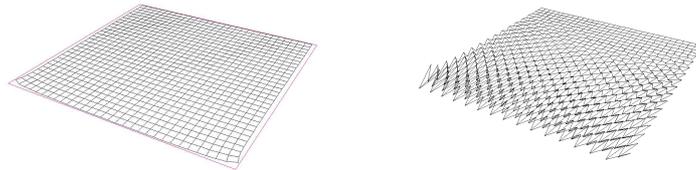


FIG. 15 – Déformée de la plaque due à une force membranaire avec et sans l'intégration semi-réduite

Les documents de validation du logiciel Code Aster ont été très utiles pour valider les déformations en statique. Ainsi pour une plaque encastrée-libre, l'application de forces perpendiculaires à la plaque permet d'avoir un déplacement en flexion et la mesure d'une flèche sur le même modèle que les poutres selon les conditions montrées figure 16.

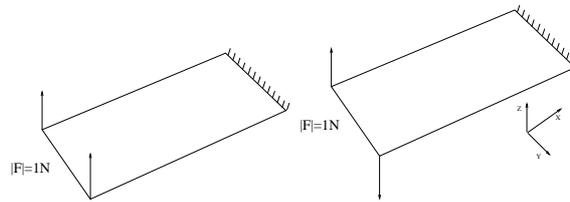


FIG. 16 – Etude statique : Validation de l'élément pour deux types de déformations imposées

Force 1 (N)	Force 2 (N)	Flèche de référence (m) Code Aster	Flèche calculée (m) Modalys
1	1	0.0011059	0.0010985
-1	1	$\pm 3.537e-6$	$\pm 3.6008e-6$

Les résultats sur ces deux exemples sont donc très satisfaisants puisque l'erreur maximale est de 1,8%.

Cette technique d'intégration pourra également être appliquée au calcul de la matrice de raideur géométrique afin de déterminer la méthode à utiliser. En effet nous allons maintenant utiliser les éléments pour calculer la matrice de raideur géométrique grâce au champ de contraintes.

5 Etude de la précontrainte

5.1 Introduction

La synthèse sonore par modèle physique peut être réalisée en utilisant la théorie modale afin de reconstituer au mieux le comportement vibratoire de la “structure” instrument comme nous l’avons vu en introduction. Ce comportement dépend d’une variété de paramètres dont la plupart sont déjà pris en compte (dimensions, masse volumique, matériau...). De plus, les instruments de musique illustrent très bien la nécessité de tenir compte de la précontrainte dans certaines analyses modales. En effet ce phénomène qui a des conséquences dans tout calcul mécanique, aussi bien statique que dynamique, influence tout particulièrement le résultat de la synthèse sonore, objectif du logiciel. Nous savons (entre autre par l’expérience) qu’une déformation initiale d’une structure modifie ses modes propres et les fréquences correspondantes. Ce phénomène est par exemple utilisé pour accorder les instruments à cordes en modifiant la tension de ces dernières. Cette modification intervient dans l’ajout d’une raideur géométrique K_σ à la matrice K initiale. L’analyse modale s’effectue alors sur

$$(M\ddot{u} + K + K_\sigma)u = F \quad (5.1)$$

5.2 Application à la plaque

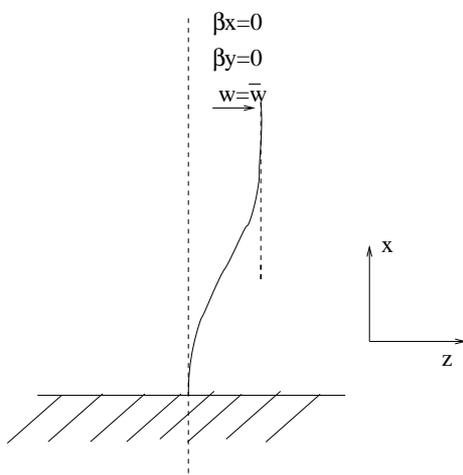


FIG. 17 – Déformation de la plaque mesurée expérimentalement

Dans le cadre d’une précédente étude de la précontrainte (cf. [9]), Derre et Yvon ont effectué des mesures expérimentales avec le protocole présenté figure 17. La variation des fréquences propres est bien confirmée par ces mesures dans le cadre d’une condition de Dirichlet dans une direction normale

à la plaque. La modélisation de cette expérience et plus généralement de la précontrainte est réalisée de la manière suivante :

- Déformation de la plaque qui fournit les déplacements aux noeuds
- Calcul des déformations puis des contraintes grâce à la matrice de loi de comportement
- Création de la matrice de raideur géométrique
- Analyse modale en prenant en compte les nouvelles matrices masse (suite à une variation de la masse volumique) et raideur

En effet il faut tenir compte de la nouvelle géométrie de la plaque déformée et pour calculer les matrices élémentaire où une nouvelle masse volumique intervient.

5.3 Création de la matrice de raideur géométrique

La résolution du problème statique fournit des données immédiatement exploitables, à savoir les déplacements aux noeuds. Ces déplacements sont calculés par la résolution du système suivant (cf. 2.4) :

$$\begin{bmatrix} q \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{A} & \mathbb{C}^t \\ \mathbb{C} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f \\ \bar{u} \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

La précontrainte peut donc résulter de l'application de forces dans le vecteur f ou de déplacements \bar{u} . Le calcul des déformations se fait alors suivant la même méthode que pour la création de la matrice de raideur. Le calcul des dérivées est représenté dans la matrice E multipliée par le vecteur des degrés de liberté.

Les contraintes peuvent être calculées en différents points de l'élément. Cependant c'est en réutilisant les points de Gauss que les meilleurs résultats sont obtenus. Le tenseur des contraintes σ^0 peut alors être écrit avec les composantes membranaires (cf. Annexe B)

$$\sigma^0 = z\sigma_f + \sigma_m + \sigma_c = \begin{bmatrix} za + g & zb + h & c \\ zb + h & zd + i & k \\ c & k & zf + j \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

La forme bilinéaire $k_{\sigma(u,v)}^0$ (cf. équation (1.13)) va nous permettre de déterminer la matrice de raideur géométrique élémentaire.

$$\begin{aligned} k_{\sigma(u,v)}^0 &= \int_{\Omega} \hat{q} E^t \Sigma^0 E q d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \hat{q} E_0^t \Sigma_{\sigma_c}^0 E_0 q d\Omega + \int_{\Omega} z^2 \hat{q} E_1^t \Sigma_{\sigma_c}^0 E_1 q d\Omega \\ &\quad + \int_{\Omega} z^2 \hat{q} E_0^t \Sigma_{\sigma_f}^0 E_1 q d\Omega + \int_{\Omega} z^2 \hat{q} E_1^t \Sigma_{\sigma_f}^0 E_0 q d\Omega \\ &\quad + \int_{\Omega} \hat{q} E_0^t \Sigma_{\sigma_m}^0 E_0 q d\Omega + \int_{\Omega} z^2 \hat{q} E_1^t \Sigma_{\sigma_m}^0 E_1 q d\Omega \end{aligned}$$

Après intégration sur l'épaisseur et discrétisation de la surface on obtient

$$K_{\sigma}^e = e \int_{element} \hat{q} E_0^t (\Sigma_{\sigma_c}^0 + \Sigma_{\sigma_m}^0) E_0 q \det J dr ds + \frac{e^3}{12} \int_{element} \hat{q} E_0^t \Sigma_{\sigma_f}^0 E_1 q \det J dr ds \\ + \frac{e^3}{12} \int_{element} \hat{q} E_1^t \Sigma_{\sigma_f}^0 E_0 q \det J dr ds + \frac{e^3}{12} \int_{element} \hat{q} E_1^t \Sigma_{\sigma_m}^0 E_1 q \det J dr ds$$

avec

$$\Sigma^0 = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 & \sigma_f + \sigma_c & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 & 0 & \sigma_f + \sigma_c \\ 0 & 0 & \sigma_m & 0 & 0 \\ \sigma_f + \sigma_c & 0 & 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & \sigma_f + \sigma_c & 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

Nous avons vu que nos déplacements étaient interpolés par la fonction linéaire N .

$$u = \sum_{j=1}^4 N_j u_j$$

En utilisant le jacobien calculé pour chaque élément la matrice D permet de faire le changement de coordonnées des dérivées (équation (2.8)) nous pouvons donc exprimer E en fonction de l'interpolation

$$\begin{bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \\ 0 \\ v_{,x} \\ v_{,y} \\ 0 \\ w_{,x} \\ w_{,y} \\ 0 \\ z\beta_{x,x} \\ z\beta_{x,y} \\ \beta_x \\ z\beta_{y,x} \\ z\beta_{y,y} \\ \beta_y \end{bmatrix} = E \cdot q = \begin{bmatrix} D & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & zD & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & zD \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N^t \end{bmatrix} q \quad (5.5)$$

L'intégration numérique est donc modifiée par rapport à celle utilisée pour les matrices \mathbb{K} et \mathbb{M} car σ^0 contient des éléments dépendant de z .

5.4 Validation de la matrice de raideur géométrique

La plupart des codes éléments finis utilisent la matrice de raideur géométrique afin d'effectuer des calculs de flambage. Le modèle d'Euler est utilisé pour calculer les modes de flambages en se basant sur les poutres.

Sur la base de la documentation de Code Aster, nous avons donc essayé de valider cette matrice en observant l'évolution des fréquences propres. En effet la résolution habituelle (en statique) consiste à résoudre le problème aux valeurs propres suivant :

$$(K + \lambda K_\sigma)u = 0 \quad (5.6)$$

avec λ coefficient proportionnel à la charge. Ce type d'équation ne peut être résolu dans notre cas puisque pour les plaques l'écriture de K_σ vue auparavant ne présente pas de linéarité entre la contrainte et la raideur associée.

Nous avons donc décidé d'observer dans le cadre de notre analyse modale l'évolution des fréquences calculées par la résolution de (5.1). En effet le mode de flambement apparaît dans ce cas sous la forme d'un mode à fréquence nulle. L'équation à résoudre est alors

$$(K + K_\sigma(\lambda))u = 0 \quad (5.7)$$

Le cas présenté figure 18 issu de la documentation du Code Aster nous a servi de référence. En effet il reprend la démonstration de Timoshenko [8] sur la compression des plaques dans leur plan. Pour une plaque en appui

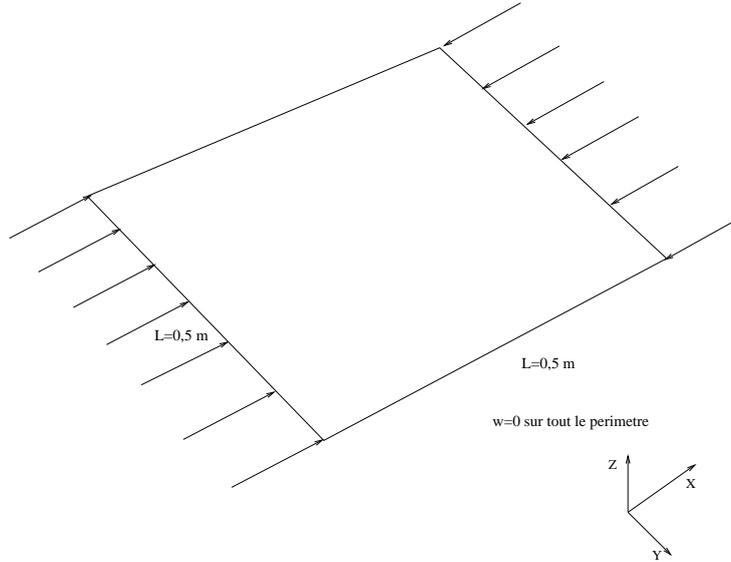


FIG. 18 – Flambage d'une plaque carrée comprimée

simple soumise à des forces dans son plan moyen, le déplacement normal s'écrit

$$w = \frac{4P}{ab\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2 - \frac{m^2 N_x}{\pi^2 a^2 D}} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (5.8)$$

avec

- a et b : dimensions de la plaque
- $D = \frac{Ee^3}{12(1-\nu^2)}$
- m et n : nombres entiers positifs
- P : chargement normal à la plaque
- N_x : force linéique dans le plan de la plaque

La charge critique qui cause le flambement est la valeur la plus faible de N_x qui annule le dénominateur dans l'expression de w . Le déplacement normal croît alors en théorie à l'infini pour $n = 1$ ce qui donne

$$(N_x)_{cr} = \frac{\pi^2 a^2 D}{m^2} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) = \frac{\pi^2 D}{b^2} \left(\frac{mb}{a} + \frac{a}{mb} \right)^2 \quad (5.9)$$

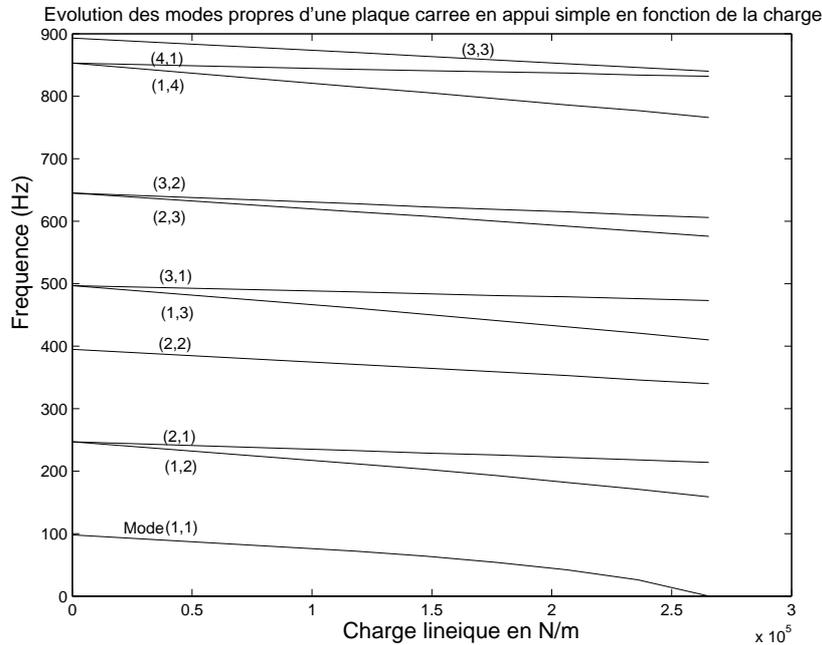


FIG. 19 – Variations des modes en fonction de la charge appliquée

La figure 19 présente l'évolution des modes propres de la plaque en fonction de la charge appliquée. Le maillage de la plaque est de 30x30 éléments. La première observation concerne le flambage en lui-même, en effet pour une valeur voisine de 270 000 N/m le premier mode propre à une fréquence nulle. Cette valeur est à comparer avec la charge critique N_x définie par Timoshenko qui a pour valeur, pour $i=1$ (premier mode de flambement)

$$N_x = \frac{Ee^3\pi^2}{12(1-\nu^2)L^2} \left(i + \frac{1}{i} \right)^2 = \frac{21 * 10^{10} (0.005)^3 \pi^2}{12(1-0.3^2)0.5^2} * 4 \simeq 379215 N/m \quad (5.10)$$

Le résultat calculé est donc assez éloigné de la valeur analytique. Plusieurs raisons à cet écart sont possibles. Tout d'abord il est important de noter

que la formulation utilisée par Timoshenko a pour hypothèse l'absence de cisaillement transverse contrairement à notre élément. Ensuite du point de vue numérique, il est difficile de valider toute la démarche qui nous a permis de calculer la précontrainte. En effet, si il est aisé de voir que les résolutions en statique et en dynamique ont une bonne convergence, l'utilisation de la déformée de notre plaque pour calculer la matrice de raideur géométrique nécessite des choix. Ainsi les valeurs où nous calculons σ (points de Gauss 2x2 pour la flexion et la membrane et 1x1 pour le cisaillement) sont elles adaptées à nos choix d'intégration ? Malgré la recherche des terme d'erreur, il est également possible que l'intégration numérique de K_σ ne soit pas encore adaptée.

La taille du maillage joue un rôle non négligeable dans la détermination de la charge critique comme le montre le tableau suivant ou la charge imposée est de 240 000 N/m :

Maillage	Fréquence du premier mode
10x10	28 Hz
30x30	26 Hz
40x40	25 Hz

Ces valeurs montrent que la fréquence des modes et donc la charge critique diminuent quand le nombre d'éléments augmente. Il est donc difficile de prévoir un résultat correct pour un type de calcul sans faire appel à des solutions analytiques ou expérimentales. Car pour tendre vers la solution analytique il faudrait diminuer le nombre d'éléments ce qui pose alors des problèmes de convergence pour la résolution du problème statique et l'analyse modale.

La seconde observation est que l'on retrouve une séparation des modes symétriques. La plaque étant carrée, ces modes sur une structure au repos ont même fréquence, mais la charge imposée privilégie une direction pour les vibrations de la plaque et cause la séparation visible sur la courbe. Ces résultats nous permettent de conclure que la modélisation de la précontrainte est très intéressante qualitativement. Même si les valeurs de références ne sont pas exactes, l'augmentation ou la diminution des fréquences propres en fonction du type de charge est cohérente avec la théorie. Il sera donc nécessaire d'approfondir le travail effectué afin de s'assurer, de la bonne construction des matrices en fonction de la déformée et, d'avoir les bonnes valeurs des contraintes dans l'élément.

Conclusion

Les éléments finis de plaques et de coques présentent de nombreux avantages dans la modélisation des structures minces. L'utilisation des éléments massifs amène en effet à créer des maillages denses qui peuvent être très coûteux en temps de calcul.

En intégrant la théorie des plaques avec un élément quadrangle dans Modalys, le logiciel évolue de manière intéressante à plusieurs points de vue :

- Moins d'éléments sont nécessaires pour obtenir de bons résultats de l'analyse modale. Ce bénéfice permet donc à l'utilisateur d'améliorer la synthèse sonore en augmentant le nombre de modes calculés.
- De nouvelles données sont fournies par le calcul telles les normales aux éléments qui servent à choisir une direction d'écoute. Les degrés de liberté en rotation qui permettent de calculer ces normales à la plaque déformée rendent possible également le fait d'imposer des moments à la structure et donc modéliser de nouveaux types de conditions aux limites.
- Amélioration de l'interface utilisateur en langage SCHEME. L'implémentation des plaques a permis de poser le problème du blocage de certains degrés de liberté uniquement. Ces degrés de liberté à bloquer peuvent maintenant être choisis dans le script qui définit l'objet élément fini par l'utilisateur. De même l'écriture des forces imposées fait maintenant l'objet d'une commande dans laquelle il suffit d'indiquer le numéro du noeud et le degré de liberté qui subira la force.

L'implémentation des éléments plaques a été suivie de la prise en compte de la précontrainte sur ces éléments. Il est maintenant possible de prendre en compte dans une analyse modale l'influence d'un tenseur de contraintes σ^0 .

De nouveaux paramètres physiques s'offrent donc à l'utilisateur. Il peut observer la variation des modes propres d'une corde ou d'une plaque en fonction de la charge qui lui est appliquée et donc d'entendre une différence sonore en jouant uniquement sur cette charge. Le résultat d'une synthèse sonore réalisée avec les éléments développés durant ce projet sera présenté à la soutenance.

Sur ces bases, de nouveaux développements de Modalys seront menés pour faire varier la force extérieure au cours du calcul afin de pouvoir synthétiser un glissement du son similaire par exemple à celui d'une timbale lorsque l'on tend sa peau avec la pédale.

A Discrétisation de l'énergie de déformation

A.1 Energie de déformation due au cisaillement

En étudiant le calcul de l'énergie de déformation due à ϵ_{xz} , il est possible de voir apparaître au cours de l'intégration numérique des termes indésirables qui n'ont pas de signification physique. Dans le cadre de ce projet les éléments finis isoparamétriques ont été choisis pour simplifier la phase de discrétisation. Notre quadrilatère à quatre noeuds permet donc d'écrire l'interpolation des déplacements de la manière suivante :

$$\begin{aligned} w &= c_0 + c_1x + c_2y + c_3xy \\ \theta_x &= d_0 + d_1x + d_2y + d_3xy \end{aligned}$$

L'intégrale qui nous intéresse est alors la suivante :

$$\begin{aligned} \int \int \epsilon_{xz}^2 dx dy &= \int \int (\theta_x - w_{,x})^2 dx dy \\ &= \int \int (d_0 + d_1x + d_2y + d_3xy - c_1 - c_3y)^2 dx dy \\ &= \int \int ((d_0 - c_1)^2 + 2d_0d_1x + 2d_0d_2y + 2d_0d_3xy - 2d_0c_3y \\ &\quad + 2d_1d_2xy + 2d_1d_3x^2y - 2c_1d_1x - 2d_1c_3xy + 2d_2d_3xy^2 \\ &\quad - 1c_1d_2y - 2c_3d_2y^2 + -2c_1d_3xy - 2c_3d_3xy^2 + 2c_1c_3y \\ &\quad + d_1^2x^2 + d_2^2y^2 + d_3^2x^2y^2 + c_3^2y^2) dx dy \end{aligned}$$

Le phénomène de verrouillage intervient alors ou non en fonction d'un type d'intégration numérique utilisée comme le montrent les résultats suivants.

- Intégration exacte :

$$\begin{aligned} \int \int \epsilon_{xz}^2 dx dy &= 4(\theta_x - w_{,x})_0^2 - \frac{4}{3}(\theta_{x,y} - w_{,xy})_{x=0}^2 + \frac{4}{3}(\theta_{x,x})_{y=0}^2 \\ &\quad + \frac{4}{9}(\theta_{x,xy})^2 \end{aligned}$$

- Intégration semi-réduite :

$$\int \int \epsilon_{xz}^2 dx dy = 4(\theta_x - w_{,x})_0^2 - \frac{4}{3}(\theta_{x,y} - w_{,xy})_{x=0}^2$$

- Intégration réduite :

$$\int \int \epsilon_{xz}^2 dx dy = 4(\theta_x - w_{,x})_0^2$$

Selon Prathap (cf. réf [7]), seuls les deux premiers termes fournis par l'intégration exactes ont un sens physique. En effet plus notre plaque devient

mince et plus notre élément doit se rapprocher des conditions de Kirchoff qui ne prennent pas en compte le cisaillement transverse. Cette condition implique :

$$\begin{aligned}\theta_x &= w_{,x} \\ \theta_y &= w_{,y}\end{aligned}$$

Cependant les deux autres termes de l'intégration exacte n'ont pas de réalité physique. Ils sont donc la cause du verrouillage et ne devraient pas être calculés ce qui est chose faite grâce à l'intégration à 1x2 points de Gauss.

L'intégration réduite préconisée par Hughes est également intéressante dans le sens où les termes à l'origine de l'erreur disparaissent. Mais une des conditions de Kirchoff n'est plus calculée ce qui provoque des erreurs dans l'élément principalement quand la plaque devient épaisse.

A.2 Energie de membrane

Sur le même modèle, nous avons discrétisé l'énergie de déformation membranaire afin de savoir quelle intégration numérique appliquer dans la construction de la matrice de raideur matérielle.

$$\begin{aligned}\pi_{membrane} &= \frac{Eh^2}{24(1-\nu^2)} \int \int (u_{,x} + \theta_{x,x})^2 + (v_{,y} + \theta_{y,y})^2 \\ &+ 2\nu(u_{,x} + \theta_{x,x})(v_{,y} + \theta_{y,y}) + \frac{1-\nu}{2}(u_{,y} + \theta_{x,y} + v_{,x} + \theta_{y,x})^2 dx dy\end{aligned}$$

Soient :

$$\begin{aligned}u &= a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy \\ v &= b_0 + b_1x + b_2y + b_3xy \\ w &= c_0 + c_1x + c_2y + c_3xy \\ \theta_x &= d_0 + d_1x + d_2y + d_3xy \\ \theta_y &= e_0 + e_1x + e_2y + e_3xy\end{aligned}$$

L'intégration de l'énergie de déformation due à ϵ_{xx} devient :

$$\begin{aligned}& \int \int \epsilon_{xx}(\epsilon_{xx} + \nu\epsilon_{yy}) dx dy \\ &= \int \int (u_{,x} + \theta_{x,x})^2 + \nu(u_{,x} + \theta_{x,x})(v_{,y} + \theta_{y,y}) dx dy \\ &= \int \int (a_1 + a_3y + d_1 + d_3y)^2 + \nu(a_1 + a_3y + d_1 + d_3y)(b_2 + b_3x + e_2 + e_3x) dx dy \\ &= \int \int a_1^2 + d_1^2 + 2a_1d_1 + 2a_1a_3y + 2a_1d_3y + 2d_1a_3y + 2d_1d_3y \\ &+ 2a_3d_3y^2 + a_3^2y^2 + d_3^2y^2 + \nu(a_1 + d_1)(b_2 + e_2) + (a_1 + d_1)(b_3x + e_3x) \\ &+ (a_3y + d_3y)(b_2 + e_2) + (a_3y + d_3y)(b_3x + e_3x) dx dy\end{aligned}$$

Intégration exacte :

$$\begin{aligned} \int \int \epsilon_{xx}(\epsilon_{xx} + \nu\epsilon_{yy}) &= 4(u_{,x} + \theta_{x,x})_{y=0}^2 + \frac{4}{3}(u_{,xy} + \theta_{x,xy})^2 \\ &+ 4\nu((u_{,x} + \theta_{x,x})_{y=0}(v_{,y}\theta_{y,y})_{x=0}) \end{aligned}$$

Intégration réduite :

$$\int \int \epsilon_{xx}(\epsilon_{xx} + \nu\epsilon_{yy}) = 4(u_{,x} + \theta_{x,x})_{y=0}^2 + 4\nu((u_{,x} + \theta_{x,x})_{y=0}(v_{,y}\theta_{y,y})_{x=0})$$

Par analogie avec la partie en cisaillement, il semble qu'ici l'intégration exacte doit être privilégiée afin de garder les dérivées de u et θ_x suivant y . Cette dérivée est présente afin de compenser la dérivée d'ordre 1 calculée en $y = 0$.

A.3 Discrétisation de l'énergie de précontrainte

Contrairement aux équations étudiées précédemment, nous avons trouvé très peu de références à l'intégration de la matrice de raideur géométriques. Nous devons donc par nous même déterminer les méthodes de calcul tout en sachant que des erreurs numériques sur notre précontrainte ne sont pas facilement identifiables.

Comme il est expliqué en détail à la section 5.3 l'intégration est à effectuer sur le produit matriciel suivant

$$[\epsilon]^t [\Sigma^0] [\epsilon] = \begin{bmatrix} u_{,x} & u_{,y} & 0 & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma^0 & 0 & 0 & \sigma^0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ z\beta_{x,x} \\ z\beta_{x,y} \\ \beta_x \end{bmatrix}$$

Nous allons donc observer le premier terme, celui du produit associé à $u_{,x}$. En conservant les mêmes fonctions d'interpolation que précédemment, l'intégrale devient :

$$\begin{aligned} &\int \int u_{,x}(\sigma_{11}u_{,x} + \sigma_{12}u_{,y} + \sigma_{11}z\beta_{x,x} + \sigma_{12}z\beta_{x,y} + \sigma_{13}\beta_x) \\ &= \int \int (a_1 + a_3y)(\sigma_{11}(a_1 + a_3y + zd_1 + zd_3y) \\ &+ \sigma_{12}(a_2 + a_3x + zd_2 + zd_3x) + \sigma_{13}(d_0 + d_1x + d_2y + d_3xy))dxdy \end{aligned}$$

L'utilisation de l'intégration exacte avec les points de Gauss nous permet d'éviter d'avoir à développer de tels polynômes. Ainsi le résultat par inté-

gration exacte s'écrit :

$$4\sigma_{11}(u_{,x(y=0)}^2 + z(u_{,x}\theta_{x,x})_{y=0} + \frac{1}{3}(u_{,xy}^2 + zu_{,xy}\theta_{x,xy}))$$

$$+ 4\sigma_{12}u_{,x(y=0)}(u_{,y(x=0)} + z\theta_{x,y(x=0)}) + 4\sigma_{13}(u_{,x(y=0)}(\theta_x)_0 + \frac{1}{3}u_{,xy}\theta_{x,y(x=0)})$$

De même que pour les phénomènes de membranes, aucun terme supplémentaire ne semble ressortir et il semble après quelques essais dans le code de Modalys, que l'intégration exacte de la matrice de raideur géométrique ne crée pas de phénomène de verrouillage.

B Développement de la matrice de raideur géométrique

La matrice de raideur géométrique n'est pas proportionnelle à la charge appliquée à la structure dans le cas des plaques. En développant l'expression à intégrer, il sera possible de simplifier l'écriture et donc le calcul.

$$E^t \Sigma^0 E = E^t \begin{bmatrix} \sigma^0 & 0 & 0 & \sigma^0 & 0 \\ 0 & \sigma^0 & 0 & 0 & \sigma^0 \\ 0 & 0 & \sigma^0 & 0 & 0 \\ \sigma^0 & 0 & 0 & \sigma^0 & 0 \\ 0 & \sigma^0 & 0 & 0 & \sigma^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & zD & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & zD \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N^t \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

avec

$$\sigma^0 = \begin{bmatrix} zA + G & zL + I & F \\ zL + I & zB + H & E \\ F & E & zC + K \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

En prévision de l'intégration sur l'épaisseur nous pouvons donc considérer que tous les termes d'une puissance de z impaire vont disparaître durant l'intégration :

$$\begin{aligned} K_{\sigma^0}^e &= \int_{element} E^t \Sigma^0 E \det(J) dr ds \\ &= \int_{element} \begin{bmatrix} D^t(GD_{1*} + ID_{2*}) & 0 & 0 & D^t(z^2(AD_{1*} + LD_{2*}) + FN^t) & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ D^t(z^2(AD_{1*} + LD_{2*})) & 0 & 0 & D^t(z^2(GD_{1*} + ID_{2*})) & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

avec

$$D_{i*} = i\text{ème ligne de la matrice } D$$

Il est alors possible de décomposer le tenseur σ^0 en trois composantes :

$$\begin{aligned}\sigma_m &= \begin{bmatrix} G & I & 0 \\ I & H & 0 \\ 0 & 0 & K \end{bmatrix} \\ \sigma_f &= \begin{bmatrix} zA & zL & 0 \\ zL & zB & 0 \\ 0 & 0 & zC \end{bmatrix} \\ \sigma_c &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & F \\ 0 & 0 & E \\ E & F & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

La programmation s'en trouve facilitée et il est alors plus aisé de ne modifier qu'une des trois composantes si nécessaire. Par exemple, en quel point de l'élément la contrainte nous intéresse-t-elle ? En fonction de l'intégration de K il peut être intéressant de calculer σ au points d'intégration réduite ou exacte.

Enfin nous pouvons observer que sur la diagonale de la matrice de raideur, seuls les contraintes issues de σ_m sont présentes tandis que les contraintes σ_f et σ_s se retrouvent dans les termes croisés. D'où l'écriture de Σ^0 :

$$\Sigma^0 = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 & \sigma_f + \sigma_c & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 & 0 & \sigma_f + \sigma_c \\ 0 & 0 & \sigma_m & 0 & 0 \\ \sigma_f + \sigma_c & 0 & 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & \sigma_f + \sigma_c & 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

C Détermination des conditions aux limites (hypothèses de Kirschhoff)

En négligeant le cisaillement transverse il est possible d'exprimer les déformations uniquement en fonction de w . ϵ_{xz} et ϵ_{yz} sont considérés comme nuls. On a alors $\beta_i = w_{,i}$ pour $i=1,2$ ce qui permet d'écrire :

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{xy} \end{bmatrix} = -z \begin{bmatrix} w_{,xx} \\ w_{,yy} \\ 2w_{,xy} \end{bmatrix} \quad (\text{C.1})$$

Les conditions aux limites doivent être déterminées en fonction des forces et déplacements imposés. Pour ce faire, l'intégrale sur Σ de la forme bilinéaire de l'élasticité doit être décomposée afin d'identifier membre à membre les conditions avec les différentes expressions de w .

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma_{ij} v_{i,j} d\Omega &= \int_{\Omega} -z \left(\frac{E\nu}{1-\nu^2} w_{,ii} \delta_{ij} + \frac{E}{1+\nu} w_{,ij} \right) v_{i,j} d\Omega \\ &= \frac{E}{1-\nu^2} \int_{\Omega} -z (\nu w_{,ii} \delta_{ij} + (1-\nu) w_{,ij}) (-z \hat{w}_{,ij}) d\Omega \\ &= \frac{Ee^3}{12(1-\nu^2)} \int_{\Sigma} (\nu \Delta(w) \Delta(\hat{w}) + (1-\nu) w_{,ij} \hat{w}_{,ij}) d\Sigma \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

\hat{w} exprime le déplacement virtuel du champ v

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \Delta(w) \Delta(\hat{w}) d\Sigma &= \int_L \frac{\partial \hat{w}}{\partial n} \Delta w dL - \int_{\Sigma} \Delta w_{,j} \hat{w}_{,j} \\ &= \int_L \frac{\partial \hat{w}}{\partial n} \Delta w dL + \int_{\Sigma} \hat{w} (\Delta w)_{,jj} d\Sigma - \int_{\Sigma} (\hat{w} \Delta w_{,j})_{,j} d\Sigma \\ &= \int_L \frac{\partial \hat{w}}{\partial n} \Delta w dL + \int_{\Sigma} \hat{w} (\Delta(\Delta w)) d\Sigma - \int_L \hat{w} \Delta w_{,j} n_j dL \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} w_{,ij} \hat{w}_{,ij} &= \int_{\Sigma} (w_{,ij} \hat{w}_{,i})_{,j} d\Sigma - \int_{\Sigma} w_{,ijj} \hat{w}_{,i} d\Sigma \\ &= \int_L w_{,ij} \hat{w}_{,i} n_j dL - \int_{\Sigma} w_{,ijj} \hat{w}_{,i} d\Sigma \\ &= \int_L w_{,ij} \hat{w}_{,i} n_j dL - \int_{\Sigma} (w_{,ijj} \hat{w})_{,i} d\Sigma + \int_{\Sigma} w_{,iijj} \hat{w} d\Sigma \\ &= \int_L w_{,ij} \hat{w}_{,i} n_j dL - \int_L (w_{,ijj} \hat{w}) n_j dL + \int_{\Sigma} \Delta(\Delta w) \hat{w} d\Sigma \end{aligned}$$

Après avoir décomposé $w_{,ij}n_j$ suivant n et t (respectivement les vecteurs normaux et la tangents au contour de la plaque) l'équation (C.2) devient :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \sigma_{ij}v_{i,j}d\Omega &= D \int_{\Sigma} \Delta(\Delta w)\hat{w}d\Sigma - \int_L \hat{w}\Delta w_{,j}n_jdL \\
&+ \int_L \nu\Delta w \frac{\partial \hat{w}}{\partial n}dL + \int_L (1-\nu)w_{,ij}n_j\hat{w}_{,i}dL \\
&= D \int_{\Sigma} \Delta(\Delta w)\hat{w}d\Sigma - \int_L \hat{w}\Delta w_{,j}n_jdL \\
&+ \int_L \nu\Delta w \frac{\partial \hat{w}}{\partial n}dL + \int_L (1-\nu)(n_jw_{,ij}n_j) \frac{\partial \hat{w}}{\partial n}dL \\
&- \int_L (1-\nu)(t_iw_{,ij}n_j)_{,i}t_i\hat{w}dL
\end{aligned}$$

Assimilons le solide Ω a une plaque de surface Σ et de contour L . Ce contour subi les effets d'une force linéique P_l et d'un moment de flexion résultant $M = M_n n + M_t t = P_l \Lambda z$.

$$\begin{aligned}
\text{Sur } \Sigma &: D\Delta(\Delta w) + \rho e \ddot{w} = f_s = (P_+ - P_-)n_+ \\
\text{Sur } L &: -D [(\Delta w)_{,j}n_j + (1-\nu)(t_iw_{,ij}n_j)_{,i}t_i] = P_l - (P_l \Lambda z \cdot n)_{,i}t_i \\
&D [\nu\Delta w + (1-\nu)n_iw_{,ij}n_j] = -(P_l \Lambda z \cdot t)
\end{aligned}$$

Références

- [1] www.ircam.fr.
- [2] Klaus-Jürgen Bathe. *Finite element procedures in engineering analysis*. Prentice-Hall, 1982.
- [3] Joel Bensoam. *Représentaion intégrale appliquée à la synthèse sonore par modélisation physique*. Thèse de Doctorat, Université du Maine, 2003.
- [4] J.F. Imbert. *Analyse des structures par éléments finis*, volume 2. Cepadues Editions, 1979.
- [5] Arthur Leissa. *Vibration of plates*. Acoustical Society of America, 1973.
- [6] R. L. Taylor O. C. Zienkiewicz. *The finite element method*, volume 2. McGraw-Hill, 1991.
- [7] Gangan Prathap. *Finite element analysis as computation*. Bangalore, Inde, 2001.
- [8] S. Woinowsky-Krieger Stephen P. Timoshenko. *Theory of Plates and Shells*. McGraw-Hill, 1959.
- [9] Yann Yvon Sébastien Derre. *Etude et modélisation de la précontrainte - application à la synthèse sonore*. Projet de Fin d'Etudes, ENSAM Paris, 2004.
- [10] W. Knoknukulchai T.J.R. Hughes, R.L. Taylor. A simple and efficient finite element for plate bending. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, vol 11, 1529-1543, 1977.