



**THESE DE DOCTORAT DE
L'UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE**

Spécialité

Acoustique musicale

Présentée par

M. David Roze

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR de L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE

Sujet de la thèse :

**Simulation de la propagation d'onde non linéaire par les séries de
Volterra**

Soutenue le
devant le jury composé de :

M. A. MICAËLLI	Directeur de Recherche CEA, LIST	Directeur
M. F. BOYER	Professeur, École des Mines, Nantes	Rapporteur
Mme. F. LAMNABHI-LAGARRIGUE	Directrice de Recherche CNRS	Rapporteur
M. S. BILBAO	Senior Lecturer, U. of Edinburgh	Examineur
M. B. FABRE	Professeur, UPMC	Examineur
M. J. BENSOAM	Chargé de Recherche IRCAM	Invité
M. T. HÉLIE	Chargé de Recherche CNRS	Invité
M. X. MERLHIOT	Chargé de Recherche CEA, LIST	Invité

Université Pierre & Marie Curie - Paris 6
Bureau d'accueil, inscription des doctorants et base de données
Esc G, 2ème étage
15 rue de l'école de médecine
75270-PARIS CEDEX 06

Tél. Secrétariat : 01 42 34 68 35
Fax : 01 42 34 68 40
Tél. pour les étudiants de A à EL : 01 42 34 69 54
Tél. pour les étudiants de EM a ME : 01 42 34 68 41
Tél. pour les étudiants de MF a Z : 01 42 34 68 51
E-mail : scolarite.doctoral@upmc.fr

Résumé

Une des étapes de la synthèse sonore par modèle physique consiste à résoudre la dynamique d'un résonateur excité par une force (action du musicien). Cette force et ses caractéristiques sont très importantes puisqu'elles traduisent musicalement toute la gestuelle du musicien. Pour des amplitudes de force atteignant un certain seuil, l'hypothèse de linéarité n'est plus valable. Par exemple, les auditeurs peuvent entendre pour les nuances fortissimo une modification du timbre de l'instrument de musique.

Le travail de cette thèse consiste à approximer la dynamique de modèles non linéaires par les séries de Volterra (outil d'approximation de systèmes faiblement non linéaires) afin d'améliorer le réalisme de la synthèse. Ces modèles sont au nombre de trois : deux modèles de cordes prenant en compte la variation de tension (Kirchhoff et Kirchhoff-Carrier) et le modèle de poutre de Reissner (dont la cinématique est définie à l'aide d'un groupe de Lie) afin d'exprimer le couplage entre les six degrés de liberté. Pour chacun de ces modèles, le calcul des noyaux de Volterra (définissant la série de Volterra) sera réalisé ainsi que la structure de simulation mise en oeuvre à partir des résultats obtenus.

Table des matières

Introduction	4
1 Quelques rappels et introduction aux séries de Volterra	8
1.1 Introduction	8
1.2 Exemple introductif et problème posé	9
1.2.1 Système linéaire Entrée/Sortie : cas d'un système masse-ressort-amortisseur	9
1.2.2 Ressort non linéaire : développement en perturbations régulières sur l'entrée	13
1.3 Séries de Volterra de système à une entrée	16
1.3.1 Définition et propriétés	16
1.3.2 Lois d'interconnexion	17
1.4 Solution en séries de Volterra de l'exemple	19
1.4.1 Système annulateur et calcul de noyaux	19
1.4.2 Réalisation faible coût pour la simulation	22
1.5 Formulaire	24
1.6 Support théorique pour l'application des séries de Volterra	26
1.6.1 Définition générale	26
1.6.2 Paramétrage en espace	27
1.6.3 Convergence	28
1.6.4 Non-unicité des noyaux	28
1.6.5 Transformée de Laplace	29
1.6.6 Lois d'interconnexion	29
1.7 Conclusion	30
2 Modèles de corde de Kirchhoff et de Kirchhoff-Carrier	32
2.1 Introduction	32
2.2 Définition du modèle de Kirchhoff, excitation et conditions aux limites	33
2.2.1 Modèle	33
2.2.2 Adimensionnement	34

2.3	Établissement de l'équation des noyaux	35
2.3.1	Système annulateur	36
2.3.2	Équation des noyaux	36
2.4	Projection modale et représentation sous forme d'arbres	39
2.4.1	Solution analytique	39
2.4.2	Décomposition modale	40
2.4.3	Définition des arbres	42
2.5	Identification à des structures réalisables pour la synthèse sonore	43
2.5.1	Systèmes de Volterra élémentaires ternaires et théo- rème d'identification	44
2.5.2	Application : construction du structure réalisables pour les ordres $n = 1, 3, 5$	46
2.6	Implémentation numérique	49
2.7	Le modèle de Kirchhoff-Carrier	51
2.7.1	Système annulateur	51
2.8	Synthèse sonore	55
2.8.1	Approximations à l'ordre trois ($N = 3$)	57
2.8.2	Approximations d'ordre supérieur ($N = 5$)	60
2.9	Conclusion	61
3	Modèle de poutre de Reissner et groupes de Lie	62
3.1	Introduction	62
3.2	Exemple introductif : le solide rigide	63
3.2.1	Angles d'Euler	63
3.2.2	Groupes de Lie	64
3.3	Le modèle de poutre de Reissner, hypothèses géométriques et conditions aux limites	65
3.3.1	Géométrie	65
3.3.2	Expression dans $SO(3) \times \mathbb{R}^3$	66
3.3.3	Expression dans $SE(3)$	66
3.4	Établissement de l'équation d'équilibre, principe de Hamilton .	69
3.4.1	Équations d'équilibre du système conservatif	69
3.4.2	Ajout de l'amortissement	73
3.5	Introduction d'une carte basée sur l'exponentielle pour une étude locale	74
3.6	Conclusion	79
4	Application des séries de Volterra dans l'algèbre de Lie $se(3)$	80
4.1	Propriétés et opérateurs applicables aux noyaux de Volterra vectoriels	80
4.1.1	Lois d'interconnexion	81

4.1.2	Opérateurs de transformation vecteur/matrice	82
4.2	Équation des noyaux	82
4.3	Projection modale	83
4.4	Structure de simulation	86
4.4.1	Arbres	86
4.4.2	Structure de simulation	87
4.5	Conclusion	88
5	Vers un formalisme en noyaux de Green-Volterra	89
5.1	Introduction	89
5.2	Vers des noyaux de Green-Volterra	90
5.2.1	Introduction	90
5.2.2	Formalisme de Green : rappels	90
5.2.3	Noyaux instationnaires	92
5.2.4	Proposition d'une extension d'un formalisme de Green-Volterra	93
5.2.5	Équation des noyaux pour un système infini	96
5.2.6	Équation des noyaux pour un système borné sur l'intervalle $[0;1]$ avec des conditions de Dirichlet	97
5.3	Méthode des images	100
5.3.1	Méthode	100
5.3.2	Application	100
5.4	Formulaire	101
5.5	Conclusion	101
	Conclusion et perspectives	103
	Annexes	106
A	Séries de Volterra	106
A.1	Fonction de Green du problème linéarisé	106
A.2	Modèle (M1) : projection des noyaux de Volterra sur la base modale	107
A.3	Preuve du théorème 3	108
A.4	Démonstration des lois d'interconnexion	109
A.5	Séries de Volterra multi-entrées	112
A.5.1	Séries de Volterra à trois entrées	113
A.5.2	Calcul des noyaux de Volterra pour (M2)	113
A.5.3	Identification d'une structure simulable et connexion à un chevalet	116

B	Notions pour l'introduction aux groupes de Lie	119
B.1	Variété différentiable	119
B.1.1	Variété différentiable régulière	119
B.1.2	Espaces tangents	119
B.1.3	Applications tangentes, différentielle	120
B.1.4	Champs de vecteurs tangents	121
B.1.5	Espaces et applications cotangentes	122
B.1.6	Formes différentielles	123
B.2	Groupes de Lie	123
B.2.1	Translations	123
B.2.2	Algèbre de Lie	124
B.2.3	Opérateurs adjoints	124
B.3	Application exponentielle	125
B.4	Exemples	126
B.4.1	$GL(n, \mathbb{R})$	126
B.4.2	$SO(n)$	126
B.4.3	$SE(3)$	127
C	Calculs des dérivées de l'exponentielle	128
C.1	Opérateur $dexp$	128
C.2	Développement de Taylor	130
C.3	Équation d'équilibre	130
C.4	Vérification du changement de variable $(\mathbf{T}, \mathbf{E}) \rightarrow u$	133
D	Principe de Hamilton	134
D.1	Énergie cinétique	134
D.2	Énergie potentielle	135
E	Détail du calcul de l'application de la méthode des images	136
	Références	141

Introduction

La synthèse sonore par modèle physique consiste en la création d'un son par la résolution de la dynamique d'un résonateur, i.e. produire un son à partir de l'état d'un résonateur (corde, tube...) régi par les lois de la physique. A l'inverse, la synthèse par modèles de signaux (plus ancienne) s'attache à reproduire le résultat, les « paramètres » d'un son, paramètres issus de l'analyse d'un signal. Un exemple de synthèse sonore par modèle physique, est le logiciel *Modalys* développé par l'équipe Acoustique Instrumentale à l'IRCAM. Ce logiciel est une lutherie virtuelle, qui met à disposition de l'utilisateur des catalogues d'objets et d'interactions. L'assemblage de différents éléments associé à une excitation du système ainsi créée, va voir sa dynamique simulée et permettre de récupérer une variable de sortie, destinée à créer un son. Il est déjà possible de faire des calculs en temps réel dans *Modalys*, cependant la synthèse sonore est réalisée à partir de résonateurs linéarisés. Certains phénomènes bien connus des musiciens ne sont donc pas simulables actuellement (son cuivré, variation de tension d'une corde ou d'une membrane...).

Cette thèse s'inscrit dans le cadre de la simulation de la propagation d'onde non linéaire dans un solide, afin d'améliorer le réalisme de la synthèse, en intégrant certains phénomènes non linéaires. L'objectif est de prendre en compte le comportement non linéaire du résonateur afin de pouvoir reproduire certains modes de jeu liés à l'augmentation de l'amplitude de l'excitation (distorsion, changement de timbre...). Les séries de Volterra sont un des outils possibles pour ce travail. Cette méthode est connue pour son utilisation dans l'approximation des systèmes non linéaires par les automaticiens (cf. [32], [21]). Elle est bien adaptée à la simulation de non-linéarités « faibles » (i.e. polynomiales).

Le travail présenté se focalise sur la simulation de différents modèles non linéaires de corde. En effet, les modèles linéarisés bien connus de corde en appui simple ont pour solution une sinusoïde amortie. L'observation (visuelle et « auditive ») montre que la réalité est plus complexe pour des excitations de forte amplitude. En effet, la variation de fréquence ou l'enrichissement spectral issus du son d'un violon par exemple, ne peuvent être reproduits par

ces modèles. Le premier phénomène important à prendre en compte est la variation de tension : la corde déformée pendant la vibration subit une variation de longueur, et donc de tension. Du point de vue du modèle physique, la célérité n'est plus constante. Un deuxième point qui nous semble important, est la prise en compte de tous les degrés de liberté. Une observation sommaire de l'effet d'un coup d'archet sur une corde, filmé avec une caméra rapide, montre que l'excitation prend la forme (au moins) d'une torsion et d'un déplacement transverse imposés.

Watzky (cf. [49]) a réalisé une importante bibliographie sur les modèles de corde, linéaires ou non, avec un ou plusieurs degrés de liberté, développés au XXème siècle. Ce travail met en évidence que le couplage entre les degrés de libertés est non linéaire. Il révèle également la variation de tension, ainsi que la modification du contenu spectral en fonction de l'excitation. Ces phénomènes non linéaires semblent nécessaires dans un modèle de synthèse sonore par modèle physique destiné à être de plus en plus réaliste. La synthèse sonore d'une corde soumise à différents types d'excitation (archet, pizzicato, marteau...) ne peut donc être réalisée avec un modèle à un degré de liberté.

Le travail présenté dans cette thèse se décompose en trois parties principales. Les chapitres 1 et 2 constituent une introduction aux séries de Volterra. Le premier chapitre présente quelques rappels sur la résolution d'un problème linéaire, puis propose une méthode basée sur la théorie des perturbations régulières pour résoudre le même problème avec un terme non linéaire. La solution nécessite l'utilisation de convolutions aussi bien dans le domaine temporel que dans le domaine de Laplace. Les séries de Volterra sont introduites par l'exemple pour proposer une réponse à ce problème. Le chapitre 2 présente une démarche complète de résolution d'un problème non linéaire. Deux modèles de corde non linéaire (Kirchhoff et Kirchhoff-Carrier) sont présentés. Le calcul de leur noyaux de Volterra permettra d'identifier une structure de simulation simple.

Les chapitres 3 et 4 reprennent la même approche pour un modèle de poutre. Le modèle de poutre de Reissner exprimé à l'aide d'un groupe de Lie a été choisi pour étudier un modèle à 6 degrés de liberté par section. Ce choix est basé sur l'avantage d'exprimer les équations de la mécanique dans un groupe de Lie adapté qui permet de simplifier les expressions d'équilibre. En effet, au prix d'un cadre théorique plus complexe il est possible d'exprimer la dynamique d'un solide sans les non-linéarités dues au paramétrage. Après avoir écrit l'équation d'équilibre de manière adaptée aux série de Volterra, le chapitre 4 établira l'équation des noyaux et la structure de simulation.

Finalement, la troisième partie, composée du chapitre 5, présente une généralisation des séries de Volterra au formalisme de Green. En effet les fonctions de Green sont destinées à calculer la réponse d'un système linéaire soumis à des forces, conditions aux limites réparties et variables. D'un autre côté les noyaux de Volterra utilisés dans les chapitres précédents ne peuvent être utilisés dans le cas de forces dont la répartition varie dans le temps. Les noyaux de Green-Volterra définis offrent la possibilité de calculer la réponse d'un système non linéaire soumis à des forces variables dans le temps et l'espace. Ce type de formulation pourrait être utilisé pour résoudre des problèmes de contact bilatéral par exemple.

Chapitre 1

Quelques rappels et introduction aux séries de Volterra

Ce chapitre présente la démarche qui sera appliquée à des systèmes mécaniques dans le cadre de cette thèse. Quelques outils de la théorie des systèmes linéaires et non linéaires seront rappelés à travers un exemple, puis le support théorique des séries de Volterra sera introduit.

1.1 Introduction

Dans le cadre de la synthèse sonore d'instruments de musique par modèles physiques, on s'intéresse à des résonateurs non linéaires initialement au repos excités par des signaux provoqués par le musicien (application d'une pression dans la bouche, d'un mouvement d'archet...) Le signal d'excitation peut être considéré comme *l'entrée* d'un système (ici le résonateur) et va modifier son état en lui fournissant de l'énergie. Pour la synthèse sonore, on peut s'intéresser à une quantité dépendante de cet état (mouvement ou pression en un point du résonateur, son rayonné...) qu'on définira comme *la sortie* du système. Pour des instruments auto-entretenus, l'auto-oscillation est due à des non-linéarités de couplage souvent « fortes » (équation de Bernoulli pour les vents, lois de frottement ou de contact pour les cordes...). Dans ce manuscrit nous nous intéressons à des phénomènes non linéaires plus « faibles » localisés dans le résonateur et simplement responsables de distorsions et de changements de timbre. En effet, pour des nuances de jeu « fortissimo » (où l'amplitude de la force d'excitation est la plus élevée), l'auditeur peut entendre aisément une modification du timbre liée à un enrichissement spectral du son produit. Ces phénomènes indiquent clairement que l'hypothèse de linéarité de la dynamique de la corde n'est plus valable pour la synthèse sonore. En effet,

les phénomènes tels que la variation de tension ou les couplages entre les degrés de libertés ne sont plus négligeables et entraînent les distorsions perçues par l'auditeur. L'expression progressive des ces non-linéarités en fonction de l'amplitude de l'excitation permet de les modéliser comme une perturbation du système linéaire. Dans ce cas, la dynamique est toujours étudiée autour de l'équilibre du système linéaire on parlera de systèmes faiblement non linéaires (i.e. dont la validité va légèrement au-delà de la plage linéaire).

Les séries de Volterra sont bien adaptées à l'approximation de ces systèmes (cf. [7], [21], [30] ou [32] par exemple). En effet, cet outil permet d'approximer le système jusqu'à un ordre de non-linéarité choisi (cf. [24]). De plus, une fois les noyaux du système obtenus (par décomposition en non-linéarités homogènes sur l'entrée), il est possible de déduire une simulation à faible coût basée sur des gains et des filtres dont les coefficients sont liés aux paramètres physiques.

Ce premier chapitre introduit les outils utilisés à travers l'exemple le plus simple de système E/S en mécanique, à savoir, un système masse-ressort amorti comportant, ou non, des faibles non-linéarités. Cette introduction permettra de mettre en valeur les différentes notions sur lesquelles reposent les séries de Volterra et la méthode de simulation choisie.

- la représentation d'état d'un système E/S linéaire, puis la solution grâce à la transformée de Laplace,
- approximation par la, théorie des perturbations régulières du même système muni d'un terme non linéaire
- introduction par l'exemple des séries de Volterra.

1.2 Exemple introductif et problème posé

1.2.1 Système linéaire Entrée/Sortie : cas d'un système masse-ressort-amortisseur

Considérons un système mécanique masse-ressort-amortisseur (cf. figure 1.1) centré (0 est le point d'équilibre) linéaire \mathcal{S} soumis à une force d'excitation f et gouverné par

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = f(t) \quad \forall t > 0 \quad (1.1)$$

$$y(0) = y_0 \in \mathbb{R} \quad (1.2)$$

$$\dot{y}(0) = \dot{y}_0 \in \mathbb{R} \quad (1.3)$$

où y localise la position de la masse et (y_0, \dot{y}_0) sont les conditions initiales.

La solution de ce problème de Cauchy est donnée par (cf. [32])

$$y(t) = g_0(t)y_0 + g_1(t)\dot{y}_0 + (h \star f)(t) \quad (1.4)$$

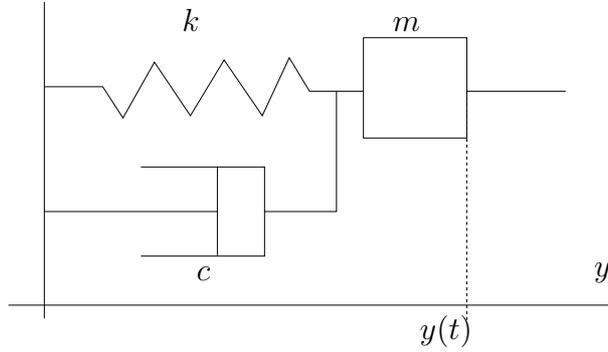


FIGURE 1.1 – Système masse-ressort-amortisseur

avec, si $c^2 < 4km$ le système est oscillant et $\forall t \in \mathbb{R}^+$

$$g_0(t) = e^{-\alpha t} (\cos(\beta t) + \frac{\alpha}{\beta} \sin(\beta t))$$

$$g_1(t) = \frac{1}{\beta} \sin(\beta t)$$

$$h(t) = \frac{e^{-\alpha t}}{m\beta} \sin(\beta t),$$

où $\alpha = \frac{c}{2m}$, $\beta = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}$, et $g = g_0 + g_1$ est la solution du problème homogène que l'on peut trouver avec la méthode de l'équation caractéristique par exemple. La convolution est définie par $(h \star f)(t) = \int_{\mathbb{R}} h(t - \tau) f(\tau) d\tau$.

Système E/S et représentation d'état

Le système linéaire différentiel d'ordre 2 de dimension 1 (équations (1.1) à (1.3) où x est scalaire) se réécrit sous la forme d'un système différentiel linéaire d'ordre 1 et de dimension 2 :

$$(S) \quad \dot{\mathbf{X}} = A\mathbf{X} + Bu \quad \forall t > 0 \quad (1.5)$$

$$y = C\mathbf{X} + Du \quad (1.6)$$

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0 \in \mathbb{R}^2 \quad (1.7)$$

avec $u = f$, $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix}$, et où $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}$, $C = [1 \ 0]$, $D = 0$ et $\mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

En théorie des systèmes et en automatique la forme (1.5)-(1.6) s'appelle représentation d'état du système d'entrée f , d'état \mathbf{X} et de sortie y (cf. figure

1.2). Ce système est stationnaire et causal, les quatre matrices A , B , C et D sont constantes. (1.5) est l'équation dynamique et (1.6) est l'équation d'observation.



FIGURE 1.2 – Système masse-ressort-amortisseur d'entrée f (force) et de sortie y (déplacement) le système \mathcal{S} .

Propriété 1

La solution de (1.5) est

$$\mathbf{X}(t) = g_{\mathbf{X}}(t)\mathbf{X}(0) + (h_{\mathbf{X}} \star u)(t) \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} y(t) &= C\mathbf{X}(t) + Du(t) & (1.9) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{X}(t). \end{aligned}$$

où $g_{\mathbf{X}}(t) = e^{At}$ et $h_{\mathbf{X}}(t) = e^{At}B$, ainsi l'équation (1.6) devient

$$y(t) = g_y(t)\mathbf{X}(0) + (h_y \star u)(t) \quad (1.10)$$

où $g_y(t) = Ce^{At}$ et $h_y(t) = Ce^{At}B + D\delta(t)$.

Cette formulation est plus simple que l'équation (1.4) et plus générale car valable pour toute dimension.

Dans la suite le système sera initialement au repos, i.e. les conditions initiales seront nulles, les équations (1.8) et (1.10) comporteront uniquement une convolution.

Transformée de Laplace et fonction de transfert

On note s la variable de Laplace. La fonction \mathbf{X} étudiée précédemment est causale, i.e. $\forall t < 0, \mathbf{X}(t) = 0$. Cette fonction appartient à $L^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ c'est à dire l'espace des fonctions définies sur \mathbb{R}^+ mesurables, il s'agit de signaux d'énergie finie.

Définition 1 (Transformée de Laplace dans $L^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$)

Soit $\mathbf{X} \in L^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, la transformée de Laplace $\mathcal{L}(\mathbf{X})$ de \mathbf{X} est définie par (cf. [39])

$$\mathcal{L}(\mathbf{X})(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}\mathbf{X}(t)dt \quad (1.11)$$

Le système étant causal et stable, la bande de convergence (l'ensemble des s où l'intégrale converge) est définie par \mathbb{C}_0^+ (plan complexe à partie réelle positive). Dans cette bande de convergence $\mathcal{L}(\mathbf{X})$ est analytique.

Les équations (1.5) et (1.6) deviennent dans le domaine de Laplace

$$s\mathcal{L}(\mathbf{X}) = A\mathcal{L}(\mathbf{X}) + B\mathcal{L}(u) \quad (1.12)$$

$$\mathcal{L}(y) = C\mathcal{L}(\mathbf{X}) + D\mathcal{L}(u) \quad (1.13)$$

ce qui conduit à

$$\mathcal{L}(\mathbf{X}) = H_{\mathbf{X}}\mathcal{L}(u)$$

$$\mathcal{L}(y) = H_y\mathcal{L}(u)$$

avec les fonctions de transfert qu'on note

$$H_{\mathbf{X}}(s) = Q(s)B \quad (1.14)$$

$$H_y(s) = CQ(s)B + D \quad (1.15)$$

où $Q(s) = (sI - A)^{-1}$. Pour notre exemple, on trouve

$$H_{\mathbf{X}}(s) = \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix} \frac{1}{ms^2 + cs + k}$$

$$H_y(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k}.$$

La résolution numérique peut se faire avec ses méthodes standard de passage du temps continu au temps discret (un exemple, le bloqueur d'ordre zéro est présenté section 2.6).

Simulation en temps discret Une possibilité d'application numérique de ces résultats est l'utilisation de la transformée bilinéaire définie par

$$s = \frac{2}{T} \frac{z - 1}{z + 1}. \quad (1.16)$$

Cette fonction permet de transformer un système différentiel linéaire dans le domaine de Laplace en un système à temps discret représenté par sa transformée en z . Ici, la solution du problème définie par la fonction de transfert $H_{\mathbf{X}}$ devient

$$H_{\mathbf{X}}^B(z) = \frac{(1 + 2z^{-1} + z^{-2})}{a + bz^{-1} + cz^{-2}} \quad (1.17)$$

avec T la période d'échantillonnage, $a = 4m + 2cT + kT^2$, $b = -8m + 2kT^2$ et $c = 4m - 2cT + kT^2$.

La figure 1.3 représente la simulation temporelle de l'équation (1.17) où l'excitation est une fonction affine du temps sur 10 ms.

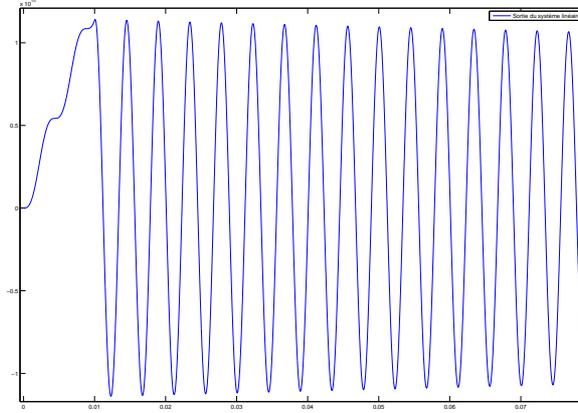


FIGURE 1.3 – Réponse du système linéaire défini par l'expression en temps discret de la fonction de transfert.

L'équation (1.17) permet d'obtenir une simulation à faible coût basée sur un filtre ARMA(2,2) :

$$y_n = \frac{-b}{a}y_{n-1} - \frac{c}{a}y_{n-2} + \frac{1}{a}u_n + \frac{2}{a}u_{n-1} + \frac{1}{a}u_{n-2}.$$

En résumé, cette première section a mis en valeur une méthode de résolution et de simulation d'un problème linéaire :

1. Représentation d'état de l'équation d'équilibre (1.1)
2. Transformée de Laplace et calcul des fonctions de transfert
3. Transformée bilinéaire pour discrétiser la solution
4. Simulation de la solution sinusoïdale.

La suite consiste à l'application de la même méthode pour un problème non linéaire.

1.2.2 Ressort non linéaire : développement en perturbations régulières sur l'entrée

Reprenons le système \mathcal{S} en modifiant l'équation (1.1) comme suit

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + (k + \alpha x(t))x(t) = f(t), \quad (1.18)$$

où α est le coefficient de non-linéarité et où $x(0) = 0$.

La représentation d'état obtenue dans les équations (1.5) et (1.6) devient pour le système (1.18)

$$\dot{\mathbf{X}} = f(\mathbf{X}, u) = A\mathbf{X} + Bu + R(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = A\mathbf{X} + Bu + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{X}^T Q \mathbf{X} \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

$$x = [1 \ 0] \mathbf{X} \quad (1.20)$$

avec $Q = \begin{bmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Marquons l'entrée u par $\epsilon > 0$ pour signifier que l'on considère u comme une petite perturbation

$$\dot{\mathbf{X}} = A\mathbf{X} + B\epsilon u + R(\mathbf{X}, \mathbf{X}). \quad (1.21)$$

et développons formellement la solution \mathbf{X}^ϵ en puissance de ϵ

$$\mathbf{X}^\epsilon(t) = \mathbf{X}_0(t) + \epsilon\mathbf{X}_1(t) + \epsilon^2\mathbf{X}_2(t) + \epsilon^3\mathbf{X}_3(t) + \dots \quad (1.22)$$

Puisque les conditions initiales sont nulles, on a $\mathbf{X}^\epsilon(0) = 0$ pour tout ϵ au voisinage de 0 et donc pour tout j , $\mathbf{X}_j(0) = 0$.

Par ailleurs, d'après (1.22) on a

$$\dot{\mathbf{X}}^\epsilon(t) = \dot{\mathbf{X}}_0(t) + \epsilon\dot{\mathbf{X}}_1(t) + \epsilon^2\dot{\mathbf{X}}_2(t) + \epsilon^3\dot{\mathbf{X}}_3(t) + \dots \quad (1.23)$$

$$R(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = -\alpha \sum_{k=0}^j \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{X}_k^T Q \mathbf{X}_{j-k} \end{bmatrix} \quad (\text{Produit de Cauchy}) \quad (1.24)$$

Ainsi en injectant (1.22) dans l'équation (1.21) et en réordonnant les termes selon ϵ^k on obtient

$$\sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j T_j(t) = B\epsilon u(t). \quad (1.25)$$

avec $T_j(t) = \dot{\mathbf{X}}_j - A\mathbf{X}_j - \alpha \sum_{k=0}^j \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{X}_k^T Q \mathbf{X}_{j-k} \end{bmatrix}$.

Remarque 1 (sur la convergence)

La convergence de ces développements (formels à ce stade) est nécessaire pour que le problème soit bien posé. Il existe des algorithmes de calcul du rayon de convergence (cf. [25] et [26]). Ici on a $|u| < \rho = \frac{K}{\alpha}$ où la constante K dépend seulement du problème linéaire¹. Nous ne rentrerons pas dans cette étude dans le cadre de de manuscrit.

1. et vaut $K = 4\|h_{\mathbf{X}}\|_{L^1} \kappa$ avec $\|h_{\mathbf{X}}\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}^+} \|h_{\mathbf{X}}(t)\|_{\mathbb{R}^2} dt$ et $\kappa = \int_{\mathbb{R}^+} \|e^{At}\|_{\mathbb{R}^2} dt$.

L'équation (1.25) se met sous la forme $\sum_{j \in \mathbb{N}} \epsilon^j T_j = 0$. Pour qu'elle soit vérifiée pour tout ϵ dans un voisinage de 0, chaque terme T_j doit être nul.

Cette écriture conduit à la suite de problèmes linéaires suivante :

– $j = 0$ donne l'équation $0 = 0$ (puisque le système est centré et la condition initiale est nulle).

– Pour $j = 1$

$$\dot{\mathbf{X}}_1 - A\mathbf{X}_1 = Bu. \quad (1.26)$$

avec $Bu = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u$

– Pour $j \geq 2$

$$\dot{\mathbf{X}}_j - A\mathbf{X}_j = \chi_j$$

avec

$$\chi_j = \alpha \sum_{k=0}^j \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{X}_k^T Q \mathbf{X}_{j-k} \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

En résumé $\mathbf{X}_0 = 0$ et on a à résoudre la suite de problèmes différentiels linéaires donnée par

$$\begin{cases} \forall j \geq 1 & \dot{\mathbf{X}}_j - A\mathbf{X}_j = \chi_j \\ \mathbf{X}_j(0) = 0 \end{cases} \quad (1.28)$$

avec les seconds membres

$$\begin{cases} \chi_1(t) = Bu(t) \\ \chi_{j \geq 2}(t) = \alpha \sum_{k=0}^j \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{X}_k^T(t) Q \mathbf{X}_{j-k}(t) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (1.29)$$

Les solutions sont $\forall j \in \mathbb{N}^*$

$$\mathbf{X}_j = \int_0^t e^{A(t-\tau)} \chi_j(\tau) d\tau. \quad (1.30)$$

Remarque 2

La solution est donc une suite de convolutions à travers χ_j .

Dans le domaine de Laplace, la suite de problèmes différentiels devient une suite algébrique de la forme

$$\mathcal{L}(\mathbf{X}_j) = Q\mathcal{L}(\chi_j) \quad (1.31)$$

avec $Q = (sI - A)^{-1}$ (cf. équation (1.14)). Cependant $\mathcal{L}(\chi_j)$ n'est pas simple à calculer, les produits dans le domaine temporel devenant des convolutions. Les séries de Volterra permettront de simplifier grandement ce problème.

En résumé, cette section a mis en valeur une méthode de résolution et de simulation d'un problème non linéaire :

1. Représentation d'état de l'équation d'équilibre (1.18)
2. Transformée de Laplace et calcul des fonctions de transfert

Ces outils sont les mêmes que ceux présentés dans la section 1.2.1. Mais ici, la suite de convolutions obtenue dans l'équation (1.31) ne peut pas être simulée à faible coût (pas de transformation bilinéaire pour obtenir une simulation simple). Les séries de Volterra qui seront utilisées dans le cadre de cette thèse répondent à ce problème et permettent de calculer le calculateur (équations (1.28) et (1.31)). C'est une généralisation de cette méthode d'approximation.

En effet, comme nous le verrons dans la prochaine section, la sortie d'un système définit par ses noyaux de Volterra consiste en une somme de multi-convolutions. Le travail de cette thèse, présenté dans les chapitres suivants, consiste à calculer les noyaux de Volterra de certains systèmes non linéaires et de les utiliser dans une méthode de simulation à faible coût pour un ordre de non-linéarité choisi. Tout d'abord, présentons les séries de Volterra et leurs propriétés.

1.3 Séries de Volterra de système à une entrée

1.3.1 Définition et propriétés

Les séries de Volterra ont été principalement utilisées pour résoudre des circuits électroniques non linéaires, ainsi que des équations différentielles ordinaires comprenant des non-linéarités régulières (cf. [7, 21, 41, 32]). Elles représentent la solution (*la sortie du système* en automatique) comme une somme infinie de *multi-convolutions* alimentée par l'excitation (*l'entrée du système*). C'est une extension du « filtrage linéaire » aux cas des « comportements non linéaires ».

Dans le cadre de cette thèse, les séries de Volterra sont utilisées sur des systèmes stationnaires causaux et stables (entrée bornée/sortie bornée).

Définition 2

Un système causal d'entrée f et de sortie y (cf. Fig. 1.4) est décrit par une série de Volterra de noyaux $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ si

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(\mathbb{R}^+)^n} h_n(\tau_{1:n}) f(t - \tau_1) \dots f(t - \tau_n) d\tau_{1:n}, \quad (1.32)$$

avec la notation $(\tau_{1:n}) = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ et $d\tau_{1:n} = d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_n$.

Remarque 3

La somme commence à $n = 1$ au lieu de $n = 0$ pour un système stationnaire à conditions initiales nulles, ce qui est toujours le cas dans ce manuscrit.

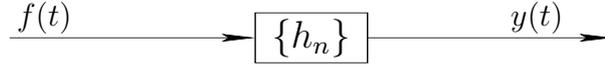


FIGURE 1.4 – Système d’entrée f et de sortie y décrit par une série de Volterra $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$.

On appelle h_n les noyaux de la série de Volterra. En effet ces noyaux de type convolutif (noyaux de convolution) généralisent la notion de réponse impulsionnelle. L’équation (1.32) peut être interprétée comme suit : pour $n = 1$, le terme est une *convolution linéaire classique* de telle sorte que h_1 est la *réponse impulsionnelle* de la contribution linéaire. Pour $n = 2$, le terme introduit une *contribution quadratique* de f sur la sortie y . Plus généralement, le terme d’ordre n est associé à une *non-linéarité homogène* d’ordre n qui prend en compte la mémoire du système à travers la « multi-convolution ».

De plus, comme dans le cas linéaire, des *noyaux de transfert* $H_n(s_{1:n})$ (notés en majuscules) peuvent être définis comme la transformée de Laplace des *réponses impulsionnelles généralisées* $h_n(\tau_{1:n})$ ($(s_{1:n}) = (s_1, \dots, s_n)$ sont les variables de Laplace) (cf. section 1.6.5).

Remarque 1 : Les séries de Volterra englobent : (a) les filtres linéaires ($h_n = 0$ pour $n \geq 2$); (b) les fonctions instantanées $y(t) = h(f(t))$ qui admettent un développement en série $h(f) = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n f^n$; (c) les combinaisons (somme, produit, cascade, cf. §1.3.2).

Remarque 2 : Pour le cas (b), $h_n(\tau_{1:n}) = \alpha_n \delta(\tau_{1:n})$ dans le domaine temporel (δ est la distribution de Dirac), et $H_n(s_{1:n}) = \alpha_n$ dans le domaine de Laplace.

Remarque 3 : Pour les entrées f nulles avant $t = 0$, l’équation (1.32) devient $y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[0,t]^n} h_n(\tau_{1:n}) f(t - \tau_1) \dots f(t - \tau_n) d\tau_{1:n}$. Une telle dynamique est celle d’un système à *conditions initiales nulles*. Cette limitation peut être supprimée en utilisant une définition plus générale des séries de Volterra (cf. [32]).

1.3.2 Lois d’interconnexion

Plusieurs méthodes sont disponibles pour calculer les noyaux de Volterra d’un système (cf. [18], [26] ou [32]). Des alternatives fondées sur les systèmes équivalents existent (cf. [21] et [41]) reposant sur les lois d’interconnexion. Ici, une méthode systématique est proposée (toujours basée sur les lois d’interconnexion) : le système annulateur.

Théorème 1

Soient K séries de Volterra de noyaux $\{a_n^k\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ avec $k \in [1, K]_{\mathbb{N}}$. Les systèmes d'entrée f et de sortie y définis respectivement dans les figures 1.5, 1.6 sont toujours décrits par une série de Volterra.

Combinaison linéaire Si $y(t) = \sum_{k=1}^K \alpha_k y_{a^k}(t)$, le noyau équivalent $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ est défini dans le domaine de Laplace par

$$C_n(s_{1:n}) = \sum_{k=1}^K \alpha_k A_n^k(s_{1:n}). \quad (1.33)$$

Combinaison multilinéaire Si $y(t) = \prod_{k=1}^K y_{a^k}(t) = M(y_{a^1}(t), y_{a^2}(t), \dots, y_{a^K}(t))$, où M est une fonction K -linéaire, le noyau équivalent $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ est défini dans le domaine de Laplace par

$$C_n(s_{1:n}) = \sum_{p \in \mathbb{N}^K, \widehat{p}=n}^K M(A_{p_1}^1(\sigma_{p_1}^1(s)), A_{p_2}^2(\sigma_{p_2}^2(s)), \dots, A_{p_K}^K(\sigma_{p_K}^K(s))) \quad (1.34)$$

avec $\widehat{p} = p_1 + \dots + p_n$, et $\sigma_p^k(s) = (s_{p_1+\dots+p_{k-1}+1}, s_{p_1+\dots+p_{k-1}+2}, \dots, s_{p_1+\dots+p_k})$.

Cascade avec un système linéaire La cascade d'un système $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ avec un système linéaire $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ ($b_n = 0$ pour $n \geq 2$) a un noyau équivalent défini par

$$C_n(s_{1:n}) = A_n(s_{1:n}) B_1(\widehat{s}_{1:n}), \quad (1.35)$$

avec la notation $\widehat{s}_{1:n} = s_1 + \dots + s_n$.

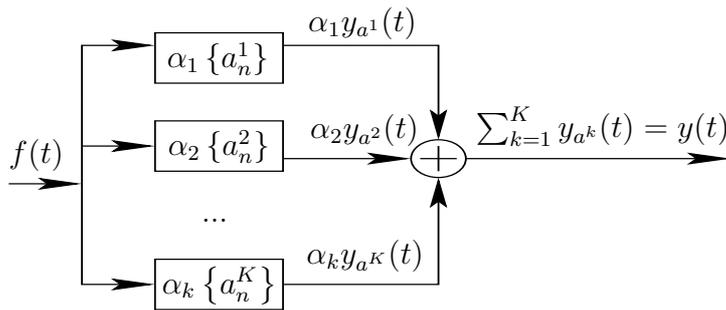


FIGURE 1.5 – Interconnexion : somme des sorties.

Remarque 4

Ces lois existent également dans le domaine temporel, celle de la cascade est plus complexe, avec une convolution et sera très utilisée. Pour cette raison,

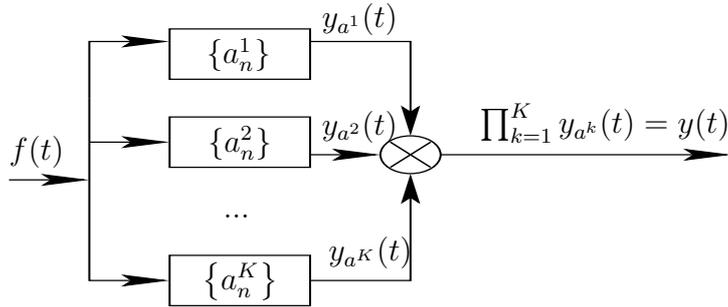


FIGURE 1.6 – Interconnexion : produit des sorties.



FIGURE 1.7 – Interconnexion : cascade d’un système de Volterra avec un système linéaire.

on préférera travailler dans le domaine de Laplace, comme présenté au début de ce chapitre.

Les démonstrations de ce théorème sont en annexe A.4 (cf. [21] ou [29]).

1.4 Solution en séries de Volterra de l’exemple

Pour le cas linéaire, nous savons que la sortie du système est définie par $y(t) = (h \star u)(t)$ où $h(t) = Ce^{At} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(t)$ (respectivement $Y(s) = \mathcal{L}(h)(s)\mathcal{L}(u)(s)$ avec $\mathcal{L}(h)(s) = (sI - A)^{-1}B$). En exprimant une de ces deux relations (dans le domaine temporel ou de Laplace) en temps discret, il est possible de trouver une structure de simulation rapide. En résumé, on calcule le calculateur (calcul de h puis de la récurrence pour le passage en temps discret).

Ici, la même chose sera réalisée pour les systèmes non linéaires, à savoir, les séries de Volterra vont calculer le calculateur pour chaque ordre de non-linéarité.

1.4.1 Système annulateur et calcul de noyaux

Le système annulateur est un moyen d’exploiter directement les lois d’interconnexion (cf. section 1.3.2) pour déterminer les équations linéaires satisfaites par chaque noyau de Volterra. Cette représentation graphique à l’aide d’un diagramme bloc en fait un outil très pratique pour établir les équations d’un noyau h_n en fonction des noyaux d’ordres inférieurs. Cette méthode est très proche de celle proposée par Georges [19] et présentée dans [18]. Hasler

([21] sections 3.3.2 et 3.3.4) réalise la même démarche grâce à des variables et des systèmes auxiliaires. D'autres méthodes de calcul des noyaux peuvent être trouvées par exemple dans [41], ou [18] et [30] pour des approches géométriques.

Définition 3

En supposant connus les noyaux $\{h_n\}$ du système qui à une entrée $u(t)$ donne en sortie la solution $\mathbf{X}(t)$, le système annulateur consiste à récrire l'équation d'équilibre en appliquant par blocs les opérateurs de cette dernière, la somme de tous les termes étant nulle à chaque instant t .

Soit, par exemple l'équation

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = f(\mathbf{X}, u) = A\mathbf{X}(t) + Bu(t) + \nu(\mathbf{X}, u) \quad (1.36)$$

où $\mathbf{X}(0) = 0$ et où ν est de valuation 2, i.e. ne comporte aucun terme linéaire.

Les lois d'interconnexions nous permettent d'écrire l'équation des noyaux

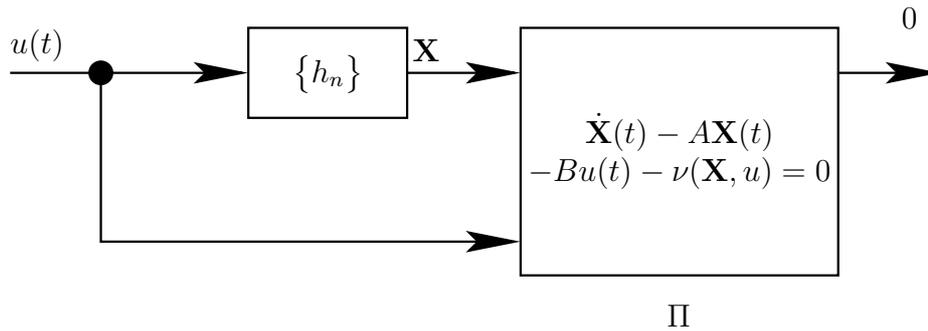


FIGURE 1.8 – Système annulateur de l'équation (1.36)

$\{h_n\}$ du système (1.36) représenté figure 1.8.

L'équation $w_1(t) + w_2(t) + w_3(t) = 0$ représentée figure 1.9 peut être réécrite en fonction des noyaux h_n . La première ligne du système représente une cascade entre le système $\{h_n\}$ et l'opérateur linéaire $\frac{d}{dt} - A$, on a alors $w_1(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{X}(t) - A\mathbf{X}(t)$. La deuxième consiste en une cascade entre $\{h_n\}$ et le système ν multilinéaire, d'où l'on peut déduire $w_2(t) = -\nu(\mathbf{X}, u)$. Enfin la troisième ligne définit $w_3(t) = -Bu(t)\delta(1, n)$, car B est un opérateur linéaire, ce terme est donc nul pour $n \geq 2$.

Application à l'exemple introductif

Le système annulateur de l'exemple introductif

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) + \alpha y^2(t) = f(t) \quad (1.37)$$

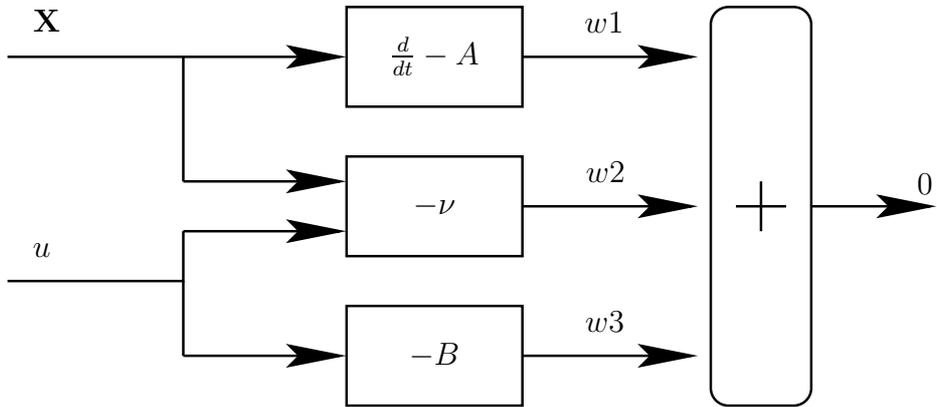


FIGURE 1.9 – Zoom sur le bloc II.

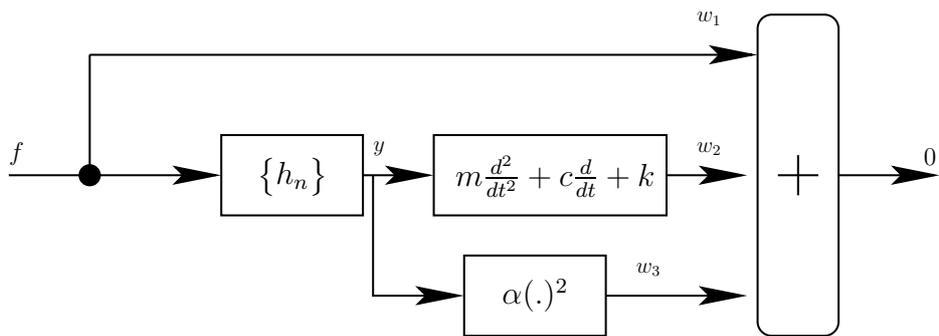


FIGURE 1.10 – Système annulateur de l'équation (1.37)

est représenté figure 1.10.

Suivant le principe énoncé précédemment, l'équation $w_1(t) + w_2(t) + w_3(t) = 0$ peut être réécrite comme un système de Volterra d'entrée f , fonction des noyaux H_n .

- $w_1(t) = f(t)$
- $w_2(t) = m \frac{d^2}{dt^2} y(t) + c \frac{d}{dt} y(t) + ky(t)$
- $w_3(t) = \alpha y^2(t)$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ les systèmes de Volterra dans le domaine de Laplace correspondants sont respectivement

- $A_n(s) = -\delta_{1,n}$ où $\delta_{1,n}$ est le symbole de Kronecker. En effet, l'entrée passe dans un opérateur linéaire (qui devient donc nul pour $n \geq 2$) à savoir une multiplication par 1.
- $B_n(s_{1:n}) = m \widehat{s_{1:n}}^2 H_n(s_{1:n}) + c \widehat{s_{1:n}} H_n(s_{1:n}) + k H_n(s_{1:n})$ en vertu de loi d'interconnexion d'une cascade entre un système de Volterra et un système linéaire.
- $C_n(s_{1:n}) = \alpha \sum_{p=1}^{n-1} H_p(s_{1:p}) H_{n-p}(s_{p+1:n})$ en vertu de la loi d'interconnexion du produit des sorties de deux système de Volterra.

L'équation des noyaux telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall (s_{1:n}) \in \mathbb{C}_0^{+n}$, $A_n(s_{1:n}) + B_n(s_{1:n}) + C_n(s_{1:n}) = 0$ est donc

$$\begin{aligned} & m \widehat{s_{1:n}}^2 H_n(s_{1:n}) + c \widehat{s_{1:n}} H_n(s_{1:n}) + k H_n(s_{1:n}) - \delta_{1,n} 1(s_{1:n}) \\ &= -\alpha \sum_{p=1}^{n-1} H_p(s_{1:p}) H_{n-p}(s_{p+1:n}) \end{aligned}$$

qui conduit à

$$H_n(s_{1:n}) = Q(s_{1:n}) E_n(s_{1:n}) \quad (1.38)$$

où E_n est une fonction des H_p avec $p < n$.

1.4.2 Réalisation faible coût pour la simulation

Principe

Une fois le système d'équations des noyaux établi, il est possible de réaliser l'approximation numériquement jusqu'à un ordre donné. Pour ce faire nous n'utiliserons pas la définition (1.32) de la sortie d'un système représenté par une série de Volterra. En effet, la réalisation des multi-convolutions est assez coûteuse en terme de temps de calcul.

La méthode choisie consiste en une identification des noyaux de Volterra à une structure basée sur des filtres ainsi que des sommes et produits instantanés de la sortie de ces filtres. Cette identification sera détaillée de manière plus exhaustive dans la section 2.5.

Simulation de l'exemple

La résolution de l'équation (1.38) pour $n = 1$ donne le même résultat que pour le système linéaire

$$ms_1^2 H_1(s_1) + cs_1 H_1(s_1) + kH_1(s_1) - 1(s_1) = 0. \quad (1.39)$$

Pour $n = 2$ on trouve

$$m\widehat{s_{1:2}}^2 H_2(s_{1:2}) + c\widehat{s_{1:2}} H_2(s_{1:2}) + kH_2(s_{1:2}) = -\alpha H_1(s_1)H_1(s_2). \quad (1.40)$$

Les deux premiers noyaux dans le domaine de Laplace sont donc définis par

$$H_1(s_1) = Q(s_1) = \frac{1}{ms_1^2 + cs_1 + k} \quad (1.41)$$

$$H_2(s_{1:2}) = -\alpha Q(\widehat{s_{1:2}})Q(s_1)Q(s_2) = \frac{-\alpha H_1(s_1)H_1(s_2)}{m\widehat{s_{1:2}}^2 + c\widehat{s_{1:2}} + k}. \quad (1.42)$$

En effet, le système représenté figure 1.11 peut être identifié grâce aux lois d'interconnexion. $w(t)$ est le signal issu du produit des sorties de deux systèmes linéaires. Ce signal est ensuite l'entrée d'une cascade avec un troisième système linéaire. Les noyaux de ce système sont donc tous nuls sauf

$$H_2(s_1, s_2) = A_1(s_1)B_1(s_2)C_1(s_1 + s_2).$$

Dans notre exemple, $A_1 = B_1 = C_1 = Q$. Ces deux noyaux peuvent alors

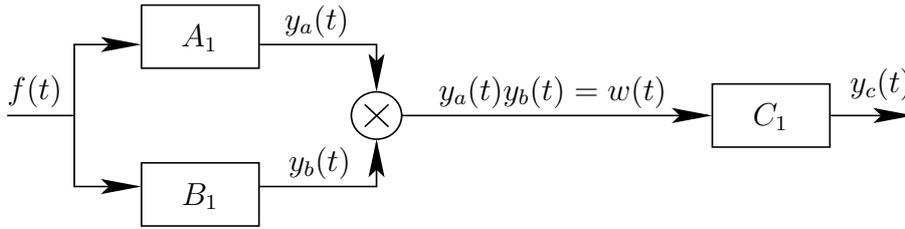


FIGURE 1.11 – Système de Volterra élémentaire homogène d'ordre 2.

être identifiés à une série de filtres représentée sur la figure 1.12.

Les résultats de la simulation sont présentés figure 1.13. L'entrée du système est un cosinus balayé en fréquence de 150 à 1125 Hz. La première courbe est la réponse linéaire correspondant à la sortie du premier filtre, ce signal est sinusoïdal à fréquence constante.

La deuxième courbe révèle la sortie du deuxième filtre correspondant à la réponse quadratique, la courbe n'est plus sinusoïdale (plusieurs fréquences,

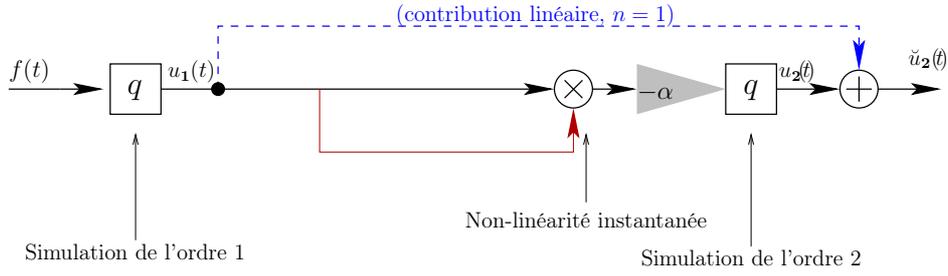


FIGURE 1.12 – Bloc-diagramme d’une simulation tronquée à l’ordre 2 de l’exemple : la flèche pointillée isole la dynamique linéaire ($n=1$) ; les carrés représentent les filtres et le triangle un gain.

non centrée en zéro). La troisième courbe est la somme des deux réponses précédentes, la sortie de l’ordre 2 étant assez faible, la forme d’onde est très proche de celle de la réponse linéaire. Cependant comme le révèle la quatrième courbe, la transformée de Fourier de la réponse linéaire ne présente qu’un pic associé à la fréquence de résonance du système (fonction de la masse et de la raideur). La deuxième courbe qui représente le spectre du signal total révèle la présence d’un second pic à la fréquence double du premier comme le montrent les spectrogrammes de la figure 1.14. Ce second pic est une conséquence de la prise en compte d’une non-linéarité quadratique qui génère des harmoniques à la fréquence double de la fréquence de résonance du système.

1.5 Formulaire

Solutions	Domaine temporel	Domaine de Laplace
Représentation d’état	$\dot{\mathbf{X}} = A\mathbf{X} + Bu$ $x = C\mathbf{X} + Du$	$s\mathcal{L}(\mathbf{X}) = A\mathcal{L}(\mathbf{X}) + B\mathcal{L}(u)$ $\mathcal{L}(x) = C\mathcal{L}(\mathbf{X}) + D\mathcal{L}(u)$
Système linéaire	$\mathbf{X}(t) = (h_{\mathbf{X}} \star u)(t)$ $y(t) = ((Ch_{\mathbf{X}} + D\delta) \star u)(t)$	$\mathcal{L}(\mathbf{X})(s) = H_{\mathbf{X}}(s)\mathcal{L}(u)(s)$ $\mathcal{L}(y) = (CH_{\mathbf{X}}(s) + D)\mathcal{L}(u)(s)$
Fonction de transfert	$h_{\mathbf{X}}(t) = 1_{\mathbb{R}^+}(t)e^{At}B$	$H_{\mathbf{X}} = (sI - A)^{-1}B$
Système non linéaire	$x_j = C \int_0^t e^{A(t-\tau)} \chi_j(\tau) d\tau$ $\chi_1 = Bu$ $\chi_{j \geq 2} = R(\mathbf{X}_k^T, \mathbf{X}_{j-k})$	$\mathcal{L}(x_j) = C(sI - A)^{-1}\mathcal{L}(\chi_j)$ $\mathcal{L}(\chi_1) = B\mathcal{L}(u)$ $\mathcal{L}(\chi_{j \geq 2}) = R(\mathcal{L}(\mathbf{X}_k^T), \mathcal{L}(\mathbf{X}_{j-k}))$

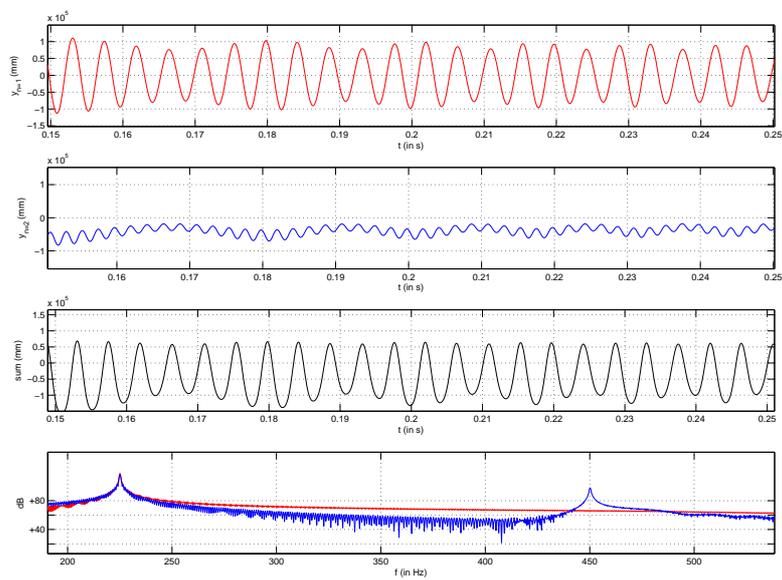


FIGURE 1.13 – Résultats de la simulation : les trois premières courbes représentent le déplacement $y(t)$ à l'ordre 1 (réponse linéaire) l'ordre 2 et la somme des deux. La quatrième est le spectre du signal à l'ordre 1 superposé au spectre du signal total.

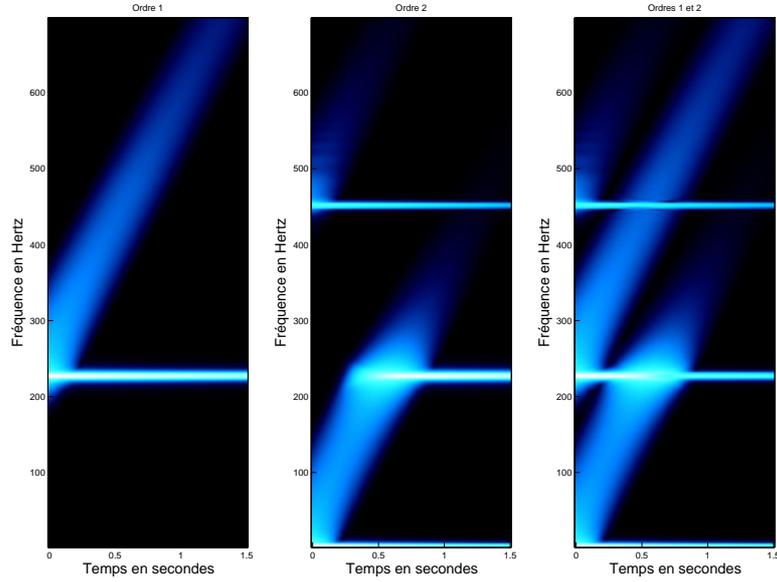


FIGURE 1.14 – Spectrogrammes du résultat de la simulation pour les réponses linéaire, quadratique et la somme des deux.

1.6 Support théorique pour l'application des séries de Volterra

1.6.1 Définition générale

Définition 4

La sortie d'un système représenté par une série de Volterra peut s'écrire (cf. [24] et [32] par exemple)

$$u(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \int_{\mathbb{R}_+^n} h_n(t; \tau_{1:n}) f(\tau_1) \dots f(\tau_n) dt_1 \dots d\tau_n$$

où les $h_n(t; \tau_{1:n})$ sont des noyaux de Volterra instationnaires, i.e. des noyaux représentant le système qui dépendent du temps.

Remarque 5

Le noyau h_1 est à ce titre une fonction de transfert (cf. section 1.2).

Définition 5

Soit u la solution pour l'excitation f . Soit T_t la translation temporelle de vecteur te_t . Le problème est invariant dans le temps si $T_t u$ est la solution

pour l'excitation $T_t f$ et dans ce cas, il existe \tilde{h}_n tel que

$$h_n(t; \tau_{1:n}) = \tilde{h}_n(t - \tau_{1:n})$$

A l'exception du chapitre 5, tous les systèmes étudiés sont stationnaires. Les noyaux de Volterra associés seront notés $h_n(t_{1:n})$.

Remarque 6

Il est possible d'utiliser les séries de Volterra pour résoudre un problème avec des conditions aux limites non homogènes. Ces dernières deviennent des entrées du système. Un exemple basé sur le travail du chapitre 2 est présenté en annexe A.5.

1.6.2 Paramétrage en espace

Un système de sortie $u(x, t)$ peut également représenté par une série de Volterra. Les noyaux de Volterra sont alors paramétrés en espace et notés $h_n^{(x)}(t_1, \dots, t_n)$. Pour résoudre le problème, il est nécessaire de pouvoir appliquer tout opérateur rencontré dans l'équation d'équilibre. Dans le cadre de cette thèse nous nous limiterons à l'intégration et à la dérivation par rapport à x .

Soit

$$u(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \int_{\mathbb{R}_+^n} h_n^{(x)}(t_{1:n}) f(t_1) \dots f(t_n) dt_1 \dots dt_n,$$

si $\forall x \in \Omega$, $h_n^{(x)}(t_{1:n})$ est intégrable sur \mathbb{R}_+^n , si $\forall t \in \mathbb{R}_+^n$, $h_n^{(x)}(t_{1:n})$ est de classe \mathcal{C}^1 et $\frac{\partial}{\partial x} h_n^{(x)}(t_{1:n})$ est continue par morceaux, et si $\forall (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+^n$, il existe une fonction ϕ intégrable sur \mathbb{R}_+^n telle que $\|\frac{\partial}{\partial x} h_n^{(x)}(t_{1:n})\| \leq \phi(t_{1:n})$, la règle de Leibniz (cf. [15], [16]) permet d'écrire

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) &= \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\mathbb{R}_+^n} h_n^{(x)}(t_{1:n}) f(t_1) \dots f(t_n) dt_1 \dots dt_n \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{\partial}{\partial x} h_n^{(x)}(t_{1:n}) f(t_1) \dots f(t_n) dt_1 \dots dt_n. \end{aligned}$$

De même, le théorème de Fubini (cf. [15]), permet d'écrire si $h_n^{(x)}(t_{1:n})$ est intégrable sur $\Omega \times \mathbb{R}^{+n}$, $\forall (a, b) \in \Omega^2$

$$\begin{aligned} \int_a^b u(x, t) dx &= \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \int_a^b \int_{\mathbb{R}_+^n} h_n^{(x)}(t_{1:n}) f(t_1) \dots f(t_n) dt_1 \dots dt_n dx \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \int_{\mathbb{R}_+^n} \int_a^b h_n^{(x)}(t_{1:n}) dx f(t_1) \dots f(t_n) dt_1 \dots dt_n. \end{aligned}$$

1.6.3 Convergence

Définition 6

Soit une série de Volterra définie par ses noyaux h_n . La fonction limitante de la série est définie par

$$\phi_h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \|h_n\|_1 x^n \quad (1.43)$$

où la norme- L^1 est définie par (cf. [21]) $\|h_n\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |h_n(\tau_{1:n})| d\tau_{1:n}$.

Théorème 2

Soit ρ le rayon de convergence de la fonction limitante ϕ_h , si l'entrée u est telle que $|u(t)| < \rho$ alors la série de Volterra converge et la sortie y est telle que $|y(t)| \leq \phi_h(\sup_{t \in \mathbb{R}} |u(t)|)$.

Les lecteurs souhaitant plus de résultats sur la convergence peuvent consulter les références [7, 25, 32].

La convergence des séries de Volterra ne sera pas étudiée dans cette thèse : en pratique, des troncatures à ordre faible de la série donnent de bonnes approximations, si la non-linéarité n'est pas activée par des « entrées trop importantes », comme mentionné dans la section 2.8.

1.6.4 Non-unicité des noyaux

Soit π une permutation, tout système décrit par les noyaux de Volterra $h_n(t_1, \dots, t_n)$ est invariant par la permutation des arguments, i.e. les noyaux $h_n(t_{\pi(1)}, \dots, t_{\pi(n)})$ décrivent le même système.

Il est possible de définir des classes particulières de noyaux telles que pour un système donné, il n'existe qu'une expression des noyaux possibles (cf. [21], [32] et [41]).

Définition 7

Soit $\mathcal{P}(n)$ l'ensemble des permutations des entiers $(1, \dots, n)$ vers $(1, \dots, n)$. Les noyaux sont symétriques, si et seulement si pour toute permutation $\pi \in \mathcal{P}(n)$ on a

$$h_n(t_1, \dots, t_n) = h_n(t_{\pi(1)}, \dots, t_{\pi(n)}).$$

Définition 8

Les noyaux symétriques h_n^S d'un système représenté par les noyaux h_n sont définis par

$$h_n^S(t_1, \dots, t_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \mathcal{P}(n)} h_n(t_{\pi(1)}, \dots, t_{\pi(n)}).$$

Définition 9

Les noyaux d'un système sont triangulaires si

$$h_n(t_1, \dots, t_n) = 0 \text{ sauf si } t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_n.$$

Rugh [41] a également défini les noyaux réguliers d'un système basés sur les noyaux triangulaires.

Définition 10

Si les noyaux $h_n^{tri}(t_1, \dots, t_n)$ sont triangulaires, les noyaux réguliers sont définis par

$$h_n^{reg}(t_1, \dots, t_n) = h_n^{tri}(t_1 + \dots + t_n, t_2 + \dots + t_n, \dots, t_n).$$

Remarque 7

Ces définitions particulières des noyaux ne seront pas utilisées dans le cadre de cette thèse.

1.6.5 Transformée de Laplace**Définition 11**

Comme dans le cas linéaire (cf. section 1.2.1), des noyaux de transfert $H_n(s_{1:n})$ (notés en majuscules) peuvent être définis comme la transformée de Laplace des réponses impulsionnelles généralisées $h_n(\tau_{1:n})$ ($(s_{1:n}) = (s_1, \dots, s_n)$ sont les variables de Laplace). Pour un système causal amorti (i.e. stable), elles sont définies par

$$\forall (s_{1:n}) \in \mathcal{D} \subset (\mathbb{C}_0^+)^n, \quad H_n(s_{1:n}) = \int_{(\mathbb{R}^+)^n} h_n(\tau_{1:n}) e^{-(s_1\tau_1 + \dots + s_n\tau_n)} d\tau_{1:n},$$

où \mathcal{D} est le domaine de définition.

Pour un système causal strictement stable l'intégrale converge sur la bande de convergence. Comme mentionné section 1.2.1 pour les systèmes linéaires, H_n est analytique sur \mathbb{C}_0^+ , l'ensemble des nombres complexes à partie réelle strictement positive (cf. [3, (29.1.2)] et [21] pour plus de détails).

1.6.6 Lois d'interconnexion

La résolution d'équation différentielles au dérivées partielles implique l'utilisation de noyaux paramétrés en espace. L'établissement des lois d'interconnexion dépend d'hypothèses supplémentaires posées sur la paramétrisation spatiale du noyau.

Les lois d'interconnexions présentées section 1.3.2 pour les équations différentielles ordinaires, deviennent pour les équations aux dérivées partielles

Combinaison linéaire

$$C_n^{(x)}(s_{1:n}) = \sum_{k=1}^K \alpha_k A_n^{(x)k}(s_{1:n}). \quad (1.44)$$

Combinaison multilinéaire

$$C_n^{(x)}(s_{1:n}) = \sum_{p \in \mathbb{N}^K, \widehat{p}=n}^K M(A_{p_1}^{(x)1}(\sigma_p^1(s)), A_{p_2}^{(x)2}(\sigma_p^2(s)), \dots, A_{p_k}^{(x)k}(\sigma_p^k(s))) \quad (1.45)$$

avec $\widehat{p} = p_1 + \dots + p_n$, et $\sigma_p^k(s) = (s_{p_1+\dots+p_{k-1}+1}, s_{p_1+\dots+p_{k-1}+2}, \dots, s_{p_1+\dots+p_k})$.

Cascade avec un système linéaire

$$C_n^{(x)}(s_{1:n}) = A_n^{(x)}(s_{1:n}) B_1^{(x)}(\widehat{s_{1:n}}), \quad (1.46)$$

avec la notation $\widehat{s_{1:n}} = s_1 + \dots + s_n$.

1.7 Conclusion

Ce chapitre a permis de mettre en évidence la démarche appliquée dans le cadre de cette thèse pour approximer un modèle faiblement non linéaire grâce aux séries de Volterra. La suite de ce travail va consister à appliquer cette méthode à des systèmes plus complexes, à savoir un modèle de corde et un modèle de poutre, qui consistent en des problèmes aux limites modélisés par des équations aux dérivées partielles (EDP). Cependant, la démarche restera identique :

1. Représentation sous la forme d'un système E/S de la solution en série de Volterra d'un problème centré
2. Écriture du système annulateur de la série
3. Calcul des noyaux de transfert de Volterra pour le problème posé
4. Décomposition des noyaux de transfert en systèmes élémentaires réalisables
5. Simulation faible coût dans le domaine temporel
6. Étude des résultats.

Cette démarche présente de nombreux avantages pour l'implémentation numérique de la simulation, tout d'abord des améliorations au niveau du calcul et des résultats de la synthèse, pour la prise en compte de certains

phénomènes non linéaires. En effet, la méthode de simulation permet d'éviter les phénomènes de repliement spectral tout en gardant une fréquence d'échantillonnage constante. Les simulations sont peu coûteuses au niveau temps de calcul et prennent en compte l'effet mémoire et les phénomènes non linéaires ce qui aura une importance sur la perception de la synthèse sonore. De plus, elles reposent sur des bases similaires à celle de *Modalys* (logiciel de synthèse sonore par modèles physiques développé par l'équipe Acoustique Instrumentale de l'IRCAM) qui dispose d'optimisations et d'interfaces permettant le calcul en temps réel (temps de calcul inférieur à la durée du son produit).

Chapitre 2

Modèles de corde de Kirchhoff et de Kirchhoff-Carrier

2.1 Introduction

Ce chapitre contient les résultats publiés dans [29].

Dans ce chapitre, deux modèles non linéaires de corde amortie sont résolus en utilisant les séries de Volterra (cf. [24, 23]). Cette méthode permet de calculer des solutions analytiques et numériques quel que soit le type d'excitation.

Les modèles physiques des cordes sont nombreux. Les premières recherches sur l'équation du mouvement d'une corde apparaissent au XVIIIème siècle avec les travaux de d'Alembert [13] et d'Euler [17] qui ont respectivement écrit les deux équations différentielles aux dérivées partielles linéaires pour les petites vibrations d'une corde et le déplacement transverse d'une barre (cf. [45]). Au XIXème siècle Kirchhoff a établi un modèle unidimensionnel de corde idéalement souple en incluant une non-linéarité due à la variation de tension [31]. Ce modèle a été repris dans le travail de Carrier [11] à partir duquel beaucoup de modèles ont été établis dans la seconde moitié du XXème siècle. Par exemple, Anand [4] a étudié les vibrations transverses non planes en négligeant les ondes longitudinales. D'un autre côté, Narasimha [37] précise que la composante longitudinale de la dynamique ne peut être négligée même pour des petites amplitudes. Ces travaux ont été repris par Watzky [48] dans avec un modèle tridimensionnel de corde non linéaire rigide. Cette généralisation comprend un couplage avec la torsion et permet l'introduction de l'inharmonicité en utilisant les hypothèses de comportement élastique linéaire. D'autres modèles et résultats expérimentaux peuvent être également trouvés dans [46].

Ce chapitre consiste en la présentation des deux modèles. La démarche complète sera introduite en détail pour le premier modèle, i.e. le calcul des noyaux, la projection modale puis l'identification d'une structure de simulation. La même démarche sera appliquée au second modèle où seule l'expression de la non-linéarité change. Les résultats des simulations seront alors présentés et comparés.

2.2 Définition du modèle de Kirchhoff, excitation et conditions aux limites

2.2.1 Modèle

Considérons le déplacement $u(x, t)$ d'une corde parfaitement souple (figure 2.1) de longueur L [m], de tension initiale T_0 [N] et de section circulaire faible de rayon R [m]. Le matériau de la corde a pour propriétés, une masse volumique ρ [kg.m⁻³] et un module de Young E [Pa]. Un amortissement fluide *standard* δ [s⁻¹] introduit par la force transverse massique $-\delta \frac{\partial u}{\partial t}$, ainsi qu'un amortissement structurel κ [m².s⁻¹] du au terme $+\kappa \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}$. Ces amortissements représentent les pertes thermoélastiques et la viscoélasticité [12].

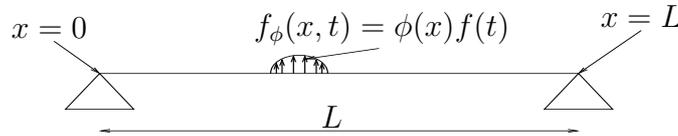


FIGURE 2.1 – Caractéristiques de la corde

La corde est au repos au temps $t = 0$, le déplacement transverse est noté $u(x, t)$ pour tout $(x, t) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^+$ avec $\Omega =]0, L[$ et $\overline{\Omega} = [0, L]$. Elle est excitée par la *force massique* transverse $f_\phi(x, t) = \phi(x) f(t)$ où ϕ est positive et distribue spatialement la force totale $f(t)$, tel que

$$\rho A \int_{\Omega} \phi(x) dx = 1 \quad \text{avec } A = \pi R^2. \quad (2.1)$$

L'équation du Kirchhoff modélise les vibrations transverses de la corde [31]. Si les amortissement *fluides* et *structurels* sont inclus, elle est définie par

$$\forall (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+^*, \quad \ddot{u} + \delta \dot{u} - \kappa \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} = \left[c^2 + b \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f_\phi,$$

où $c = \sqrt{\frac{T_0}{\rho A}}$ est la célérité de l'onde [m.s^{-1}] et $b = \frac{E}{2\rho L}$ est le coefficient de non-linéarité [m.s^{-2}] qui prend en compte la variation de tension. Ce modèle repose sur trois hypothèses [20] : **(H1)** les vibrations transverses restent dans un plan ; **(H2)** la corde est idéalement souple (équation du second ordre) ; **(H3)** les effets non linéaires sont dus à une variation globale de la longueur.

Deux types de conditions aux limites seront étudiées pour ce modèle :

La première **(B1)** est une conditions de Dirichlet homogène, i.e. la corde a un déplacement nul aux extrémités :

$$\forall(x, t) \in \{0; L\} \times \mathbb{R}^+, \quad u(x, t) = 0. \quad (2.2)$$

La condition aux limites **(B2)** est définie par

$$\forall(x, t) \in \{0; L\} \times \mathbb{R}^+, \quad u(x, t) = u_x(t), \quad (2.3)$$

où u_0 et u_L représentent des excitations. Ces excitations sont des déplacements (conditions de Dirichlet non homogènes) mais pourraient être des forces ($\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = u_x(t)$ pour $(x, t) \in \{0; L\} \times \mathbb{R}^+$), ou un mélange des deux. Ces choix ne modifient pas la méthode proposée (basée sur les noyaux multi-index cf. annexe A.5) mais uniquement les solutions. Ces conditions **(B2)** permettent de simuler une corde connectée à un chevalet ou plus généralement à un autre système mécanique, à ses extrémités.

Pour les cas étudiés ici, la corde est supposée au repos pour tout $t \leq 0$. Ainsi les conditions initiales sont nulles

$$\forall(x, t) \in \Omega \times \{0\}, k \in \{0; 1\}, \quad \frac{\partial^k u}{\partial t^k}(x, t) = 0. \quad (2.4)$$

2.2.2 Adimensionnement

Les changements de variables et les fonctions donnés dans le tableau 2.1 définissent les modèles **(M1, M2, M3)** sur $\tilde{\Omega} =]0, 1[$:

(M1) ≡ (NL1, B1) Corde encastrée avec une variation globale de tension :

$$\begin{aligned} \forall(\tilde{x}, \tilde{t}) \in \tilde{\Omega} \times \mathbb{R}_+^* & \quad \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{t}^2} + \alpha \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} - \beta \frac{\partial^3 \tilde{u}}{\partial \tilde{t} \partial \tilde{x}^2} = \left[1 + \epsilon \int_0^1 \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} \right)^2 d\tilde{x} \right] \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} \\ \forall(\tilde{x}, \tilde{t}) \in \{0; 1\} \times \mathbb{R}_+^* & \quad \tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{t}) = 0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\forall(\tilde{x}, \tilde{t}) \in \tilde{\Omega} \times \{0\}, \quad \tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{t}) = 0 \text{ et } \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}}(\tilde{x}, \tilde{t}) = 0. \quad (2.7)$$

(M2) ≡ (NL1, B2) Le même modèle de corde avec des conditions aux limites

dynamiques :

$$\forall(\tilde{x}, \tilde{t}) \in \tilde{\Omega} \times \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{t}^2} + \alpha \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} - \beta \frac{\partial^3 \tilde{u}}{\partial \tilde{t} \partial \tilde{x}^2} = \left[1 + \epsilon \int_0^1 \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} \right)^2 d\tilde{x} \right] \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \tilde{f}_{\tilde{\phi}}, \quad (2.8)$$

$$\forall(\tilde{x}, \tilde{t}) \in \{0; 1\} \times \mathbb{R}_+^*, \quad \tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{t}) = \tilde{u}_{\tilde{x}}(\tilde{t}), \quad (2.9)$$

$$\forall(\tilde{x}, \tilde{t}) \in \tilde{\Omega} \times \{0\}, \quad \tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{t}) = 0 \text{ et } \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}}(\tilde{x}, \tilde{t}) = 0. \quad (2.10)$$

(M3) ≡ (NL2, B1) Corde encastree avec variation locale de tension :

$$\forall(\tilde{x}, \tilde{t}) \in \tilde{\Omega} \times \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{t}^2} + \alpha \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} - \beta \frac{\partial^3 \tilde{u}}{\partial \tilde{t} \partial \tilde{x}^2} = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left[\frac{(1 - \frac{2\epsilon}{\eta}) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}}}{\sqrt{1 + \eta \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} \right)^2}} + \frac{2\epsilon}{\eta} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} \right] + \tilde{f}_{\tilde{\phi}}, \quad (2.11)$$

$$\forall(\tilde{x}, \tilde{t}) \in \{0; 1\} \times \mathbb{R}_+^*, \quad \tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{t}) = 0, \quad (2.12)$$

$$\forall(\tilde{x}, \tilde{t}) \in \tilde{\Omega} \times \{0\}, \quad \tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{t}) = 0 \text{ et } \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}}(\tilde{x}, \tilde{t}) = 0. \quad (2.13)$$

Dimensionné		Adimensionné	
géométrie	constantes physiques	variables / coefficients	fonctions
$L = 1.8 \text{ m}$	$\rho = 7800 \text{ Kg m}^{-3}$	$\tilde{x} = \frac{x}{L}, \quad \tilde{t} = \frac{tc}{L}$	$\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{t}) = \frac{u(\tilde{x}L, \frac{\tilde{t}L}{c})}{U^*}$
$R = 1.5 \text{ mm}$	$E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$	$\alpha = \frac{\delta L}{c} = 5.45 \cdot 10^{-2}$	$\tilde{\phi}(\tilde{x}) = \rho \pi R^2 L \phi(\tilde{x}L)$
Déplacement de référence :	$\delta = 3 \text{ s}^{-1}$	$\beta = \frac{\kappa}{cL} = 2.81 \cdot 10^{-5}$	$\tilde{f}(\tilde{t}) = \frac{L f(\frac{\tilde{t}L}{c})}{\rho \pi R^2 c^2 U^*}$
	$\kappa = 0.01 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$	$\epsilon = \frac{E(U^*)^2}{2\rho(Lc)^2} = 2.27 \cdot 10^{-4}$	$\tilde{f}_{\tilde{\phi}}(\tilde{x}, \tilde{t}) = \tilde{\phi}(\tilde{x}) \tilde{f}(\tilde{t})$
$U^* = R$	$T_0 = 2161 \text{ N}$	$\eta = \left(\frac{U^*}{L} \right)^2 = 6.94 \cdot 10^{-7}$	$\tilde{u}_{\tilde{x}}(\tilde{t}) = \frac{u_{\tilde{x}L}(\frac{\tilde{t}L}{c})}{U^*}$

TABLE 2.1 – Changements de variables, de fonctions et coefficients adimensionnés (l'équation 2.1 devient $\int_0^1 \tilde{\phi}(\tilde{x}) d\tilde{x} = 1$). Les valeurs proposées sont utilisées dans la section 2.8 : la corde est en acier [5, 1]; δ , κ , et T_0 sont choisis afin d'avoir un son amorti réaliste de fréquence fondamentale $f = \frac{c}{2L} = 55 \text{ Hz}$ avec $c = \sqrt{\frac{T_0}{\rho A}}$.

Le calcul des noyaux et la simulation du modèle **(M2)** sont présentés en annexe A.5. Par souci de lisibilité, **les tildes seront omises dans la suite de ce chapitre.**

2.3 Établissement de l'équation des noyaux

Dans cette section, le déplacement $u(x, t)$ de la corde gouverné par **(M1)** et provoqué par la force f à partir de $t = 0$, est résolu. La distribution spatiale

ϕ est considérée comme une donnée *a priori* du problème. Dans la section 2.3.1, la série de Volterra qui relie f à u est définie. Dans la section 2.4, les noyaux de la série sont résolus et des expressions explicites sont données. La section 2.5 permet l'identification de structures composées de filtres linéaires, sommes et produits, à partir desquels une simulation numérique est obtenue.

2.3.1 Système annulateur

Soit le déplacement $u(x, t)$ la sortie d'un système (au sens des automatismes) d'entrée f . Un système non linéaire est défini, qui dépend de la variable spatiale x . Ainsi, la série de Volterra correspondante a des noyaux paramétrés par x notés $h_n^{(x)}$ (cf. figure 2.2). La solution est représentée par (cf. section 1.6.1)

$$\forall (x, t) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^+, \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[0, t]^n} h_n^{(x)}(\tau_{1:n}) f(t - \tau_1) \dots f(t - \tau_n) d\tau_{1:n}. \quad (2.14)$$

Le lecteur remarquera que grâce à la remarque 3 dans la section 1.3.1, cette

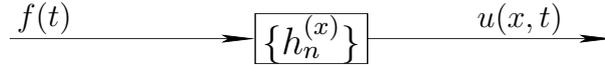


FIGURE 2.2 – Système de Volterra représentant la solution $u(x, t)$ de (M1).

solution satisfait naturellement l'équation (2.7).

2.3.2 Équation des noyaux

L'équation (2.5) nécessite que les noyaux $h_n^{(x)}$ satisfont une équation dans le domaine $\Omega \times \mathbb{R}_*^+$. Cette équation peut être obtenue dans le domaine de Laplace en utilisant les lois d'interconnexion (cf. sections 1.3.2 et 1.6.6).

De manière similaire à l'exemple présenté section 1.4, le bloc-diagramme de la figure 2.3Ⓐ transforme l'équation (2.5) en $w_a(x, t) + w_b(x, t)w_c(x, t) + w_d(x, t) = 0$, où $w_a = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial t} - (1 + \beta \frac{\partial}{\partial t}) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $w_b = -\epsilon \int_0^1 (\frac{\partial u}{\partial x})^2 dx$, $w_c = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $w_d(x, t) = \phi(x)f(t)$, et où u est représenté par l'équation (2.14). Chaque système qui relie f à $w_{\{a,b,c,d\}}$ peut être représenté par une série de Volterra (cf. figure 2.3Ⓓ), dont les noyaux peuvent être déduits des lois d'interconnexion dans le domaine de Laplace, comme suit :

Bloc (Va) : dans le domaine de Laplace, l'opérateur $\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial}{\partial t} - (1 + \beta \frac{\partial}{\partial t}) \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ devient $s^2 + \alpha s - (1 + \beta s) \frac{\partial^2}{\partial x^2}$. Ainsi en utilisant l'équation (1.35), la

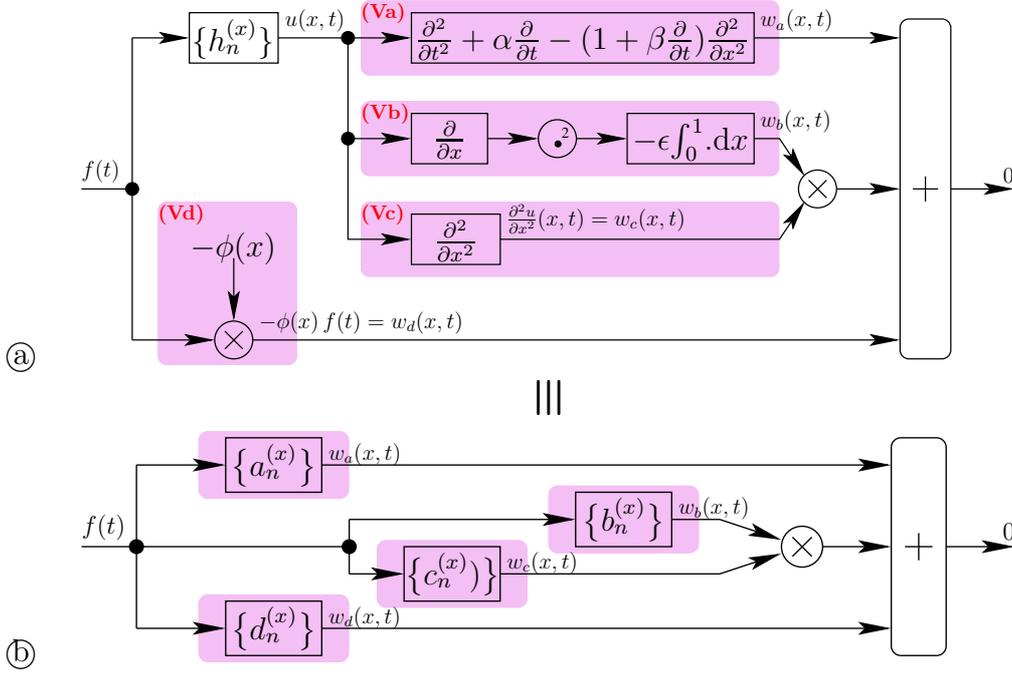


FIGURE 2.3 – Bloc-diagramme équivalent représentant l'équation (2.5).

cascade de $\{H_n^{(x)}\}$ et de cet opérateur linéaire définit la série de Volterra $\{A_n^{(x)}\}$ (cf. figure 2.3(b)) avec pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A_n^{(x)}(s_{1:n}) = \left[(\widehat{s_{1:n}})^2 + \alpha \widehat{s_{1:n}} - (1 + \beta \widehat{s_{1:n}}) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] H_n^{(x)}(s_{1:n}).$$

Notons en effet, que l'opérateur spatial $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ peut être appliqué sur $h_n^{(x)}$ (et $H_n^{(x)}$) puisqu'il commute avec les opérateurs temporels (et leur transformée de Laplace)¹ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[0,t]^n} h_n^{(x)}(\tau_{1:n}) f(t - \tau_1) \dots f(t - \tau_n) d\tau_{1:n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[0,t]^n} \frac{\partial^2 h_n^{(x)}(\tau_{1:n})}{\partial x^2} f(t - \tau_1) \dots f(t - \tau_n) d\tau_{1:n}. \end{aligned}$$

Bloc (Vb) : De même, la cascade de $\{H_n^{(x)}(s_{1:n})\}$ et de l'opérateur linéaire spatial $\frac{\partial}{\partial x}$ définit les noyaux $\frac{\partial H_n^{(x)}(s_{1:n})}{\partial x}$. Ainsi, grâce à l'équation (1.45),

1. Ceci est valable sous les hypothèses standards du théorème de convergence dominée de Lebesgue (cf. e.g. [9]) et de la règle de Leibniz (cf. e.g. [3, (3.3.7)]).

la cascade avec le carré donne $\sum_{p=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial x} H_p^{(x)}(s_{1:p}) \frac{\partial}{\partial x} H_{n-p}^{(x)}(s_{p+1:n})$. Finalement, la cascade avec l'opérateur intégral spatial $-\epsilon \int_{\Omega} \cdot dx$ définit la série de Volterra $\{B_n^{(x)}\}$ (cf. figure 2.3Ⓟ) avec, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$B_n^{(x)}(s_{1:n}) = -\epsilon \int_0^1 \sum_{p=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial x} H_p^{(x)}(s_{1:p}) \frac{\partial}{\partial x} H_{n-p}^{(x)}(s_{p+1:n}) dx.$$

Bloc (Vc) : La cascade de $H_n^{(x)}$ avec $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ donne les noyaux

$$C_n^{(x)}(s_{1:n}) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} H_n^{(x)}(s_{1:n}).$$

Bloc (Vd) : Dans ce cas, $w_d(x, t) = -\phi(x) f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d_1^{(x)}(\tau_1) f(t - \tau_1) d\tau_1$ avec $d_1^{(x)}(\tau_1) = -\phi(x) \delta(\tau_1)$ où δ est la distribution de Dirac (de transformée de Laplace 1). Ainsi, les noyaux de Volterra correspondants dans le domaine de Laplace sont donnés par

$$D_n^{(x)}(s_{1:n}) = -\delta_{1,n} \phi(x),$$

où $\delta_{1,n}$ est le symbole de Kronecker ($\delta_{i,j}$ égale 1 si $i = j$ et 0 sinon).

En utilisant les équations (1.44) et (1.45), les noyaux de Volterra de l'ensemble du système de la figure 2.3Ⓟ sont donnés par, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n^{(x)}(s_{1:n}) + \sum_{k=1}^{n-1} B_k^{(x)}(s_{1:k}) C_{n-k}^{(x)}(s_{k+1:n}) + D_n^{(x)}(s_{1:n})$. Ce système « relie » f à 0. Il définit donc le système annulateur dont tous les noyaux de Volterra sont nuls. Cela donne l'équation de $H_n^{(x)}(s_{1:n})$ dans Ω , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\forall (x, s_{1:n}) \in \Omega \times (\mathbb{C}_0^+)^n$,

$$[\Gamma(\widehat{s_{1:n}})]^2 H_n^{(x)}(s_{1:n}) - \frac{\partial^2 H_n^{(x)}(s_{1:n})}{\partial x^2} = \frac{E_n^{(x)}(s_{1:n})}{1 + \beta \widehat{s_{1:n}}}, \quad (2.15)$$

avec

$$E_1^{(x)}(s_1) = \phi(x), \quad (2.16)$$

$$E_n^{(x)}(s_{1:n}) = \epsilon \sum_{\substack{p,q,r \geq 1 \\ p+q+r=n}} \int_0^1 \left[\frac{\partial H_p^{(x)}(s_{1:p})}{\partial x} \frac{\partial H_q^{(x)}(s_{p+1:p+q})}{\partial x} \right] dx$$

$$\cdot \frac{\partial^2 H_r^{(x)}(s_{p+q+1:n})}{\partial x^2} \quad \text{si } n \geq 2. \quad (2.17)$$

$$\text{et } \forall s \in \mathbb{C}_0^+, \quad \Gamma(s) = \sqrt{\frac{s^2 + \alpha s}{1 + \beta s}}. \quad (2.18)$$

Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation (2.15) est une équation différentielle ordinaire d'ordre 2 *linéaire* sur $H_n^{(x)}$. En effet, les noyaux $E_n^{(x)}$ ne dépendent que de $H_{p,q,r}^{(x)}$ avec $p, q, r \leq n - 1$.

Les conditions aux limites (équation (2.6)) imposent un déplacement nul en $x \in \{0; 1\}$. Cela implique que les noyaux $h_n^{(x)}$ sont également nuls en $x \in \{0; 1\}$ (cf. figure 2.4). Dans le domaine de Laplace, cela implique, pour

$$f(t) \longrightarrow \boxed{\{h_n^{(x=0)}\}} \longrightarrow u(x=0, t) = 0$$

FIGURE 2.4 – Condition à la limite sur $h_n^{(x)}$ en $x = 0$ (identique en $x = 1$).

tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall (x, s_{1:n}) \in \{0; 1\} \times (\mathbb{C}_0^+)^n, \quad H_n^{(x)}(s_{1:n}) = 0. \quad (2.19)$$

2.4 Projection modale et représentation sous forme d'arbres

2.4.1 Solution analytique

Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, les équations (2.15) à (2.19) définissent un problème aux limites, linéaire, dont la solution est donnée par (cf. [6] et annexe A.1),

$$\forall (x, s_{1:n}) \in \Omega \times (\mathbb{C}_0^+)^n, \quad H_n^{(x)}(s_{1:n}) = \int_{\Omega} G(x, \xi, \widehat{s_{1:n}}) E_n^{(\xi)}(s_{1:n}) d\xi, \quad (2.20)$$

où, pour tout $(x, \xi, s) \in \Omega \times \Omega \times \mathbb{C}_0^+$,

$$G(x, \xi, s) = \frac{\cosh((1+x+\xi)\Gamma(s)) - \cosh((1-|x-\xi|)\Gamma(s))}{2(1+\beta s)\Gamma(s)\sinh\Gamma(s)} \quad (2.21)$$

A noter que G ne dépend pas du choix de la racine carrée pour Γ puisque $\Gamma \mapsto -\Gamma$ garde G invariant.

Pour $n = 1$, cette solution est exactement celle du problème linéarisé ((M1) avec $\epsilon = 0$) où la fonction de Green G est appliquée sur la distribution spatiale $E_1^{(x)}(s_1) = \phi(x)$ dans le domaine de Laplace. Pour $n \geq 2$, $E_n^{(x)}$ nécessite les noyaux $H_p^{(x)}$ avec $p \leq n - 1$ (cf. équation (2.17)) de sorte que l'équation (2.20) est une équation de récurrence qui permet le calcul explicite des expressions analytiques. Néanmoins, par la suite, une décomposition modale sera utilisée : cela permettra de simplifier ces équations intégrales récurrentes en équations algébriques.

2.4.2 Décomposition modale

Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, le problème aux limites linéaire des équations (2.15) à (2.19) admet une base orthonormale de fonctions propres $\mathcal{B} = \{e_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ sur l'espace de Hilbert $L^2(\Omega)$ (cf. *e.g.* [10]). Les fonctions e_k qui définissent les modes spatiaux sont

$$\forall (k, x) \in \mathbb{N}^* \times \Omega, \quad e_k(x) = \sqrt{2} \sin(k\pi x). \quad (2.22)$$

Elles vérifient : **(i)** les conditions aux limites de Dirichlet ; **(ii)** $\frac{\partial^2 e_k}{\partial x^2} = -(k\pi)^2 e_k$; **(iii)** pour tout $(i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$ $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j}$ (symbole de Kronecker) où le produit scalaire sur $L^2(\Omega)$ est défini par $\forall (f, g) \in (L^2(\Omega))^2$, $\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x) g(x) dx$.

Soit la décomposition de $H_n^{(x)}$ sur \mathcal{B} , défini par, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall (s_{1:n}) \in (\mathbb{C}_0^+)^n, \quad H_n^{(x)}(s_{1:n}) = \sum_{L^2} \sum_{k \in \mathbb{N}^*} H_n^{[k]}(s_{1:n}) e_k(x), \quad (2.23)$$

où $H_n^{[k]} = \langle H_n^{(x)}, e_k \rangle$ est la projection de $H_n^{(x)}$ sur e_k . Les relations vérifiées par $H_n^{[k]}$ sont obtenues en projetant les équations (2.15) à (2.17) sur \mathcal{B} , comme détaillé dans l'annexe A.2. L'équation algébrique suivante est alors obtenue, pour tout $(n, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $(s_{1:n}) \in (\mathbb{C}_0^+)^n$,

$$H_n^{[k]}(s_{1:n}) = Q^{[k]}(\widehat{s_{1:n}}) E_n^{[k]}(s_{1:n}), \quad (2.24)$$

$$E_1^{[k]}(s_1) = \langle \phi, e_k \rangle = \phi_k, \quad (2.25)$$

$$E_n^{[k]}(s_{1:n}) = -\epsilon k^2 \pi^4 \sum_{\substack{p, q, r \geq 1 \\ p+q+r=n}} \left[\sum_{\ell \in \mathbb{N}^*} \ell^2 H_p^{[\ell]}(s_{1:p}) H_q^{[\ell]}(s_{p+1:p+q}) \right] H_r^{[k]}(s_{p+q+1:n}), \quad (2.26)$$

où $Q^{[k]}(s)$ est la fonction rationnelle définie par

$$Q^{[k]}(s) = [s^2 + (\alpha + \beta k^2 \pi^2) s + k^2 \pi^2]^{-1}, \quad (2.27)$$

qui est analytique dans \mathbb{C}_0^+ . En effet, pour $\alpha \geq 0$ et $\beta \geq 0$, les parties réelles des pôles de $Q^{[k]}$ sont toutes négatives (ou nulles pour le cas particulier $\alpha = \beta = 0$). Plus précisément, ces pôles correspondent aux modes oscillants amortis si $1 \leq k < K^* = 22690$ (pair de pôles complexes conjugués) et aux modes purement évanescents si $k \geq K^*$ (pôles à partie réelle négative). Une étude détaillée d'une telle analyse peut être trouvée dans [28] pour le cas d'une barre avec des amortissement similaires. La figure 2.5 représente les pôles dans le plan de Laplace complexe, pour les valeurs typiques α et β donnée dans le tableau 2.1.

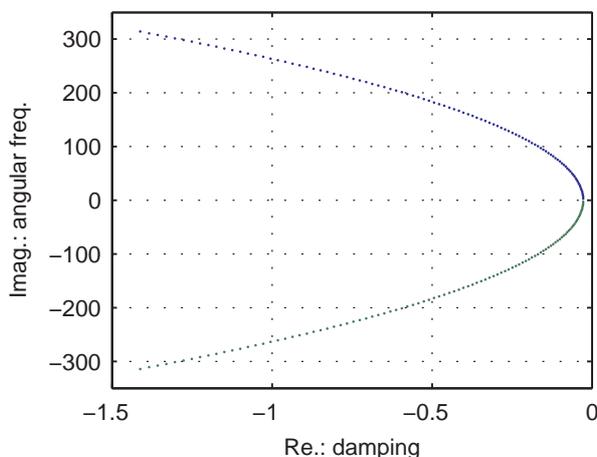


FIGURE 2.5 – Pôles de $Q^{[k]}$ pour $1 \leq k \leq K = 100$ et (α, β) donné dans le tableau 2.1.

Le calcul des expressions analytiques pour les ordres $n \in [1, 5]_{\mathbb{N}}$ donne, $\forall (k, s_{1:n}) \in \mathbb{N}^* \times (\mathbb{C}_0^+)^n$,

$$H_1^{[k]}(s_1) = \phi_k Q^{[k]}(s_1), \quad (2.28)$$

$$H_2^{[k]}(s_{1:2}) = 0, \quad (2.29)$$

$$H_3^{[k]}(s_{1:3}) = -\epsilon k^2 \pi^4 Q^{[k]}(\widehat{s_{1:3}}) \left[\sum_{\ell \in \mathbb{N}^*} \ell^2 H_1^{(\ell)}(s_1) H_1^{(\ell)}(s_2) \right] H_1^{(k)}(s_3) \quad (2.30)$$

$$H_4^{[k]}(s_{1:4}) = 0, \quad (2.31)$$

$$H_5^{[k]}(s_{1:5}) = -\epsilon k^2 \pi^4 Q^{[k]}(\widehat{s_{1:5}}) \left[\sum_{\ell \in \mathbb{N}^*} \ell^2 H_3^{[\ell]}(s_{1:3}) H_1^{[\ell]}(s_4) H_1^{[k]}(s_5) \right. \\ \left. + \sum_{\ell \in \mathbb{N}^*} \ell^2 H_1^{[\ell]}(s_1) H_3^{[\ell]}(s_{2:4}) H_1^{[k]}(s_5) \right. \\ \left. + \sum_{\ell \in \mathbb{N}^*} \ell^2 H_1^{[\ell]}(s_1) H_1^{[\ell]}(s_2) H_3^{[k]}(s_{3:5}) \right] \quad (2.32)$$

Remarque 5 : Pour $n = 2$, la somme sur $p, q, r \geq 1$, $p + q + r = n$ est vide, donc l'équation (2.26) nous montre que $E_n^{[k]}$ et $H_n^{(x)}$ sont nuls. Plus généralement, une récurrence prouve que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $H_{2m}^{(x)} = 0$ et $H_{2m+1}^{(x)}$ est proportionnel à ϵ^m .

Remarque 6 : Pour $n = 1$, la solution est la décomposition standard du problème linéarisé. Pour les ordres $n \geq 2$, les équations (2.24), (2.26) et (2.27) montrent comment la dynamique des ordres inférieurs ($1 \leq p, q, r \leq n - 1$,

$p+q+r = n$) génère la dynamique non linéaire de l'ordre n . L'équation (2.26) montre également quels modes spatiaux contribuent à la dynamique d'ordre n du mode k : tous les modes $\ell \in \mathbb{N}^*$ contribuent au terme « d'élongation » (à travers les ordres p et q) tandis que les dynamiques d'ordre r (qui contribuent au laplacien) sont uniquement celles du mode k .

2.4.3 Définition des arbres

La combinatoire due aux équations (2.23) à (2.26) peut être réorganisée comme une *unique somme de termes élémentaires*, les index de la somme étant naturellement décrits par des *arbres complets^(*) ternaires^(**)*², comme détaillé par la suite.

Définition 12

Soit \mathbb{A}_n un ensemble d'arbres ternaires défini par, pour $n \in \mathbb{N}^*$. Si $n = 1$

$$\mathbb{A}_n = \mathbb{N}^*, \quad (2.33)$$

si n est pair,

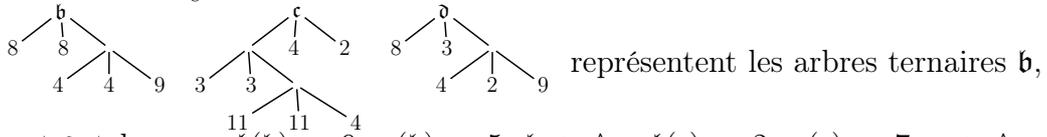
$$\mathbb{A}_n = \emptyset, \quad (2.34)$$

et si $n \geq 3$ est impair

$$\mathbb{A}_n = \bigcup_{\substack{p,q,r \geq 1 \\ p,q,r \text{ impairs} \\ p+q+r=n}} \{(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) \in \mathbb{A}_p \times \mathbb{A}_q \times \mathbb{A}_r \mid \mathfrak{k}(\mathbf{a}_1) = \mathfrak{k}(\mathbf{a}_2)\}, \quad (2.35)$$

où $\mathfrak{k}(\mathbf{a})$ est la feuille de droite de \mathbf{a} : pour $\mathbf{a} = k \in \mathbb{A}_1$, $\mathfrak{k}(\mathbf{a}) = k$; pour $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) \in \mathbb{A}_n$ (avec $n \geq 3$), $\mathfrak{k}(\mathbf{a}) = \mathfrak{k}(\mathbf{a}_3)$. De plus, $\mathfrak{n}(\mathbf{a})$ représente le nombre de feuilles de \mathbf{a} de telle sorte que si $\mathbf{a} \in \mathbb{A}_n$ et si n est impair, $\mathfrak{n}(\mathbf{a}) = n$.

Exemples : $\overset{\mathbf{a}}{\underset{8}{\text{I}}}$ est l'arbre $\mathbf{a} \in \mathbb{A}_1$ tel que $\mathfrak{k}(\mathbf{a}) = 8$.



\mathbf{c} et \mathbf{d} tels que : $\mathfrak{k}(\mathbf{b}) = 9$, $\mathfrak{n}(\mathbf{b}) = 5$, $\mathbf{b} \in \mathbb{A}_5$; $\mathfrak{k}(\mathbf{c}) = 2$, $\mathfrak{n}(\mathbf{c}) = 7$, $\mathbf{c} \in \mathbb{A}_7$; $\mathfrak{k}(\mathbf{d}) = 9$, $\mathfrak{n}(\mathbf{d}) = 5$ mais $\mathbf{d} \notin \mathbb{A}_5$. En effet, $\mathbf{d} = (\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3)$ avec $\mathbf{d}_1 = 8$, $\mathbf{d}_2 = 3$ et $\mathbf{d}_3 = (4, 2, 9)$, donc la condition $\mathfrak{k}(\mathbf{a}_1) = \mathfrak{k}(\mathbf{a}_2)$ n'est pas respectée (deux fois) dans l'équation (2.35) : d'abord car $\mathfrak{k}(\mathbf{d}_1) = 4 \neq 3 = \mathfrak{k}(\mathbf{d}_2)$; puis avec $\mathbf{d}_3 \notin \mathbb{A}_3$ pour la même raison ($4 \neq 2$).

2. Ceci est lié à la non-linéarité de **(M1)** qui est homogène^(*) de degré $3^{(**)}$. Un *arbre ternaire* est un arbre dans lequel chaque noeud a au plus trois enfants. Un *arbre ternaire complet* est un arbre où chaque noeud a zéro ou trois enfants.

Théorème 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les noyaux $H_n^{(x)}$ sont définis par, pour tout $(s_{1:n}) \in (\mathbb{C}_0^+)^n$,

$$H_n^{(x)}(s_{1:n}) = \sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{A}_n} H_{\mathbf{a}}(s_{1:n}) e_{\mathfrak{k}(\mathbf{a})}(x), \quad (2.36)$$

où, pour tout $\mathbf{a} \in \mathbb{A}_n$ (avec n impair),

$$\text{si } n = 1, \quad H_{\mathbf{a}}(s_1) = \phi_{\mathfrak{k}(\mathbf{a})} Q^{[\mathfrak{k}(\mathbf{a})]}(s_1), \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} \text{si } n \geq 3, \quad H_{\mathbf{a}}(s_{1:n}) &= -\epsilon [\mathfrak{k}(\mathbf{a}_1) \mathfrak{k}(\mathbf{a}_3) \pi^2]^2 Q^{[\mathfrak{k}(\mathbf{a})]}(\widehat{s_{1:n}}) H_{\mathbf{a}_1}(s_{1:n(\mathbf{a}_1)}) \\ &\quad \cdot H_{\mathbf{a}_2}(s_{n(\mathbf{a}_1)+1:n(\mathbf{a}_1)+n(\mathbf{a}_2)}) H_{\mathbf{a}_3}(s_{n(\mathbf{a}_1)+n(\mathbf{a}_2)+1:n}). \end{aligned} \quad (2.38)$$

avec $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$,

La preuve de ce théorème est détaillée dans l'annexe A.3.

Interprétation : Les arbres mémorisent et isolent les contributions héritées des noyaux linéaires de chaque mode et qui sont impliqués dans le noyau d'ordre n . Par exemple, le noyau $H_{\mathbf{e}}$ avec $\mathbf{e} = (4, 4, 9) \in \mathbb{A}_n$ et $n = 3$ traduit la façon dont l'élongation due au *mode linéaire 4* vient influencer la *dynamique linéaire portée par le mode 9* et contribuer à la dynamique non linéaire d'ordre $n = 3$ portée par ce même mode 9. Le noyau $H_{\mathbf{b}}$ ($\mathbf{b} = (8, 8, \mathbf{e}) \in \mathbb{A}_n$ avec $n = 5$) traduit la façon dont l'élongation due au *mode linéaire 8* vient influencer la *dynamique non linéaire portée par $H_{\mathbf{e}}$ (ordre 3, mode 9)* et contribuer à la dynamique non linéaire d'ordre $n = 5$ portée par ce même mode 9.

Plus généralement, pour $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3) \in \mathbb{A}_n$ ($n \geq 3$, impair), $H_{\mathbf{f}}$ traduit la façon dont l'élongation due au couple (H_{f_1}, H_{f_1}) pour le même mode $k = \mathfrak{k}(f_1) = \mathfrak{k}(f_2)$ vient influencer la dynamique portée par H_{f_3} (ordre $n(f_3)$, mode $\mathfrak{k}(f_3)$) et contribuer à la dynamique d'ordre n du mode $\mathfrak{k}(\mathbf{f}) = \mathfrak{k}(f_3)$.

Remarque 7 : La condition $\mathfrak{k}(\mathbf{a}_1) = \mathfrak{k}(\mathbf{a}_2)$ définie dans l'équation (2.35) est due à l'intégrale de l'équation (2.17) et à l'orthogonalité de $\mathcal{B} = \{e_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$.

2.5 Identification à des structures réalisables pour la synthèse sonore

Le calcul de la dynamique de la corde (équation (2.14)) en utilisant les versions temporelles des équations (2.36) à (2.38) mène à une complexité algorithmique infinie. En pratique, les sommes infinies sont tronquées. Tout d'abord, un nombre fini de mode est considéré en utilisant $\widetilde{\mathbb{A}}_1 = [1, K]_{\mathbb{N}}$ à la place \mathbb{A}_1 dans la définition 12. Cela fournit de bonnes approximations dans l'équation (2.36), si les modes supérieurs à K peuvent être négligés en raison de la faible valeur de $\phi_k = \langle \phi, e_k \rangle$, ou même exacte, si $\phi_k = 0$ pour $k > K$.

Puis, seuls les premiers noyaux $H_n^{(x)}$ pour $1 \leq n \leq N = 2M + 1$ sont conservés dans l'équation (2.14). On obtient alors l'approximation $\check{u}_N(x, t)$ telle que $u(x, t) = \check{u}_N(x, t) + o(\epsilon^M)$ (cf. remarque 5).

La théorie de la réalisation permet de construire des structures bien adaptées à la simulation numérique. Pour les noyaux de Volterra, les simulations peuvent être réalisées à partir des noyaux de Volterra *réguliers* (cf. section 1.6.4 et [41, chap.4] pour une présentation détaillée). Dans le cadre de cette thèse, une alternative est proposée sous la forme du théorème d'identification 4, qui ne requiert pas de calculer les *noyaux réguliers*. Les structures sont déterminées et détaillées pour les ordres $n = 1, 3, 5$.

2.5.1 Systèmes de Volterra élémentaires ternaires et théorème d'identification

Définition 13 (Système de Volterra homogène)

Un système de Volterra \mathcal{S} de noyaux $\{h_{n'}\}_{n' \in \mathbb{N}^*}$ est dit « homogène » d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$, si h_n est non nul et si, pour tout $n' \in \mathbb{N}^* \setminus \{n\}$, les noyaux $h_{n'}$ sont nuls.

Les filtres linéaires sont donc des systèmes homogènes d'ordre 1.

Définition 14 (Système de Volterra élémentaire ternaire)

Un système \mathcal{S} d'entrée f et de sortie u est un système de Volterra élémentaire ternaire si

- il existe trois systèmes de Volterra homogènes $\mathcal{S}_a, \mathcal{S}_b, \mathcal{S}_c$, d'ordres respectifs p, q, r , de sorties respectives y_a, y_b, y_c , et tous alimentés par la même entrée f ,
- il existe un système linéaire \mathcal{S}_d ,

tels que u est la sortie de \mathcal{S}_d alimentée par l'entrée $w(t) = y_a(t) y_b(t) y_c(t)$ (cf. figure 2.6).

Grâce aux lois d'interconnexion (1.45) et (1.46), on prouve que le système \mathcal{S} est homogène d'ordre $n = p + q + r$: son noyau d'ordre n est donné par

$$H_n(s_{1:n}) = A_p(s_{1:p}) B_q(s_{p+1:p+q}) C_r(s_{p+q+1:n}) D_1(\widehat{s_{1:n}}), \quad (2.39)$$

dans le domaine de Laplace, où a_p, b_q, c_r , et d_1 sont respectivement les noyaux non nuls des systèmes $\mathcal{S}_a, \mathcal{S}_b, \mathcal{S}_c$, et \mathcal{S}_d .

Théorème 4 (Structure composée de filtres, sommes et produits)

La solution $u(x, t)$ de (M1) issue des équations (2.14) et (2.36) à (2.38) est donnée par la somme

$$u(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sum_{\mathfrak{a} \in \mathbb{A}_n} u_{\mathfrak{a}}(t) e_{\mathfrak{t}(\mathfrak{a})}(x) \quad (2.40)$$

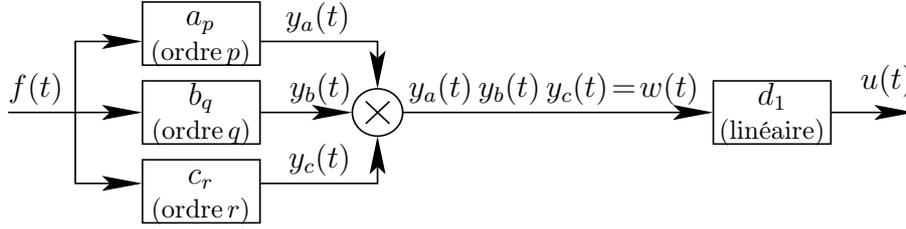


FIGURE 2.6 – Système de Volterra élémentaire ternaire homogène d'ordre $n = p + q + r$.

où les signaux de la sous-dynamique $u_{\mathbf{a}}$ peuvent être réalisés en utilisant des filtres linéaires et des produits, comme suit :

- si $\mathbf{a} \in \mathbb{A}_1$, alors $u_{\mathbf{a}}$ est la sortie du filtre linéaire de fonction de transfert $H_{\mathbf{a}}(s)$ donnée par l'équation (2.37) ;
- si $n \geq 3$ est impair et si $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) \in \mathbb{A}_n$, alors $u_{\mathbf{a}}$ est la sortie du filtre linéaire de fonction de transfert

$$G_{\mathbf{a}}(s) = -\epsilon [\mathfrak{k}(\mathbf{a}_1) \mathfrak{k}(\mathbf{a}_3) \pi^2]^2 Q^{[\mathfrak{k}(\mathbf{a})]}(s) \quad (2.41)$$

alimentée par l'entrée $v_{\mathbf{a}}(t) = u_{\mathbf{a}_1}(t) u_{\mathbf{a}_2}(t) u_{\mathbf{a}_3}(t)$ (cf. figure 2.7).

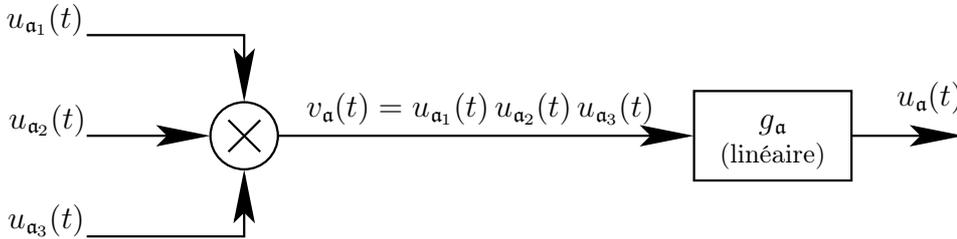


FIGURE 2.7 – Réalisation de $u_{\mathbf{a}}$ pour $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) \in \mathbb{A}_n$ avec $n \geq 3$ impair : $g_{\mathbf{a}}$ est le noyau de convolution du filtre associé à la fonction de transfert $G_{\mathbf{a}}$.

Preuve 1

L'identification est directe si $n = 1$ ou n est pair. Soit $n \geq 3$ et impair. Soient $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) \in \mathbb{A}_n$. Alors $H_{\mathbf{a}}$ (cf. équation (2.38)) a la forme de l'équation (2.39) avec $p = \mathbf{n}(\mathbf{a}_1)$, $q = \mathbf{n}(\mathbf{a}_2)$, $r = \mathbf{n}(\mathbf{a}_3)$, et $A_p = H_{\mathbf{a}_1}$, $B_q = H_{\mathbf{a}_2}$, $C_r = H_{\mathbf{a}_3}$, $D_1 = G_{\mathbf{a}}$ (cf. équation (2.41)). L'identification de la structure réalisable est issue de la définition 14.

2.5.2 Application : construction du structure réalisables pour les ordres $n = 1, 3, 5$

En pratique, la synthèse sonore est réalisée pour un nombre fini de modes $k \in \tilde{\mathbb{A}}_1 = [1, K]_{\mathbb{N}}$ et un nombre fini N de noyaux. La solution $u(x, t)$ donnée par l'équation (2.40) est approximée par

$$\check{u}_N(x, t) = \sum_{n=1}^N \sum_{\mathbf{a} \in \tilde{\mathbb{A}}_n} u_{\mathbf{a}}(t) e_{\mathfrak{k}(\mathbf{a})}(x) = \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K u_n^{[k]}(t) e_k(x), \quad (2.42)$$

$$\text{avec } u_n^{[k]}(t) = \sum_{\mathbf{a} \in \tilde{\mathbb{A}}_n(k)} u_{\mathbf{a}}(t), \quad (2.43)$$

$$\text{et } \tilde{\mathbb{A}}_n(k) = \{\mathbf{a} \in \tilde{\mathbb{A}}_n \mid \mathfrak{k}(\mathbf{a}) = k\} \quad (2.44)$$

Dans cette section, les réalisations de $u_n^{[k]}$ et donc de $\check{u}_N(x, t)$ sont obtenues en utilisant le théorème 2.

Pour $n = 1$ et $\mathbf{a} = k \in \tilde{\mathbb{A}}_1 = [1, K]_{\mathbb{N}}$, $u_{\mathbf{a}} = u_1^{[k]}$ est la sortie du filtre linéaire de noyau $h_1^{[k]} = \phi_k q^{[k]}$ alimenté par $f(t)$ (cf. théorème 4 et équation (2.37)). Le gain statique ϕ_k (cf. figure 2.8Ⓐ) mesure l'excitation du mode e_k par la distribution spatiale ϕ .

Pour $n = 3$, $\mathbf{a} \in \tilde{\mathbb{A}}_3 \subset (\tilde{\mathbb{A}}_1)^3$ a la forme $\mathbf{a} = (\ell, \ell, k)$. Le théorème 4 et la figure 2.7, montrent que $u_{\mathbf{a}}(t)$ est la sortie du filtre linéaire de noyau $g_{\mathbf{a}} = -\ell^2 \gamma_k q^{[k]}$ alimenté par $u_1^{[\ell]}(t) u_1^{[\ell]}(t) u_1^{[k]}(t)$, où γ_k est défini par

$$\gamma_k = \epsilon k^2 \pi^4. \quad (2.45)$$

La séparation des facteurs exprimés en ℓ de ceux dépendant de k amène à la réalisation de la figure 2.8Ⓑ). La réalisation de $u_3^{[k]}$ ($k \in [1, K]_{\mathbb{N}}$) est ob-

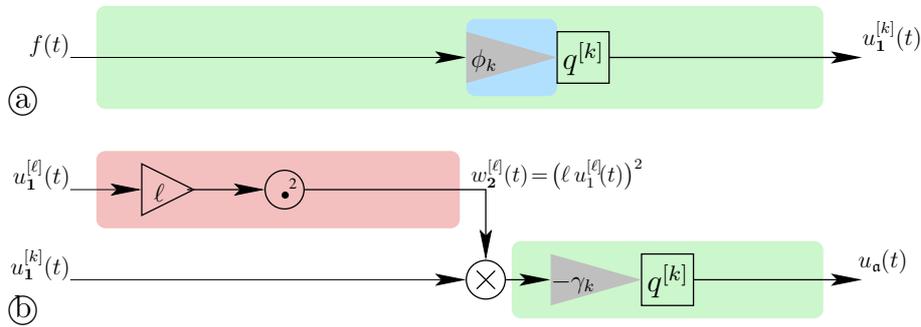


FIGURE 2.8 – Ⓐ : Réalisation de $u_1^{[k]}$; Ⓑ : Réalisation de $u_{\mathbf{a}}$ avec $\mathbf{a} = (\ell, \ell, k) \in \tilde{\mathbb{A}}_3$.

tenue par la sommation des sorties $u_a(t)$ des réalisations de la figure 2.8Ⓓ sur $\tilde{\mathbb{A}}_3(k) = \{(\ell, \ell, k) \mid \ell \in \tilde{\mathbb{A}}_1\}$, en utilisant les équations (2.43) et (2.44). En réunissant toutes les contributions sur ℓ et en factorisant le filtre linéaire commun $-\gamma_k q^{[k]}$ amène à la réalisation concise de la figure 2.9. En consé-

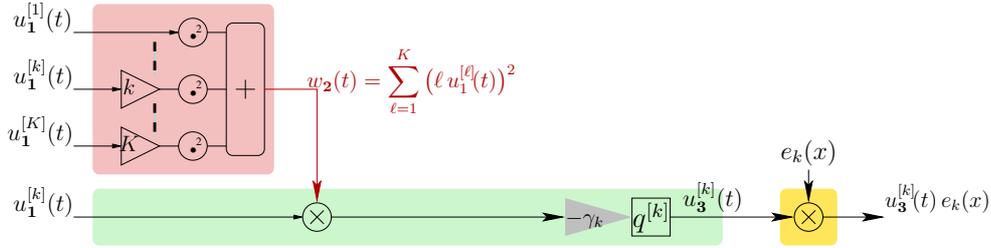


FIGURE 2.9 – Réalisation de $u_3^{[k]}$ avec sa forme modale associée $u_3^{[k]}(t) e_k(x)$.

quence, la solution approximée $\check{u}_3(x, t)$ de l'équation (2.42) peut être réalisée comme détaillé dans la figure 2.10.

Dans cette structure, les noyaux $q^{[k]}$ sont les réponses impulsionnelles de filtres AR de second ordre associés aux fonctions de transfert $Q^{[k]}(s)$. Si N_q^+ représente le nombre de sommes nécessaire à une simulation numérique de $q^{[k]}$ (de même, N_q^\times pour les produits), la complexité globale peut être évaluée comme détaillé dans le tableau 2.2.

	approx. linéaire : $N = 1, o(\epsilon^0)$	approx. du troisième ordre : $N = 3, o(\epsilon^1)$
N^+	$K(N_q^+ + N_x) - N_x$	$K(2N_q^+ + N_x + 2) - N_x - 1$
N^\times	$K(N_q^\times + N_x)$	$K(2N_q^\times + N_x + 3) - 1$
N^{flops}	$K(N_q^{flops} + 2N_x) - N_x$	$K(2N_q^{flops} + 2N_x + 5) - N_x$

TABLE 2.2 – Nombre d'opérations sur des réels pour calculer $u(x, t)$ pour (M1) avec K modes, à un instant donné, et à N_x points d'observation (cf. § 2.8 pour les valeurs standards) : les nombres de sommes (N^+), de produits (N^\times), et de flops ($N^{flops} = N^+ + N^\times$) sont données pour les approximations linéaire et du troisième ordre.

Les implémentations numériques des filtres linéaires de la figure 2.10 sont très standards (cf. e.g. [38]). Ici, une méthode qui préserve les valeurs propres exactes et l'amortissement est proposée (voir section 2.6 pour plus de détails). On obtient les paramètres $N_q^+ = 4$, $N_q^\times = 5$.

Néanmoins, les produits (dans le domaine temporel) de $N = 3$ signaux avec un intervalle de fréquence $[0, f^*]$ renvoie un signal sur un intervalle de fréquence $[0, N f^*]$. Théoriquement, empêcher le repliement spectral du à

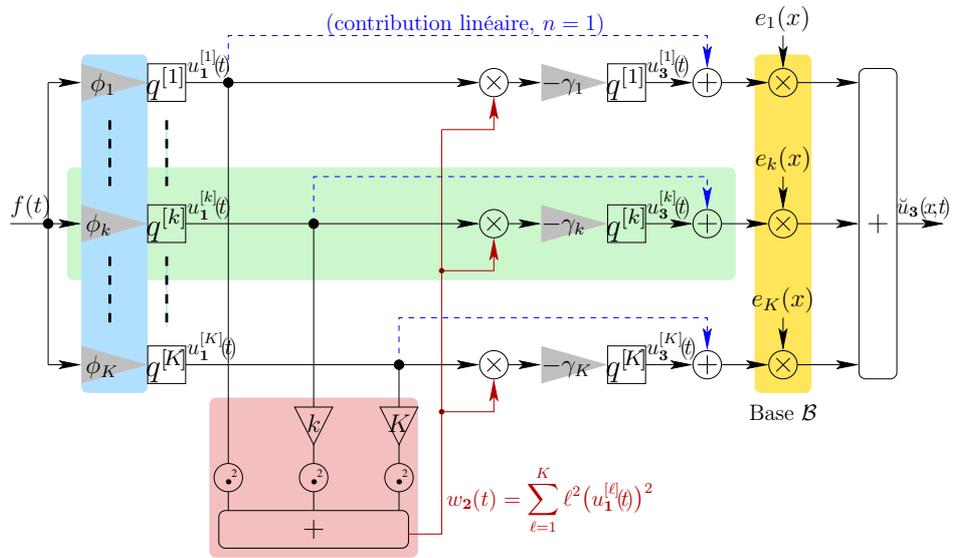


FIGURE 2.10 – Bloc-diagramme d’une simulation $o(\epsilon)$ de **(M1)** avec K modes : les flèches pointillées isolent la dynamique linéaire ($n=1$) de chaque mode ; la partie centrale ombragée isole la dynamique en $o(\epsilon)$ d’un mode k ; la partie inférieure ombragée isole la dynamique du terme intégral dans **(M1)** (les gains 1, k et K avant l’opérateur carré sont dus à $\frac{\partial}{\partial x}$) ; la partie de gauche ombragée correspond aux gains simples, contrôlés par la distribution spatiale de la force d’excitation .

un échantillonnage de fréquence f_s nécessite que $f_s/2 > N f^*$ (théorème de Shannon-Nyquist). Ici, les filtres de second ordre de réponse impulsionnelle $q^{[k]}$ coupent de manière significative le spectre au-delà de $f_k[1 + 1/Q_k]$ où le *facteur de qualité* est $Q_k = \frac{k\pi}{\alpha + \beta k^2 \pi^2}$. En conséquence,

$$\frac{f_s}{2} > N f_K \left(1 + \frac{1}{Q_K}\right) \quad (2.46)$$

est suffisant en pratique. Cette condition sera utilisée pour la synthèse sonore dans le § 2.8.

Pour $n = 5$, l'identification donnée par le théorème 4 amène à la réalisation de la figure 2.11. Cette structure peut également être identifiée en utilisant l'équation (2.32) : le premier facteur représente le filtre de noyau $-\gamma_k q^{[k]}$ qui est factorisé dans la réalisation (de la même manière que dans la figure 2.9 pour le cas $n = 3$); dans le second facteur, les deux premiers termes décrivent deux fois le même sous-système qui correspond à la partie comprenant $w_4(t)$ et le gain 2 dans la figure 2.11; finalement, le troisième terme décrit le sous-système correspondant à la partie inférieure comprenant $u_3^{[k]}(t)$ et $w_2(t)$. La réalisation de la figure 2.11 permet de compléter la figure 2.10, amenant la réalisation $\check{u}_5(x, t)$. Les simulations numériques de \check{u}_3 et \check{u}_5

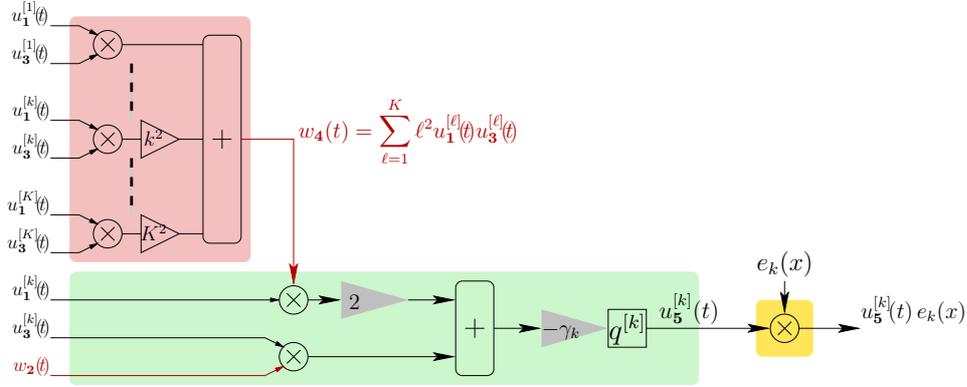


FIGURE 2.11 – Réalisation de $u_5^{[k]}$ avec sa forme modale associée $u_5^{[k]}(t) e_k(x)$.

ainsi que des comparaisons sont présentées dans la section 2.8.

2.6 Implémentation numérique

Considérons un mode e_k avec $k \in \mathbb{N}^*$ et la fonction de transfert associée $Q^{[k]}(s)$ définie par l'équation (2.27) d'entrée f et de sortie y . Il s'agit d'un

filtre AR du second ordre qui admet la représentation d'état suivante :

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt}(t) = \mathbf{A} \mathbf{X}(t) + \mathbf{B} f(t) \quad (2.47)$$

$$y(t) = \mathbf{C} \mathbf{X}(t), \quad (2.48)$$

avec $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ \frac{dx}{dt} \end{bmatrix}$, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k^2\pi^2 & -(\alpha + \beta k^2\pi^2) \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, et $\mathbf{C} = [1, 0]$ (on peut vérifier que la fonction de transfert de ce système est $C(s\mathbf{I}_2 - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = Q^{[k]}(s)$). La solution \mathbf{X} est donnée par

$$\mathbf{X}(t) = \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} f(\tau) d\tau + e^{\mathbf{A}t} \mathbf{X}(0),$$

ainsi, pour tout $i \in \mathbb{N}$ et $t_i = iT$,

$$\mathbf{X}(t_{i+1}) = e^{\mathbf{A}T} \mathbf{X}(t_i) + \int_0^T e^{\mathbf{A}(T-\tau)} \mathbf{B} f(t_i + \tau) d\tau. \quad (2.49)$$

Pour un régime de vibration libre, i.e. quand $f(t) = 0$, l'équation 2.49 donne une résolution exacte en temps discret : les valeurs propres et les amortissements sont exactement préservés. Afin d'obtenir une simulation numérique, l'entrée f est approximée par morceaux $\hat{f}(t) \approx f(t_i) + \frac{t-t_i}{T}[f(t_{i+1}) - f(t_i)]$ transformant l'équation 2.49 en

$$\mathbf{X}(t_{i+1}) = e^{\mathbf{A}T} \mathbf{X}(t_i) + \mathbf{B}_1 f(t_i) + \mathbf{B}_0 f(t_{i+1}), \quad (2.50)$$

avec $\mathbf{B}_1 = T^{-1}\mathbf{A}^{-2}[\mathbf{I}_2 - (\mathbf{I}_2 - T\mathbf{A})e^{\mathbf{A}T}]\mathbf{B}$ et $\mathbf{B}_0 = T^{-1}\mathbf{A}^{-2}[-(\mathbf{I}_2 + T\mathbf{A}) + e^{\mathbf{A}T}]\mathbf{B}$. Puis, de l'équation 2.50,

$$\begin{aligned} y(t_{i+2}) &= \mathbf{C} \left(e^{\mathbf{A}T} (e^{\mathbf{A}T} \mathbf{X}(t_i) + \mathbf{B}_1 u(t_i) + \mathbf{B}_0 u(t_{i+1})) \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{B}_1 u(t_{i+1}) + \mathbf{B}_0 u(t_{i+2}) \right), \\ \begin{bmatrix} y(t_{i+1}) \\ y(t_i) \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C} e^{\mathbf{A}T} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K} \text{ (inversible)}} \mathbf{X}(t_i) + \begin{bmatrix} \mathbf{C} \mathbf{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t_i) + \begin{bmatrix} \mathbf{C} \mathbf{B}_0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t_{i+1}). \end{aligned}$$

En isolant $\mathbf{X}(t_i)$ dans l'équation 2.51 et en le substituant dans l'équation 2.51, on obtient une équation récursive scalaire

$$y(t_{i+2}) = a_1 y(t_{i+1}) + a_2 y(t_i) + b_0 f(t_{i+2}) + b_1 f(t_{i+1}) + b_2 f(t_i), \quad (2.51)$$

avec des coefficients connus $(a_1, a_2, b_0, b_1, b_2)$. **Cette équation est utilisée pour la simulation : elle nécessite $N_q^+ = 4$ sommes et $N_q^\times = 5$ produits, à chaque étape.**

2.7 Le modèle de Kirchhoff-Carrier

Dans cette section, la corde est gouvernée par le modèle **(M3)** (voir équations (2.11) à (2.13)). La résolution est réalisée de manière similaire à la section 2.4.

2.7.1 Système annulateur

Il est impossible de d'obtenir une équation des noyaux de Volterra à partir de l'équation (2.11) et des lois d'interconnexion (1.44) à (1.46), en raison de la présence d'une racine carrée dans l'équation (2.11).

Néanmoins, les noyaux de Volterra $\{h_n\}$ d'un système non linéaire \mathcal{S} et ceux $\{\tilde{h}_n\}$ de \mathcal{S}_N (système \mathcal{S} où la non-linéarité est approximée par son développement de Taylor jusqu'à l'ordre N) sont les mêmes pour $n \leq N$.

Ainsi, pour obtenir des résultats valides à l'ordre $N = 3$, une approximation au troisième ordre de **(M3)** est suffisante

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{(1 - \frac{2\epsilon}{\eta}) \frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1 + \eta (\frac{\partial u}{\partial x})^2}} + \frac{2\epsilon}{\eta} \frac{\partial u}{\partial x} \right] \approx \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \zeta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^3 \right],$$

avec $\zeta = \epsilon - \frac{\eta}{2} = 2.27 \cdot 10^{-4}$, à partir de laquelle le système annulateur de la figure 2.12 est obtenu.

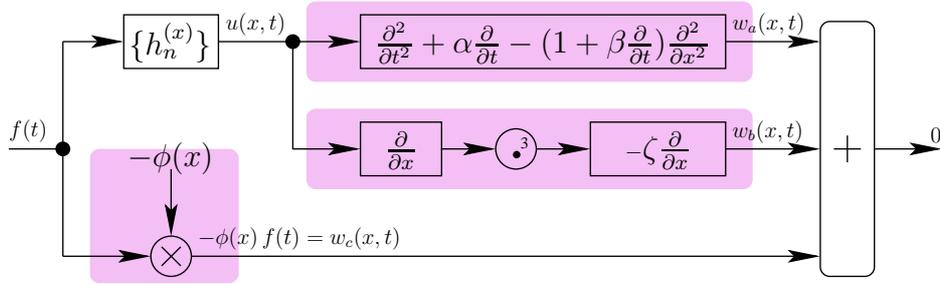


FIGURE 2.12 – Système annulateur de l'approximation au troisième ordre de **(M3)**.

Les noyaux $\{H_n^{(x)}\}$ qui correspondent à ce système annulateur, avec les conditions aux limites **(B1)**, sont solutions des équations 2.15, 2.16 et 2.19.

De plus, si $n \geq 2$, alors, pour tout $(x, s_{1:n}) \in \Omega \times (\mathbb{C}_0^+)^n$,

$$E_n^{(x)}(s_{1:n}) = \zeta \frac{\partial}{\partial x} \left[\sum_{\substack{(p_{1:3}) \in (\mathbb{N}^*)^3 \\ p_1 + p_2 + p_3 = n}} \frac{\partial H_{p_1}^{(x)}(s_{1:p_1})}{\partial x} \frac{\partial H_{p_2}^{(x)}(s_{p_1+1:p_1+p_2})}{\partial x} \frac{\partial H_{p_3}^{(x)}(s_{p_1+p_2+1:n})}{\partial x} \right], \quad (2.52)$$

ce qui permet d'obtenir à nouveau les solutions analytiques grâce aux équations (2.20) et (2.21).

La décomposition modale amène aux équations (2.22) à (2.25) et, si $n \geq 2$, pour tout $(k, s_{1:n}) \in \mathbb{N}^* \times (\mathbb{C}_0^+)^n$,

$$E_n^{[k]}(s_{1:n}) = -\zeta \sum_{\substack{(p_{1:3}) \in (\mathbb{N}^*)^3 \\ p_1 + p_2 + p_3 = n}} \sum_{(k_{1:3}) \in (\mathbb{N}^*)^3} \psi_{k_{1:3}}^{[k]} H_{p_1}^{[k_1]}(s_{1:p_1}) H_{p_2}^{[k_2]}(s_{p_1+1:p_1+p_2}) H_{p_3}^{[k_3]}(s_{p_1+p_2+1:n}), \quad (2.53)$$

avec

$$\psi_{k_{1:3}}^{[k]} = - \left\langle \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial e_{k_1}}{\partial x} \frac{\partial e_{k_2}}{\partial x} \frac{\partial e_{k_3}}{\partial x} \right), e_k \right\rangle = \frac{k_1 k_2 k_3 k \pi^4}{2} \lambda_{k_{1:3}}^{[k]}, \quad (2.54)$$

et

$$\lambda_{k_{1:3}}^{[k]} = \sum_{\xi_{2:3} \in \{-1, 1\}^2} \delta_{|k_1 + \xi_2 k_2 + \xi_3 k_3|, k}, \quad (2.55)$$

ainsi, dans l'équation (2.53), la somme sur $(k_{1:3}) \in (\mathbb{N}^*)^3$ est infinie mais creuse (comporte beaucoup de termes nuls).

Cette combinatoire peut être réorganisée comme une somme de termes élémentaires non nuls, comme suit

Théorème 5

Soit \mathbb{E}_n l'ensemble des arbres complets ternaires défini par, pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{E}_1 = \mathbb{N}^*, \quad (2.56)$$

$$\mathbb{E}_{2k} = \emptyset, \quad (2.57)$$

$$\mathbb{E}_{2k+1} = \biguplus_{\substack{(p_{1:3}) \in (\mathbb{N}^*)^3 \\ p_{1:3} \text{ impair} \\ p_1 + p_2 + p_3 = 2k+1}} \left\{ \mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \xi_{2:3}) \in \mathbb{E}_{p_1} \times \mathbb{E}_{p_2} \times \mathbb{E}_{p_3} \times \{-1, 1\}^2 \right\}, \quad (2.58)$$

où $\mathfrak{k}(\mathbf{e}) = \mathbf{e}$ if $\mathbf{e} \in \mathbb{E}_1$, $\mathfrak{k}(\mathbf{e}) = |\mathfrak{k}(\mathbf{e}_1) + \xi_2 \mathfrak{k}(\mathbf{e}_2) + \xi_3 \mathfrak{k}(\mathbf{e}_3)|$ si $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \xi_{2:3}) \in \mathbb{E}_n$ avec $n \geq 3$ et $\mathbf{n}(\mathbf{e}) = n$ représente le nombre de feuilles.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les noyaux $H_n^{(x)}$ sont donnés par, pour tout $(x, s_{1:n}) \in \Omega \times (\mathbb{C}_0^+)^n$,

$$H_n^{(x)}(s_{1:n}) = \sum_{\mathbf{e} \in \mathbb{E}_n} H_{\mathbf{e}}(s_{1:n}) e_{\mathfrak{k}(\mathbf{e})}(x), \quad (2.59)$$

où, pour tout $\mathbf{e} \in \mathbb{E}_n$ (avec n impair et $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \xi_{2:3})$ si $n \geq 3$),

$$\text{si } n = 1, \quad H_{\mathbf{e}}(s_1) = H_n^{[\mathbf{e}]}(s_1), \quad (\text{cf. équation (2.28)}) \quad (2.60)$$

$$\text{si } n \geq 3, \quad H_{\mathbf{e}}(s_{1:n}) = -\frac{\zeta \mathfrak{k}(\mathbf{e}_1) \mathfrak{k}(\mathbf{e}_2) \mathfrak{k}(\mathbf{e}_3) \mathfrak{k}(\mathbf{e}) \pi^4}{2} Q^{[\mathbf{e}]}(\widehat{s_{1:n}}) H_{\mathbf{e}_1}(s_{1:n(\mathbf{e}_1)}) \\ \cdot H_{\mathbf{e}_2}(s_{n(\mathbf{e}_1)+1:n(\mathbf{e}_1)+n(\mathbf{e}_2)}) H_{\mathbf{e}_3}(s_{n(\mathbf{e}_1)+n(\mathbf{e}_2)+1:n}). \quad (2.61)$$

Une autre réorganisation non creuse de l'équation (2.53) est donnée par, si $n \geq 2$, pour tout $(k, s_{1:n}) \in \mathbb{N}^* \times (\mathbb{C}_0^+)^n$,

$$E_n^{[k]}(s_{1:n}) = -\chi_k \sum_{\substack{(\mathbf{p}_{1:3}) \in (\mathbb{N}^*)^3 \\ p_1+p_2+p_3=n}} \sum_{(k_{1:3}) \in \mathbb{K}_k^3} k_1 k_2 k_3 \lambda_{k_{1:3}}^{[k]} H_{p_1}^{[k_1]}(s_{1:p_1}) \\ H_{p_2}^{[k_2]}(s_{p_1+1:p_1+p_2}) H_{p_3}^{[k_3]}(s_{p_1+p_2+1:n}), \quad (2.62)$$

où $\chi_k = \frac{\zeta k \pi^4}{2}$, $\mathbb{K}_k^3 = \left\{ (k_{1:3}) \in (\mathbb{N}^*)^3 \mid \exists (\xi_2, \xi_3) \in \{-1; +1\} \mid |k_1 + \xi_2 k_2 + \xi_3 k_3| = k \right\}$ est illustré figure 2.13, et les poids $\lambda_{k_{1:3}}^{[k]}$ sont détaillés dans la table 2.3. Ainsi, pour un nombre fini K de modes ($1 \leq k \leq K$), l'identification des

Cas	$\lambda_{k_{1:3}}^{[k]}$	Sous-cas	$C_{k_{1:3}}$	$\tilde{\lambda}_{k_{1:3}}^{[k]}$
① : $k_1 = k_2 = k_3 = k$	3	<i>aucun</i>	1	3
② : $k_1 = k_2 \neq k$ et $k_3 = k$ (et les deux permutations)	2	<i>aucun</i>	3	6
③ : Autres cas, si $(k_{1:3}) \in \mathbb{K}_k^3$	1	Ⓐ : $k_1 = k_2 = k_3 \neq k$	1	1
		Ⓑ : $k_1 = k_2 \neq k_3 \neq k$ (et les deux permutations)	3	3
		Ⓒ : $k_1 \neq k_2 \neq k_3 \neq k_1$	6	6
④ : Autres cas, si $(k_{1:3}) \notin \mathbb{K}_k^3$	0	×	×	0

TABLE 2.3 – Détail des poids $\lambda_{k_{1:3}}^{[k]}$ et $\tilde{\lambda}_{k_{1:3}}^{[k]}$.

noyaux linéaires et d'ordre trois à partir de l'équation (2.62) plutôt que de l'équation (2.26) amène à la structure de la figure 2.14 (à comparer avec la figure 2.10). Dans cette structure, chaque sortie $v_3^{[k]}(t)$ du bloc **(Tw)** est donnée par, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}^+$,

$$v_3^{[k]}(t) = \sum_{(k_{1:3}) \in \mathbb{K}_k^3 \cap [1, K]_{\mathbb{N}}^3} \lambda_{k_{1:3}}^{[k]} k_1 k_2 k_3 u_{k_1}^{[1]}(t) u_{k_2}^{[1]}(t) u_{k_3}^{[1]}(t), \quad (2.63)$$

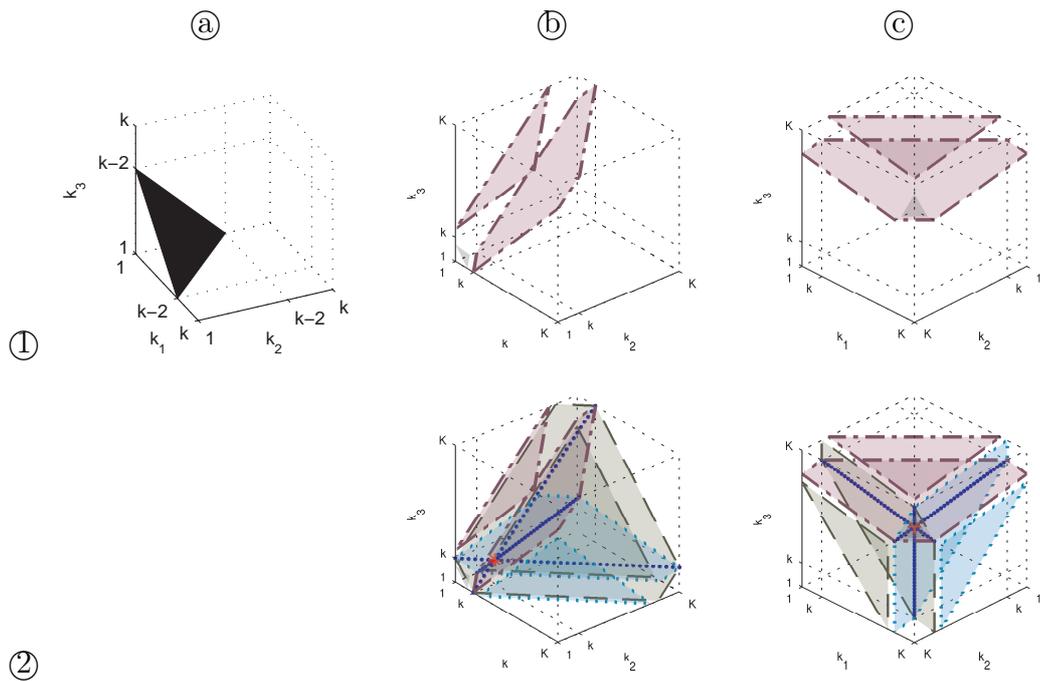


FIGURE 2.13 – L'ensemble \mathbb{K}_k^3 est composé de triplets d'entiers $(k_{1:3})$ qui appartiennent à : un triangle si $(\xi_{2:3}) = (1, 1)$ (voir **(1a)**) ; un couple de parties semi-infinies de plans parallèles si $(\xi_{2:3}) = (1, -1)$ (voir **(1b, 1c)**) ; les cas $(\xi_{2:3}) = (-1, 1)$ et $(\xi_{2:3}) = (-1, -1)$ sont des versions symétriques du cas précédent. Toutes les contributions sont rassemblées dans **(2b, 2c)**. Les parties sans intersection correspondent à un poids $\lambda_{k_{1:3}}^{[k]} = 1$, les intersections de deux plans (points bleus) à $\lambda_{k_{1:3}}^{[k]} = 2$, les intersections de trois plans (un point rouge, $k_1 = k_2 = k_3 = k$) à $\lambda_{k_{1:3}}^{[k]} = 3$.

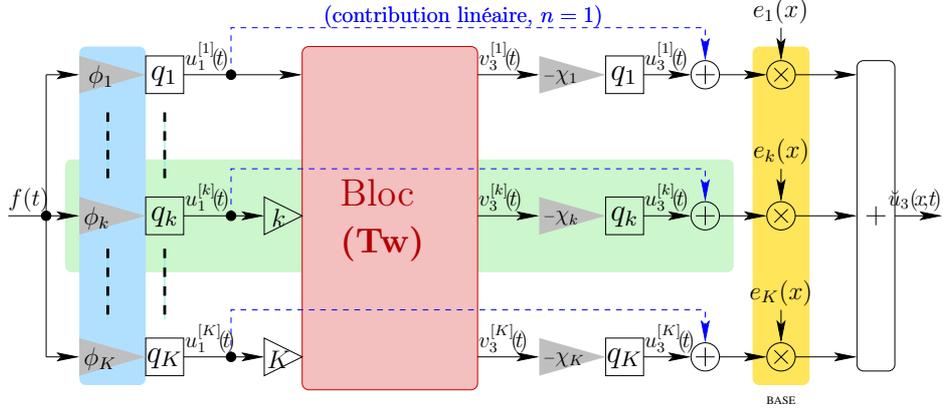


FIGURE 2.14 – Bloc-diagramme d’une simulation en $o(\epsilon_3)$ de **(M3)** avec K modes. Chaque sortie $v_3^{[k]}(t)$ du bloc **(Tw)** est une combinaison linéaire de produits de triplets $(u_{k_1}^{[1]}(t) u_{k_2}^{[1]}(t) u_{k_3}^{[1]}(t))$ (cf. équation (2.63)).

pour lequel la combinatoire peut être significativement réduite (environ d’un facteur 4) grâce à des considérations de symétrie. En effet, similairement à la figure A.6 pour le bloc **(Bw)**, seule la partie triangulaire supérieure $\tilde{\mathbb{K}}_k^3$ de \mathbb{K}_k^3 peut être préservée (cf. figure 2.15), avec des poids adaptés $\tilde{\lambda}_{k_{1:3}}^{[k]}$ (voir table 2.3), comme suit :

$$\tilde{\mathbb{K}}_k^3 = \mathbb{K}_k^3 \cap \{(k_{1:3}) \in [1, K]_{\mathbb{N}}^3 \mid k_1 \leq k_2 \leq k_3\}, \quad (2.64)$$

$$\tilde{\lambda}_{k_{1:3}}^{[k]} = C_{k_{1:3}} \lambda_{k_{1:3}}^{[k]} \quad (2.65)$$

$$\text{avec } C_{k_{1:3}} = \mathbf{card}\{(k_1, k_2, k_3); (k_1, k_3, k_2); (k_2, k_1, k_3); (k_3, k_1, k_2); (k_2, k_3, k_1); (k_3, k_2, k_1)\}. \quad (2.66)$$

La simulation de la structure de la figure 2.14 nécessite exactement les mêmes filtres que dans la figure 2.10. La seule différence est le bloc **(Tw)**, dont la simulation est réalisée en utilisant l’équation (2.63), pour chaque mode k et à chaque instant.

2.8 Synthèse sonore

Dans cette section, les modèles **(M1)** et **(M3)** sont simulés avec les paramètres suivants :

- la géométrie et les constantes physiques sont celles de la table 2.1.

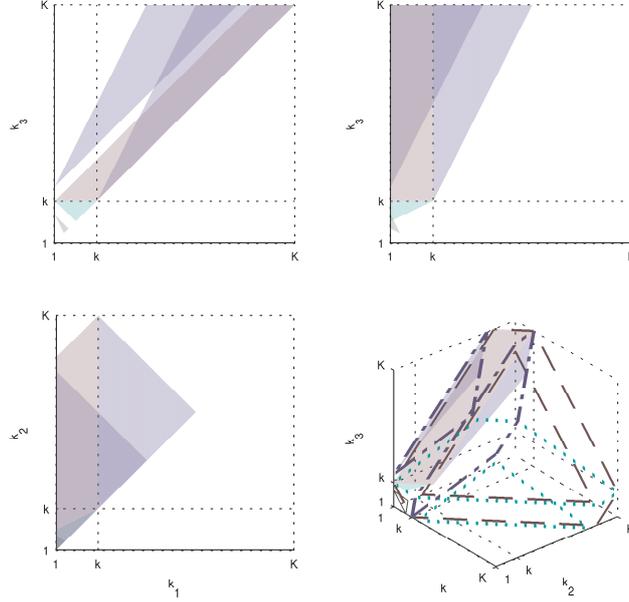


FIGURE 2.15 – Vues de l'ensemble $\tilde{\mathbb{K}}_k^3$.

- l'excitation $\phi(x)f(t)$ est définie par, pour $x \in]0, L[$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$

$$\phi(x) = \phi_{max} \cos\left(\pi \frac{x - x_0}{\ell}\right) 1_{[x_0 - \frac{\ell}{2}, x_0 + \frac{\ell}{2}]}(x), \quad (2.67)$$

$$f(t) = F_{max} \frac{t}{T} 1_{[0, T]}(t), \quad (2.68)$$

où $x_0 = 0.63$ m, $\ell = 0.072$ m ($\tilde{x}_0 = x_0/L = 0.35$, $\tilde{\ell} = \ell/L = 0.04$ pour que 4% de la corde soit pincé), $\phi_{max} = \pi/(2\rho A\ell) = 395.7$ Kg⁻¹ satisfaisant ainsi l'équation (2.1) ($\tilde{\phi}_{max} = \pi/(2\tilde{\ell}) = 39.27$), $T = 10$ ms ($\tilde{T} = 1.1$). Plusieurs forces F_{max} sont utilisées pour rechercher les effets non linéaires : $F_{max}^1 = 5$ N, $F_{max}^2 = 20$ N, $F_{max}^3 = 40$ N, et $F_{max}^4 = 160$ N ($\tilde{F}_{max}^1 = 2.8$, $\tilde{F}_{max}^2 = 11.1$, $\tilde{F}_{max}^3 = 22.2$, $\tilde{F}_{max}^4 = 88.8$).

- la fréquence d'échantillonnage est $f_s = 44100$ Hz ($\tilde{f}_s = 401$), le nombre de modes est $K = 20$, l'ordre d'approximation est $N = 3$ pour la section 2.8.1, et $N = 5$ pour la section 2.8.2.

Pour ces données, les fréquences de résonance $f_k = \frac{c}{L} \sqrt{k^2\pi^2 - (\alpha + \beta k^2\pi^2)^2}/(2\pi)$ du filtre passe-bande de noyau $q_1^{[k]}$ (voir équations (2.27) et (2.28)) vont de $f_1 \approx 55$ Hz à $f_K \approx 1100$ Hz. Le repliement spectral du aux non-linéarités est rejeté puisque $N \leq N_{max} = \frac{f_s}{2f_K} \left(1 + \frac{1}{Q_K}\right)^{-1} \approx 20$ (voir équation (2.46)).

2.8.1 Approximations à l'ordre trois ($N = 3$)

Les figures 2.16 à 2.19 présentent l'approximation au troisième ordre $\check{u}_3(x, t)$ du déplacement (dimensionné) observé à $x = 0.57 L \approx 1$ m.

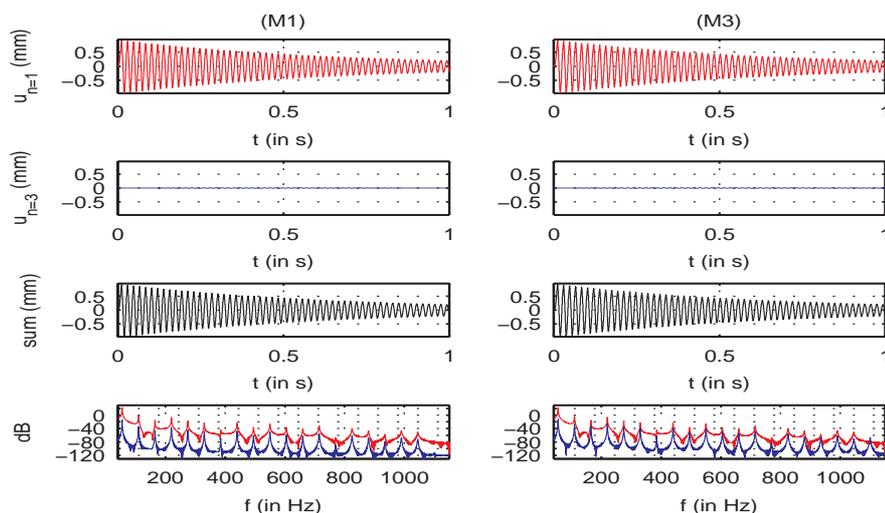


FIGURE 2.16 – Simulation de **(M1)** (gauche) et **(M3)** (droite) pour la même excitation d'amplitude $F_{max} = 5$ N. La sortie u est observée à $x = 0.57 L \approx 1$ m. De haut en bas : (a) réponse linéaire, (b) sortie de l'ordre 3 seul, (c) somme des contributions linéaire et non linéaire, et (d) amplitude du spectre de (a) et (b).

Pour l'excitation la plus faible $F_{max}^1 = 5$ N (figure 2.16), la contribution non linéaire est négligeable pour les deux modèles **(M1)** et **(M3)** : le spectre de u_3 est approximativement 50 dB plus faible que celui du déplacement linéaire u_1 . Dans le domaine temporel, les valeurs maximales des contributions u_1 et u_3 sont $\max_t |u_1| \approx 0.9$ mm et $\max_t |u_3| < 0.012$ mm, respectivement. Dans ce cas, il est inutile d'utiliser un modèle non linéaire et les séries de Volterra. En fait, **(M1)** et **(M3)** deviennent équivalents puisque leurs noyaux linéaires sont égaux.

Pour $F_{max}^2 = 20$ N (figure 2.17), les contributions non linéaires u_3 commencent à être significativement activées et ont des formes similaires pour les deux modèles (**(M1)** et **(M3)**). Néanmoins, cette activation est légèrement plus perceptible pour **(M3)** que pour **(M1)** : tandis que $\max_t |u_1| \approx 3.7$ mm (pour les deux modèles), $\max_t |u_3| \approx 0.5$ mm pour **(M1)** et $\max_t |u_3| \approx 0.8$ mm pour **(M3)**. D'un point de vue qualitatif, on peut observer sur le spectre que les valeurs propres sont les mêmes pour les contributions linéaires et non linéaires. Ceci est dû au fait que la non-linéarité est impaire.

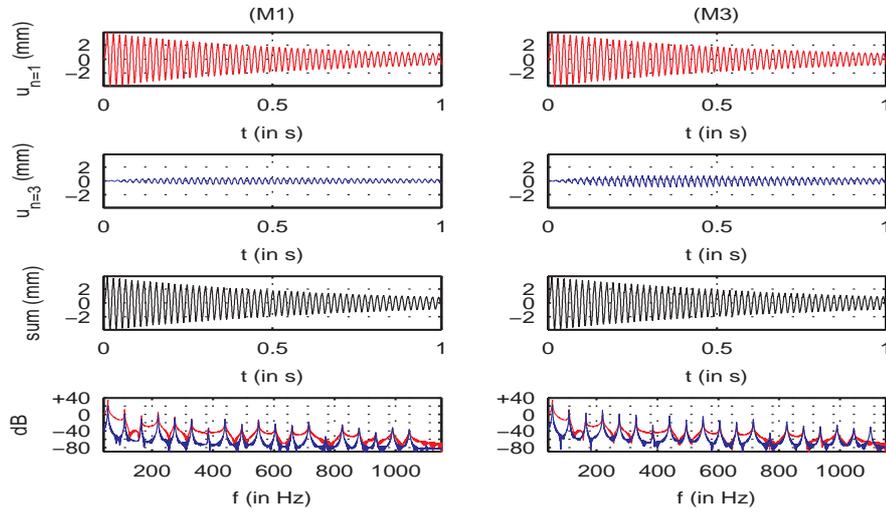


FIGURE 2.17 – Idem figure 2.16 avec $F_{max}^2 = 10$ N.

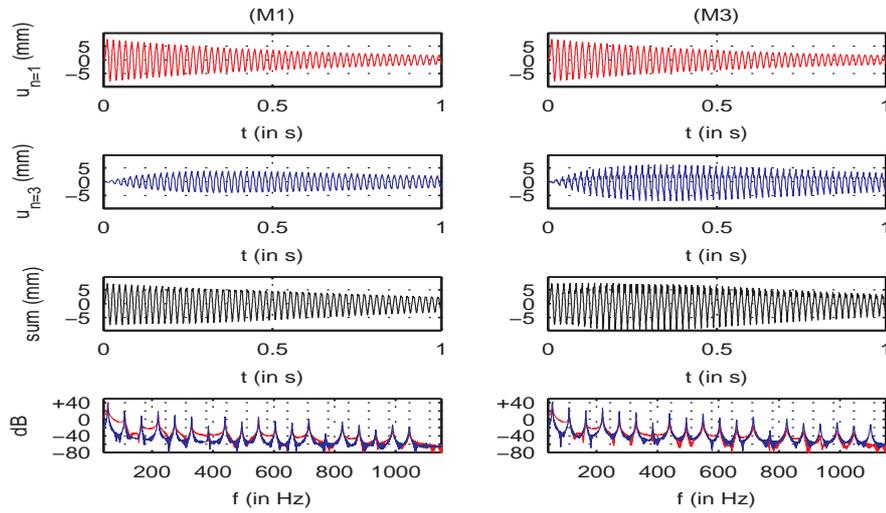


FIGURE 2.18 – Idem figure 2.16 avec $F_{max}^3 = 40$ N.

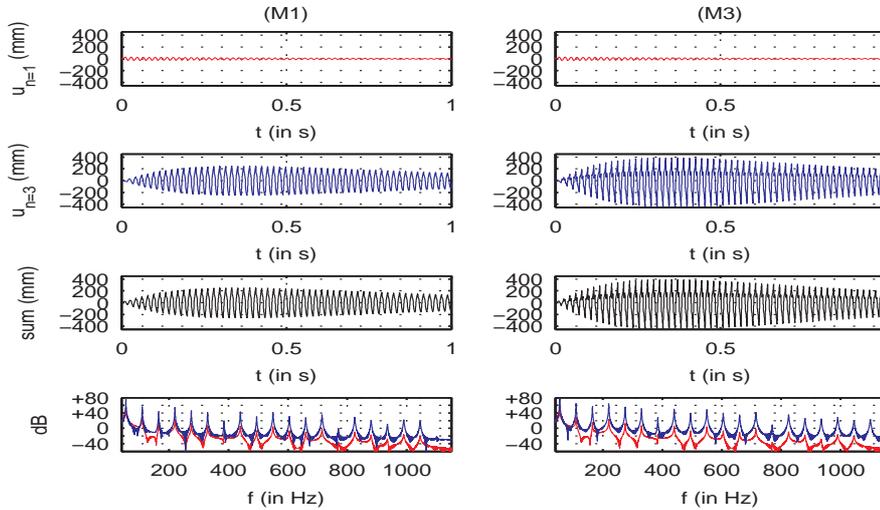


FIGURE 2.19 – Idem figure 2.16 avec $F_{max}^4 = 160$ N.

Pour le cas $F_{max}^3 = 40$ N (figure 2.18), les contributions u_1 et u_3 ont des amplitudes similaires (aussi bien dans le domaine temporel que fréquentiel) : $\max_t |u_1| \approx 7.4$ mm, $\max_t |u_3| \approx 3.84$ mm pour **(M1)** et $\max_t |u_3| \approx 6.04$ mm pour **(M3)**. En pratique, ce cas peut être vu comme la limite de la validité de l'approximation en $o(\epsilon)$ et plus généralement de l'utilisation des séries de Volterra tronquées.

Finalement, pour $F_{max}^4 = 160$ N (figure 2.19), la contribution non linéaire u_3 est plus importante que la contribution linéaire pour les deux modèles : $\max_t |u_1| \approx 29.5$ mm, $\max_t |u_3| \approx 245.7$ mm pour **(M1)** et $\max_t |u_3| \approx 386.6$ mm pour **(M3)**. L'approximation n'est plus valide (cf. remarque sur la convergence section 1.6.3).

Les estimations de la fréquence fondamentale (cf. [14]) font apparaître des variations temporelles quand les contributions non linéaires sont significatives. Mais, le transfert d'énergie des basses fréquences vers les modes supérieurs du au contributions non linéaires est encore plus distinct : dans la figure 2.18, les contributions linéaires et non linéaires ont des amplitudes similaires pour les premiers modes (spectre), tandis que la partie non linéaire a plus d'énergie que la réponse linéaire dans les fréquences médianes et hautes. Ceci est clairement perceptible dans les sons synthétisés qui sont plus brillants au début (avant l'amortissement). A fortiori, le transfert d'énergie est responsable des transitoires d'attaque en raison de son activation progressive (cf. figures. 2.17 et 2.18 pour $0 \leq t \leq 0.2$ s).

Ainsi, sur un « intervalle de fonctionnement » donné, les séries de Volterra

peuvent être une alternative intéressante à des méthodes telles que, les modes non linéaires qui sont limités à des excitations particulières, où la méthode des éléments finis qui nécessite la résolution du modèle sur tout le domaine Ω . Sans discrétisation spatiale, les séries de Volterra peuvent donner des résultats intéressants à des ordres raisonnables.

2.8.2 Approximations d'ordre supérieur ($N = 5$)

Les figures 2.20 à 2.21 détaillent les contributions à l'ordre 5 pour le modèle (M1) et complètent les figures 2.16 à 2.19.

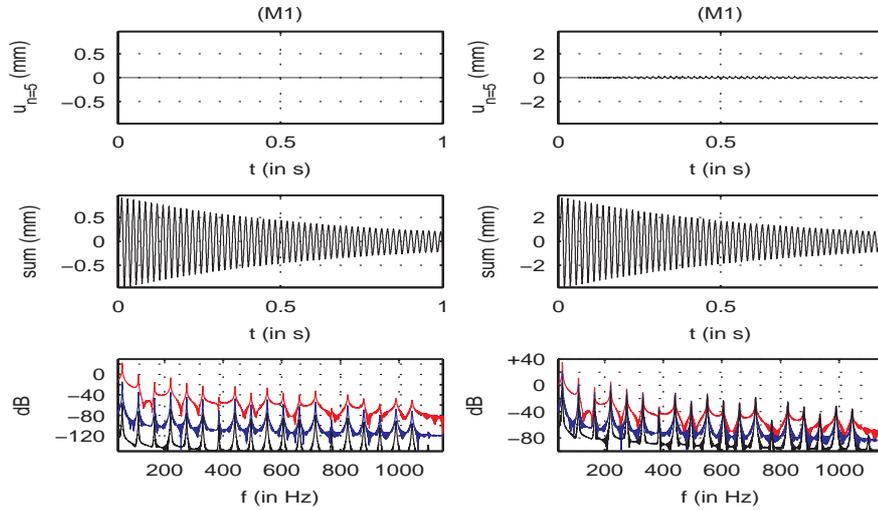


FIGURE 2.20 – Simulation de (M1) pour $F_{max}^1 = 5$ N et $F_{max}^2 = 20$ N. De haut en bas : (a) sortie de l'ordre 5 seule, (b) somme des contributions jusqu'à l'ordre 5, et (c) amplitude du spectre (ordres 1, 3, et 5).

Ces résultats corroborent les observations faites pour l'ordre $n = 3$: la contribution à l'ordre 5 est négligeable pour F_{max}^1 ($\max_t |u_5| \approx 9.6 \cdot 10^{-5}$ mm), plus faible que celle de l'ordre 3 pour F_{max}^2 ($\max_t |u_5| \approx 0.01$ mm), similaire à celle de l'ordre 3 pour F_{max}^3 ($\max_t |u_5| \approx 3.1$ mm), et plus importante que celle de l'ordre 3 pour F_{max}^4 ($\max_t |u_5| \approx 3226$ mm).

Les figures 2.20 et 2.21 montrent que la contribution à l'ordre 5 nécessite une excitation plus importante pour apparaître, qu'à l'ordre 3. Le transfert d'énergie des basses vers les hautes fréquences est plus important. Dans le domaine temporel, cette contribution augmente plus lentement, augmentant ainsi l'effet de « brillance » au début du son.

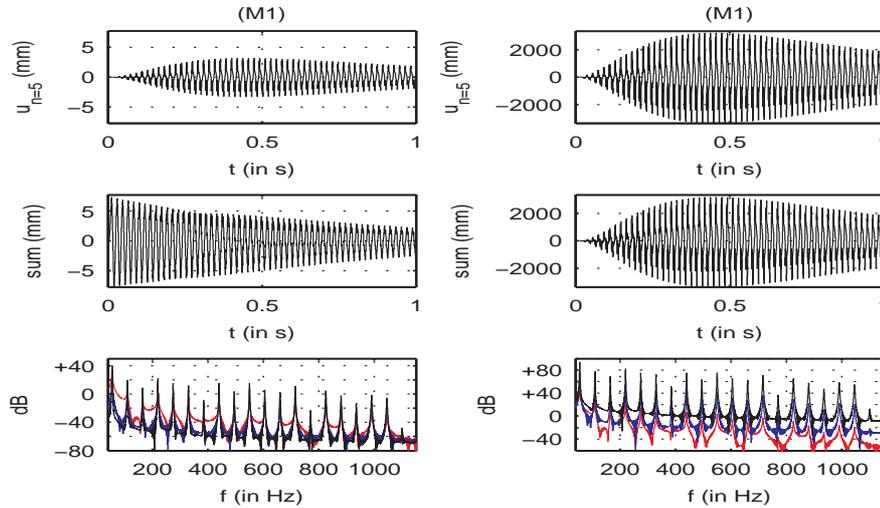


FIGURE 2.21 – Idem figure 2.20 pour $F_{max}^3 = 40$ N et $F_{max}^4 = 160$ N.

2.9 Conclusion

Ce travail a présenté une application des séries de Volterra pour simuler les vibrations non linéaires d'une corde. La méthode est efficace pour la synthèse sonore (avec possibilité de temps réel) d'instruments à corde dont les excitations peuvent être assez importantes. Cela a été illustré avec trois modèles, une ou plusieurs excitations localisées (une ou plusieurs entrées comme présenté en annexe A.5), et une non-linéarité locale ou globale. Des identifications systématiques ont permis la construction de structures qui amènent à une interprétation physique originale, et desquelles des algorithmes efficaces ont été déduits. En effet, cela n'implique que des opérations élémentaires sur des nombres flottants (sommations et produits sans boucle infinie), dont le nombre peut être précisément calculé.

Cependant ce travail reste assez théorique et n'a pas vocation à être réaliste pour la synthèse sonore étant donnés les modèles étudiés (un degré de liberté, contraintes et déformations unidimensionnelles). Il est en effet nécessaire de prendre en compte les six degrés de liberté de la corde et les couplages qui en résultent. C'est la raison pour laquelle un modèle tridimensionnel de corde prenant en compte les ondes couplées doit être étudié pour le réalisme de la synthèse sonore.

Chapitre 3

Modèle de poutre de Reissner et groupes de Lie

3.1 Introduction

La première partie de cette thèse a mis en évidence l'utilité des séries de Volterra pour approximer à un ordre donné les non-linéarités d'un modèle physique. Les modèles de Kirchhoff et Kirchhoff-Carrier ont permis de simuler la variation de tension dans une corde à un degré de liberté et de percevoir la variation de fréquence résultant de ce phénomène non linéaire.

La modélisation physique des instruments à cordes (au sens large : violon, piano, guitare, harpe...) fait apparaître des phénomènes beaucoup plus complexes que ceux évoqués jusqu'à présent. Anand [4] et d'autres (cf. e.g. [37], [45], [46] et [48]) ont travaillé sur la polarisation de la vibration de la corde, c'est à dire l'observation de la trajectoire d'une section dans un plan transverse à l'axe de la corde. Cette trajectoire dépend des deux déplacements transverses, des rotations de la section, et de leurs couplages. De plus, la synthèse sonore, d'un violon par exemple, nécessite la prise en compte de l'excitation par l'archet, qui consiste (principalement) en une torsion imposée.

Ces travaux nous indiquent les limites des résultats présentés auparavant dans un objectif de synthèse sonore réaliste, et la nécessité de prendre en compte la dynamique non linéaire d'une corde d'un point de vue tridimensionnel. Le vocabulaire de la mécanique nous incite alors à utiliser le terme « poutre », c'est à dire un solide dont deux dimensions sont faibles par rapport à la troisième, mais dont les contraintes et déformations sont tridimensionnelles, aucune ne pouvant être négligée *a priori*.

Une possibilité est l'utilisation du modèle de poutre de Reissner, considéré

comme une succession de sections rigides. Plusieurs possibilités de paramétrisation sont alors possibles. Nous verrons dans une première section une présentation rapide des angles d'Euler et des groupes de Lie, et pourquoi ces derniers sont choisis. Une deuxième partie présentera la cinématique du modèle de poutre. Puis l'équation d'équilibre sera établie grâce au principe de Hamilton. Finalement, une réécriture nécessaire pour éviter des problèmes numériques (résolution d'une équation à une seule variable) sera effectuée dans la dernière section.

3.2 Exemple introductif : le solide rigide

Le modèle de poutre de Reissner consiste en un empilement corps rigides qui peuvent donc être paramétrés par les angles d'Euler ou les groupes de Lie. Cette section va présenter rapidement les deux approches.

3.2.1 Angles d'Euler

Une des méthode standard est l'expression de la rotation d'un solide par les angles d'Euler qui décrivent la transformation d'une position A à une position B de l'objet par trois rotations : par exemple, une rotation R_1 autour de z , R_2 autour de x_1 (nouvel axe x après la rotation R_1), et R_3 autour de z_2 . Ces rotations s'écrivent sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 R_1(\psi) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\psi) & -\sin(\psi) \\ 0 & \sin(\psi) & \cos(\psi) \end{bmatrix} \\
 R_2(\theta) &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 R_3(\phi) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

La matrice de rotation R_{AB} est définie par

$$\begin{aligned}
 R_{AB} &= R_1(\psi)R_2(\theta)R_3(\phi) \\
 &= \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi)\cos(\theta) & \sin(\phi)\sin(\theta) \\ \cos(\psi)\sin(\phi) & \cos(\psi)\cos(\phi)\cos(\theta) - \sin(\psi)\sin(\theta) & -\cos(\psi)\cos(\phi)\sin(\theta) - \sin(\psi)\cos(\theta) \\ \sin(\psi)\sin(\phi) & \sin(\psi)\cos(\phi)\cos(\theta) + \cos(\psi)\sin(\theta) & -\sin(\psi)\cos(\phi)\sin(\theta) + \cos(\psi)\cos(\theta) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

et la vitesse angulaire ω par

$$\omega = \begin{bmatrix} \sin(\phi) \cos(\theta) & \cos(\phi) & 0 \\ \cos(\phi) \sin(\theta) & -\sin(\phi) & 0 \\ \cos(\theta) & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = A(\phi, \theta) \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

Le calcul de l'équation d'équilibre va nécessiter la dérivation de l'énergie cinétique et donc de la matrice $A(\phi, \theta)$, ce qui va introduire des termes non linéaires uniquement dus au paramétrage (non-linéarité extrinsèque). L'expression des non-linéarités sera composée de termes pouvant poser des difficultés de résolution numérique. Ainsi, par exemple, une singularité apparaît pour les cas où la rotation est la matrice identité. En effet, une infinité de combinaisons est possible pour les trois angles.

Nous allons donc nous intéresser à une autre paramétrisation dans le but de simplifier l'écriture et le calcul des énergies du système.

3.2.2 Groupes de Lie

Pour une introduction aux groupes de Lie, le lecteur pourra se reporter à l'annexe B et à la bibliographie ([33], [34], [36] et [47] entre autres).

L'équation d'équilibre d'un système peut être établie en écrivant l'énergie dans un groupe de Lie. Les variables sont regroupées sous formes de matrice dans la définition des éléments du groupe permettant d'obtenir des expressions plus concises. De plus, la fonction exponentielle qui sera utilisée (cf. annexe B.3) est une carte au voisinage de 0, contrairement aux angles d'Euler.

Ainsi, la dynamique des solides rigides peut être exprimée à l'aide du groupe de Lie $SO(3)$, i.e., l'ensemble des matrices de rotation R de dimension 3×3 telles que $R^T = R^{-1}$ et $\det(R) = 1$. Les vitesses de rotations sont les éléments de la matrice antisymétrique $\widehat{\Omega} = R^T \dot{R}$ qui appartient à l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(3)$. L'équation de la dynamique du système est alors l'équation d'Euler-Poincaré (cf. par exemple [22] page 99)

$$J\dot{\Omega} - ad^*(\Omega)J\Omega = W \quad (3.2)$$

où, J est la matrice d'inertie du solide, Ω le pseudo-vecteur composé des trois éléments de $\widehat{\Omega}$ et W l'excitation. La définition du co-adjoint ad^* est donnée par l'équation (3.19).

L'équation (3.2) peut être obtenue en minimisant l'énergie cinétique du solide

$$E_c = \frac{1}{2} \Omega^T J \Omega.$$

Il est également possible de trouver cette équation grâce au théorème de Noether. Dans le cas du groupe $SO(3)$, une quantité est conservée : le moment cinétique (cf. [2] pages 285 et 319 par exemple).

Le modèle de poutre de Reissner ([42]) qui va être défini dans la prochaine section a pour particularité d'être géométriquement exact. La cinématique a une expression très concise prenant en compte les non-linéarités géométriques ainsi que les couplages entre les degrés de liberté.

3.3 Le modèle de poutre de Reissner, hypothèses géométriques et conditions aux limites

Cette section présente les hypothèses du modèle de poutre de Reissner. Une fois ces hypothèses formulées, la cinématique de la poutre sera exprimée dans un groupe de Lie.

3.3.1 Géométrie

Une poutre de Reissner \mathfrak{B} est décrite comme un assemblage continu de sections planes parfaitement rigides ([8], [42]). Ces sections sont indexées par l'abscisse curviligne $X \in [0, L]$. Tous les déplacements de la poutre sont définis par les six degrés de liberté de chaque section \mathcal{S}_X (trois en translation et trois en rotation). La configuration de chaque section est exprimée dans un repère orthonormé fixe $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ (cf. figure 3.1). La poutre au repos est rectiligne et a une section circulaire :

- (i) La configuration de la poutre au repos \mathfrak{B}_0 est telle que pour tout $X \in [0, L]$, le centre de gravité G_X de chaque section \mathcal{S}_X a pour coordonnées $(x_1, x_2, x_3) = (X, 0, 0)$ et \mathcal{S}_X est orthogonale à l'axe $(0, \mathbf{e}_1)$.
- (ii) Les centres de gravité G_X sont repérés par le vecteur translation $\overrightarrow{OG_X} = \mathbf{r}(X, t) \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$.
- (iii) L'orientation de chaque section \mathcal{S}_X est finalement repérée par la matrice de rotation $R(X, t)$ qui décrit les trois rotations subies dans l'espace. Ainsi, tout point M de coordonnées (X, Y, Z) dans la configuration au repos \mathfrak{B}_0 est repéré dans la configuration $\mathfrak{B}(t)$ pour tout $(X, t) \in [0, L] \times \mathbb{R}^+$ par le vecteur

$$\overrightarrow{OM} = \mathbf{x}(X, t) = \mathbf{r}(X, t) + R(X, t)\mathbf{w}_0(Y, Z), \quad (3.3)$$

où $\mathbf{w}_0(Y, Z) = Y\mathbf{w}_2 + Z\mathbf{w}_3$ ($(G_X, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ est la base liée à la section \mathcal{S}_X).

Grâce à l'hypothèse d'assemblage continu des section, les fonctions \mathbf{r} et R sont continues sur $X \in [0, L]$. Dans la suite de cette thèse, \mathbf{r} et R seront considérées comme des fonctions \mathcal{C}^2 .

Du point de vue des déformations, une variable $\Gamma = R^T \mathbf{r}'$ représente la traction/compression et le cisaillement, tandis que $\Pi = R^T R'$ illustre la torsion et la flexion. Cependant, il faut préciser que ce modèle ne peut prendre en compte l'effet de Poisson (variation de la section due à la traction/compression) puisque les section sont supposées parfaitement rigides.

3.3.2 Expression dans $SO(3) \times \mathbb{R}^3$

Le vecteur translation \mathbf{r} est défini dans \mathbb{R}^3 . La partie rotation de la cinématique amène l'utilisation du groupe de Lie $SO(3)$. En effet, l'ensemble

$$SO(3) = \{R \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, RR^T = \mathbf{1}_3, \det(R) = 1\}, \quad (3.4)$$

est le groupe spécial orthonormal de dimension 3, il contient toutes les rotations dans l'espace qui préservent l'orientation. Il s'agit d'un sous-groupe du groupe orthonormal $O(3)$ défini par

$$O(3) = \{R \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, RR^T = \mathbf{1}_3, \det(R) = \pm 1\}. \quad (3.5)$$

L'équation 3.3 est donc exprimée dans $SO(3) \times \mathbb{R}^3$. Dominique Primaut a détaillé dans sa thèse [8] l'expression de la dynamique de la poutre de Reissner dans cet ensemble.

Cependant, cette expression nécessite de travailler avec deux variables sur deux groupes différents ($SO(3)$ et \mathbb{R}^3) et par conséquent est composée d'un système de deux équations à deux inconnues. Ce système, important en nombre de termes, est difficile à manier avec les séries de Volterra. C'est la raison pour laquelle, une formulation plus concise doit être trouvée. Cette formulation sera écrite dans le groupe $SE(3)$.

3.3.3 Expression dans $SE(3)$

Le groupe spécial euclidien est défini par :

$$SE(3) = \{H = \begin{bmatrix} R & \mathbf{r} \\ 0_{13} & 1 \end{bmatrix}, R \in SO(3), \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3\}. \quad (3.6)$$

C'est un groupe de Lie qui peut être identifié à l'ensemble $SO(3) \times \mathbb{R}^3$ décrit précédemment (cf. [22]).

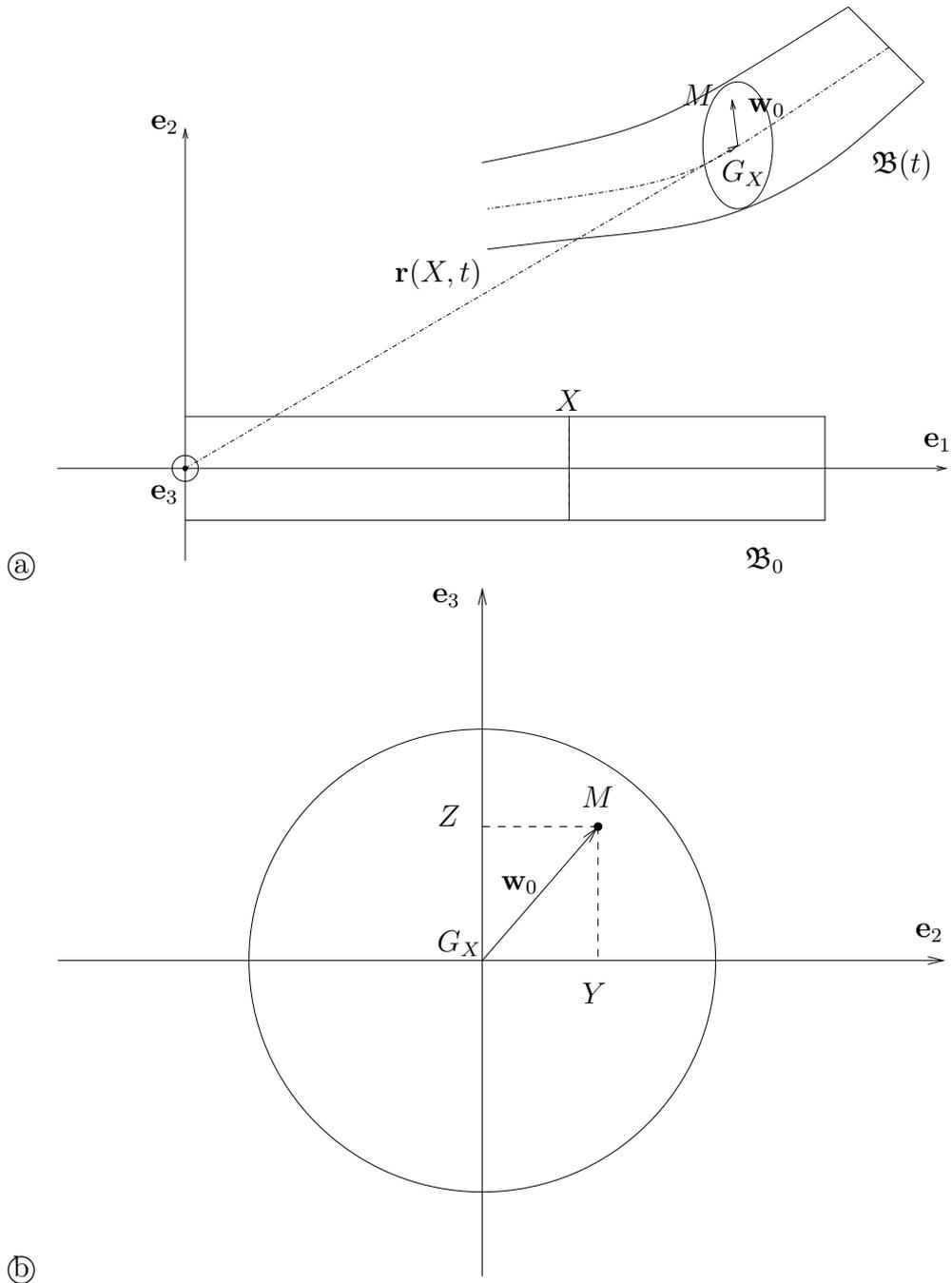


FIGURE 3.1 – Position du point M de la poutre. La position de G_X est définie par le vecteur \mathbf{r} . Dans cette section qui a subi une rotation R , le point M est défini par le vecteur $\mathbf{w}_0 = G_X M$.

L'équation 3.3 peut alors se mettre sous la forme

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(X, t) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(X, t) & \mathbf{r}(X, t) \\ 0_{13} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

$$= H(X, t)P \quad (3.8)$$

où H est bien un élément de $SE(3)$.

L'ensemble des éléments H de structure $H = \begin{bmatrix} R & \mathbf{r} \\ 0_{13} & 1 \end{bmatrix}$ avec $R \in SO(3)$ et $r \in \mathbb{R}^3$, défini bien un groupe multiplicatif. En effet, il possède les propriétés suivantes : fermeture (H_1H_2 est dans le groupe), associativité ($H_1(H_2H_3) = (H_1H_2)H_3$), inverse ($H^{-1} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T\mathbf{r} \\ 0_{13} & 1 \end{bmatrix}$ appartient au groupe) et élément identité ($e = e^{-1} = \mathbf{1}_4$).

Ce groupe est utilisé en robotique, car il est bien adapté à l'expression des mouvements de corps rigides (translations et rotations). Le calcul des énergies nécessaire à l'établissement de l'équation d'équilibre, nécessite le calcul des variations temporelles (vitesses) et spatiales (déformations) des éléments H du groupe.

L'algèbre associée $\mathfrak{se}(3)$ permet de définir les vitesses et déformations :

$$\widehat{\mathbf{T}}(X, t) = H(X, t)^{-1}\dot{H}(X, t) \quad (3.9)$$

$$\widehat{\mathbf{\Xi}}(X, t) = H(X, t)^{-1}H'(X, t) - H_0^{-1}(X)H'_0(X), \quad (3.10)$$

où $H_0(X)$ est la configuration de la poutre au repos. Pour une poutre rectiligne

$$H_0(X) = \begin{bmatrix} I & XE_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

Pour des soucis de clarté, les arguments (X, t) seront omis dans la suite de ce manuscrit. Le lecteur doit garder à l'esprit que les déplacements H , les vitesses \mathbf{T} et les déformations $\mathbf{\Xi}$ sont toujours définis pour une section d'abscisse X à l'instant t .

$\widehat{\mathbf{T}}$ est un opérateur transformant le vecteur $T = \begin{bmatrix} \omega \\ v \end{bmatrix}$ en une matrice carrée de dimension 4 :

$$\widehat{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \widehat{\omega} & v \\ 0_{13} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

où $\widehat{\omega}$ est une matrice carrée antisymétrique de dimension 3 élément de $\mathfrak{so}(3)$ (cf. section 3.2.2), représentant la vitesse angulaire et v un vecteur de vitesse en translation de dimension 3.

De même, Ξ (respectivement $\widehat{\Xi}$) est un vecteur de dimension 6 (resp. matrice carrée de dimension 4) composée du vecteur torsion/flexion Π (resp. matrice de torsion/flexion $\widehat{\Pi}$) et du vecteur de déformation Γ (traction/compression et cisaillement) :

$$\widehat{\Xi} = \begin{bmatrix} \widehat{\Pi} & \Gamma \\ 0_{13} & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

Π et Γ sont définis en fonction du vecteur position \mathbf{r} et de la matrice de rotation R :

$$\widehat{\Pi} = R^T R' \quad (3.14)$$

$$\Gamma = R^T \mathbf{r}'. \quad (3.15)$$

3.4 Établissement de l'équation d'équilibre, principe de Hamilton

3.4.1 Équations d'équilibre du système conservatif

Le principe de Hamilton stipule que l'équation d'équilibre de la poutre a un couple de solutions (\mathbf{T}, Ξ) tel que $\delta A = \int_{t_1}^{t_2} (\delta L(\mathbf{T}, \Xi) + \delta E_{ext}) dt$ s'annule. $L(\mathbf{T}, \Xi) = E_c(\mathbf{T}) - E_p(\Xi)$ est le lagrangien du système.

Pour la poutre de Reissner, ces énergies sont définies par (cf. démonstration en annexe D) :

$$E_c = \int_0^L \frac{1}{2} \mathbf{T}^T J \mathbf{T} dX, \quad (3.16)$$

$$E_p = \int_0^L \frac{1}{2} \Xi^T \Sigma \Xi dX, \quad (3.17)$$

et δE_{ext} l'énergie des forces extérieures définie par

$$\delta E_{ext} = \frac{1}{2} \delta \theta^T W(X, t)^T = \frac{1}{2} \delta \theta^T \begin{bmatrix} m^T \\ f^T \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \delta \theta^T \Phi(X) f(t) \quad (3.18)$$

où $\Phi = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \dots \\ \phi_6 \end{bmatrix}$.

Remarque 8

Grâce à la paramétrisation dans un groupe de Lie, il est facile de démontrer que ce lagrangien est invariant par action à gauche. En effet, multiplions H

à gauche par G , les variables \mathbf{T} et $\mathbf{\Xi}$ deviennent

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_G &= (GH)^{-1}\dot{G}H \\ &= H^{-1}G^{-1}G\dot{H} \\ &= H^{-1}\dot{H} = \mathbf{T} \\ \mathbf{\Xi}_G &= (GH)^{-1}(GH)' \\ &= H^{-1}G^{-1}GH' \\ &= H^{-1}H' = \mathbf{\Xi}.\end{aligned}$$

Car \mathbf{T} et $\mathbf{\Xi}$ sont définis comme champs de vecteur invariants à gauche. Donc toute définition reposant sur \mathbf{T} et $\mathbf{\Xi}$ est invariante sous l'action du groupe.

Afin d'utiliser le principe de Hamilton, l'expression d'une petite variation δE_c et δE_p des énergies cinétique et potentielle est nécessaire. Pour l'énergie cinétique (la démarche est identique pour l'énergie potentielle) on a :

$$\delta E_c = \frac{1}{2} \int_0^L \delta \mathbf{T}^T J \mathbf{T} dX,$$

Considérons une petite variation de H , définie par $\delta H = e^{\delta\theta}$. $\delta \mathbf{T}$ peut être exprimé en fonction de $\delta\theta$ grâce à la relation $\widehat{\mathbf{T}}_\epsilon(X, t) = H_\epsilon(X, t)^{-1} \dot{H}_\epsilon(X, t)$ où $H_\epsilon(X, t) = H e^{\epsilon \widehat{\delta\theta}(X, t)}$. Un développement de Taylor jusqu'à l'ordre 1 en ϵ donne :

$$\widehat{\mathbf{T}}_\epsilon(X, t) = \widehat{\mathbf{T}}(X, t) + \epsilon \left(\widehat{\delta\dot{\theta}(X, t)} + \widehat{\mathbf{T}}(X, t) \widehat{\delta\theta}(X, t) - \widehat{\delta\theta}(X, t) \widehat{\mathbf{T}}(X, t) \right) + o(\epsilon^2).$$

Dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{se}(3)$, le produit matriciel $\widehat{a}\widehat{b} - \widehat{b}\widehat{a}$ est la définition du crochet de Lie $[\widehat{a}; \widehat{b}]$. Par conséquent :

$$\begin{aligned}\widehat{\delta\mathbf{T}}(X, t) &= \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \widehat{\mathbf{T}}(X, t)_\epsilon = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\widehat{\mathbf{T}}(X, t)_\epsilon - \widehat{\mathbf{T}}(X, t)}{\epsilon} \\ &= \widehat{\delta\dot{\theta}(X, t)} + [\widehat{\mathbf{T}}(X, t); \widehat{\delta\theta}(X, t)] \\ \delta \mathbf{T}(X, t) &= \dot{\delta\theta}(X, t) + ad_{\mathbf{T}(X, t)}(\delta\theta(X, t)).\end{aligned}$$

Remarque 9

Il s'agit d'un résultat exact puisque la dérivée de Lie inclut une limite avec ϵ tendant vers zéro.

L'adjoint est l'expression sous forme pseudo-vectorielle du crochet de Lie (cf. définition B.13). Cette notation sera utilisée dans la suite puisque les énergies sont des scalaires exprimés grâce à des pseudo-vecteurs.

Le co-adjoint $ad_a^*(b)$ est le dual de l'adjoint, défini par le produit de dualité (cf. [8, 36])

$$\langle b, ad_a^*\left(\begin{bmatrix} m \\ f \end{bmatrix}\right)\rangle = \langle ad_a(b), \begin{bmatrix} m \\ f \end{bmatrix}\rangle. \quad (3.19)$$

Le co-adjoint représente l'action de l'algèbre de Lie sur son dual, son argument est homogène à un couple.

On a alors

$$\begin{aligned} \delta E_c &= \frac{1}{2} \int_0^L -\delta\theta^T ad_{\mathbf{T}}^*(J\mathbf{T}) + \dot{\delta\theta}^T J\mathbf{T} dX \\ \delta E_p &= \frac{1}{2} \int_0^L -\delta\theta^T ad_{H^{-1}H'}^*(\Sigma\Xi) + \delta\theta'^T \Sigma\Xi dX. \end{aligned}$$

La variation δA est donc définie par

$$\begin{aligned} \delta A &= \int_{t_1}^{t_2} (\delta E_c - \delta E_p + \delta E_{ext}) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left(-\delta\theta^T ad_{\mathbf{T}}^*(J\mathbf{T}) + \dot{\delta\theta}^T J\mathbf{T} \right) dX \\ &\quad - \int_0^L \left(-\delta\theta^T ad_{H^{-1}H'}^*(\Sigma\Xi) + \delta\theta'^T \Sigma\Xi \right) dX \\ &\quad + \delta\theta^T W(X, t)^T dt. \end{aligned} \quad (3.20)$$

En utilisant les conditions aux limites

$$\begin{aligned} W(0) &= \begin{bmatrix} m_0 & f_0 \end{bmatrix} \\ W(L) &= \begin{bmatrix} m_L & f_L \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

une intégration par partie est effectuée sur $\dot{\delta\theta}$ et $\delta\theta'$

$$\begin{aligned} \delta A &= \int_{t_1}^{t_2} \left[-\delta\theta^T \Sigma\Xi + \delta\theta^T W^T(X) \right]_0^L \\ &\quad + \int_0^L \delta\theta^T ad_{H^{-1}H'}^*(\Sigma\Xi) + \delta\theta^T \Sigma\Xi' - \delta\theta^T ad_{\mathbf{T}}^*(J\mathbf{T}) \\ &\quad - \delta\theta^T J\dot{\mathbf{T}} + \delta\theta^T W(X, t)^T dX dt. \end{aligned}$$

Les équations du mouvement sont alors

$$\begin{cases} \forall (X, t) \in]0; L[\times \mathbb{R}^{+*}, \\ J\dot{\mathbf{T}} - \Sigma\dot{\mathbf{\Xi}}' = ad_{H^{-1}H'}^*(\Sigma\mathbf{\Xi}) - ad_{\mathbf{T}}^*(J\mathbf{T}) + W(X, t)^T \\ \Sigma\mathbf{\Xi}(0, t) = \begin{bmatrix} m_0 \\ f_0 \end{bmatrix} \\ \Sigma\mathbf{\Xi}(L, t) = \begin{bmatrix} m_L \\ f_L \end{bmatrix} \end{cases} \quad (3.21)$$

L'équation (3.21) est une équation aux dérivées partielles sur H . Il y donc une relation entre \mathbf{T} et $\mathbf{\Xi}$. En dérivant les définitions 3.9 et 3.10, on peut montrer aisément que

$$\widehat{\mathbf{T}}' - \widehat{\mathbf{\Xi}} = \widehat{\mathbf{T}}(\widehat{\mathbf{\Xi}} + \widehat{H_0^{-1}H'_0}) - (\widehat{\mathbf{\Xi}} + \widehat{H_0^{-1}H'_0})\widehat{\mathbf{T}} = \left[\widehat{\mathbf{T}}; \widehat{\mathbf{\Xi}} + \widehat{H_0^{-1}H'_0} \right]. \quad (3.22)$$

Remarque 10

Dans ce travail, les matrices J et Σ sont considérées comme constantes sous l'hypothèse de section constante le long de la poutre, et d'homogénéité du matériau (loi de comportement constante en espace et en temps). Ce sont des matrices carrées de dimension 6 définies par

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0_{33} \\ 0_{33} & J_4 \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} I_\rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

et

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0_{33} \\ 0_{33} & \Sigma_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} GI_\rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & EI_a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & EI_a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & EA & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & GA & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & GA \end{bmatrix}, \quad (3.24)$$

avec :

- $I_a = \frac{\pi R^4}{4}$, moment d'inertie axial pour une section circulaire
- $I_\rho = 2I_a = \frac{\pi R^4}{2}$, moment d'inertie polaire pour une section circulaire
- A , aire de la section

- E , module de Young
- G , module de cisaillement.

Remarque 11

Il n'est pas envisageable d'appliquer les séries de Volterra au système (3.21)-(3.22) de deux équations à deux inconnues. En effet l'équation (3.22) doit être toujours vérifiée afin que les valeurs de \mathbf{T} et $\mathbf{\Xi}$ obtenues dans l'algèbre correspondent bien à un même élément H dans le groupe. Pour cette raison, la résolution de cette équation doit être exacte, il n'est pas possible de l'approximer par les séries de Volterra.

3.4.2 Ajout de l'amortissement

Une fois les équations d'équilibre définies, il est possible « d'ajouter » de l'amortissement. L'amortissement est difficile à modéliser puisqu'il implique de nombreux phénomènes à différentes échelles (frottement de l'air, viscosité du matériau...). Dans ce travail, pour les besoins de la synthèse sonore, nous utiliserons un modèle bien connu d'amortissement fluide (cf. [28]) avec un coefficient issu de l'expérience en fonction des propriétés choisies (durée du son...).

Soit le terme d'amortissement $\mathcal{A}(t)$ défini par

$$\mathcal{A}(t) = a\mathbf{T}$$

Ce terme sera ajouté au modèle conservatif (équation 3.21).

Les densités linéiques d'énergie cinétique et potentielle s'écrivent :

$$e_c(X, t) = \frac{1}{2} \mathbf{T}(X, t)^T J(X) \mathbf{T}(X, t) \quad (3.25)$$

$$e_p(X, t) = \frac{1}{2} \mathbf{\Xi}(X, t)^T \Sigma \mathbf{\Xi}(X, t) \quad (3.26)$$

l'énergie totale est donc

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) &= \int_0^L \left(e_c(X, t) + e_p(X, t) \right) dX \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \left(\mathbf{T}(X, t)^T J \mathbf{T}(X, t) + \mathbf{\Xi}(X, t)^T \Sigma \mathbf{\Xi}(X, t) \right) dX. \end{aligned}$$

La dérivée temporelle de l'énergie totale est de la forme (J et Σ étant des

matrices diagonales définies positives)

$$\begin{aligned}
\dot{\mathcal{E}}(t) &= \int_0^L \left(\mathbf{T}(X,t)^T J \dot{\mathbf{T}}(X,t) + \boldsymbol{\Xi}(X,t)^T \Sigma(X) \dot{\boldsymbol{\Xi}}(X,t) \right) dX \\
&= \int_0^L \left[\mathbf{T}(X,t)^T \left(ad_{\mathbf{T}(X,t)}^*(J(X) \mathbf{T}(X,t)) + ad_{H^{-1}(X,t)H'(X,t)}^*(\Sigma(X) \boldsymbol{\Xi}(X,t)) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \Sigma(X) \partial_X \boldsymbol{\Xi}(X,t) \right) + \boldsymbol{\Xi}(X,t)^T \Sigma(X) \left(\partial_X \mathbf{T}(X,t) - ad_{\mathbf{T}(X,t)}(\boldsymbol{\Xi}(X,t)) \right) \right] dX \\
&\quad - a \int_0^L \mathbf{T}(X,t)^T J \mathbf{T}(X,t) dX + \int_0^L \mathbf{T}(X,t)^T W(X,t) dX \tag{3.27}
\end{aligned}$$

D'après l'équation 3.20, le premier terme du membre de droite de l'équation 3.27 est nul.

Les termes aux limites en $X = 0$ et $X = L$ sont nuls pour des conditions de Dirichlet ou de Neumann. On a donc finalement

$$\dot{\mathcal{E}}(t) = -a \int_0^L \mathbf{T}(X,t)^T J(X) \mathbf{T}(X,t) dX + \int_0^L \mathbf{T}(X,t)^T W(X,t) dX.$$

Ainsi, quand l'excitation $W = 0$, le système est conservatif ($\dot{\mathcal{E}} = 0$) si a est nul, tandis qu'il est dissipatif ($\dot{\mathcal{E}} < 0$), si a est positif.

Les équations du mouvement sont alors

$$\begin{cases}
\forall(X,t) \in]0; L[\times \mathbb{R}^{+*}, \\
J\dot{\mathbf{T}} + a\mathbf{T} - \Sigma\boldsymbol{\Xi}' = ad_{H^{-1}H'}^*(\Sigma\boldsymbol{\Xi}) - ad_{\mathbf{T}}^*(J\mathbf{T}) + W(X,t)^T \\
\Sigma\boldsymbol{\Xi}(0,t) = \begin{bmatrix} m_0 \\ f_0 \end{bmatrix} \\
\Sigma\boldsymbol{\Xi}(L,t) = \begin{bmatrix} m_L \\ f_L \end{bmatrix}
\end{cases} .$$

La prochaine section consiste en un travail de réécriture nécessaire afin de ne travailler que sur une seule variable u à la place de \mathbf{T} et $\boldsymbol{\Xi}$ et ainsi ne plus avoir de la contrainte d'une seconde équation.

3.5 Introduction d'une carte basée sur l'exponentielle pour une étude locale

Comme mentionné dans la section précédente, l'expression finale de l'équation d'équilibre de la poutre de Reissner doit être ramenée à une équation à

une inconnue. De plus, pour pouvoir être résolues par les séries de Volterra, les non-linéarités doivent être de forme polynomiale.

La réécriture se fera en quatre étapes :

- Exprimer \mathbf{T} et $\mathbf{\Xi}$ en fonction de u
- Exprimer $d^i \exp(\hat{u})$ avec $\hat{u} \in \mathfrak{se}(3)$ et $i \in \{1, 2\}$ en fonction de $d^j \exp(\hat{\alpha})$ avec $\hat{\alpha} \in \mathfrak{so}(3)$ et $j \in \{1, 2, 3\}$
- Développer en série de Taylor les fonction sin et cos présentes dans les expressions de $d^j \exp(\hat{\alpha})$
- Tronquer toutes les expressions à l'ordre 2 et isoler les termes linéaires et non linéaires.

L'équation 3.21 est destinée à déterminer les vitesses et déformations de la poutre de Reissner dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{se}(3)$. Cependant la deuxième relation entre \mathbf{T} et $\mathbf{\Xi}$ ne peut être approximée, l'application exponentielle va être utilisée pour exprimer les éléments H (et par conséquent \mathbf{T} et $\mathbf{\Xi}$) en fonction d'une seule variable $u(X, t)$.

Les éléments H du groupe $SE(3)$ peuvent être définis comme des déplacements relatifs par rapport à H_0 de la manière suivante (cf. figure 3.2) :

$$H(X, t) = \psi_X(u(X, t)) = H_0(X) e^{\hat{u}(X, t)} \quad (3.28)$$

où $\psi_X(u(X, t))$ est la carte exponentielle locale entre \mathbb{R}^6 et le groupe (cf. annexe B) autour du point d'équilibre H_0 , avec $H_0(X) = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_3 & XE_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in SE(3)$, et $u(X, t) = \begin{bmatrix} \alpha(X, t) \\ \beta(X, t) \end{bmatrix} \in \mathfrak{se}(3)$.

La réécriture du système (3.21) à (3.22) est réalisée grâce aux équations 3.9 et 3.10. En remplaçant H par son expression en u pour récrire \mathbf{T} et $\mathbf{\Xi}$, apparaît la dérivée de l'exponentielle qui doit être définie.

Définition 15

Soient G_1 et G_2 deux groupes de Lie avec une fonction ψ telle que $\forall g \in G_1, \psi(g) \in G_2$. La différentielle trivialisée à gauche de la fonction ψ est définie par (cf. [34]) :

$$d\psi(g) = (L_{\psi(g)^{-1}} \circ \psi \circ L_g)'(e). \quad (3.29)$$

Soit dans notre cas $\psi = \exp$, alors G_1 est l'algèbre de Lie $\mathfrak{se}(3)$ et $G_2 = SE(3)$. La dérivée $\exp'_u(\eta)$ de la fonction exponentielle au point $u \in \mathfrak{se}(3)$ appliquée à un vecteur $\eta \in T_u \mathfrak{se}(3) \simeq \mathfrak{se}(3)$ (cf. annexe B) donne le vecteur tangent au point $\exp(\hat{u}) \in SE(3)$, vecteur qui appartient au plan tangent au groupe $SE(3)$ au point $\exp(\hat{u})$ i.e. $T_{\exp(\hat{u})} SE(3)$. Il est possible de redéfinir cette dérivée en appliquant une rotation à gauche (cf. [35]), afin de revenir à

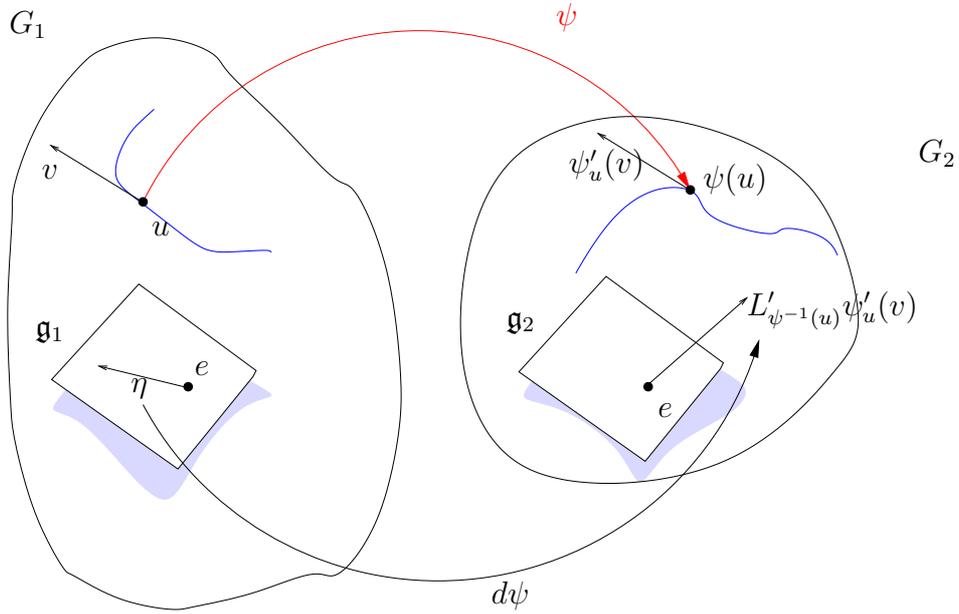


FIGURE 3.2 – La fonction ψ permet d’obtenir les coordonnées généralisées $u \in G_1$ de $H = \psi(u) \in G_2$. $\eta \in \mathfrak{g}_1$ est un vecteur de l’algèbre de Lie de G_1 .

l’élément neutre aussi bien dans le groupe que dans l’algèbre, ce qui permet d’écrire (cf. figure 3.3)

$$dexp(u)\eta = dL_{exp(\hat{u})^{-1}}(exp'_u(\eta)). \quad (3.30)$$

Les variables de l’équation (3.21) deviennent

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \omega \\ v \end{bmatrix} = H^{-1}\dot{H} = exp(-\hat{u})exp(\hat{u}) = dexp(\hat{u})\dot{u} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{\Xi} &= \begin{bmatrix} \Pi \\ \Gamma \end{bmatrix} = H^{-1}H' - H_0^{-1}H'_0 & (3.32) \\ &= exp(-\hat{u})exp'(\hat{u}) + exp(-\hat{u})H_0^{-1}H'_0exp(\hat{u}) - H_0^{-1}H'_0 \\ &= dexp(\hat{u})u' + Ad_{e^{-\hat{u}}}(H_0^{-1}H'_0) - H_0^{-1}H'_0. \end{aligned}$$

Puis les dérivées de \mathbf{T} et $\mathbf{\Xi}$ peuvent être calculées grâce à la formulation aux ordres supérieurs présentée dans [34]

$$\dot{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \dot{\omega} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = dexp(u)\ddot{u} + (d^2exp(\hat{u})\dot{u})\dot{u} \quad (3.33)$$

$$\dot{\mathbf{\Xi}}' = \begin{bmatrix} \Pi' \\ \Gamma' \end{bmatrix} = dexp(u)u'' + (d^2exp(\hat{u})u')u' + Ad'_{e^{-\hat{u}}}(H_0^{-1}H'_0). \quad (3.34)$$

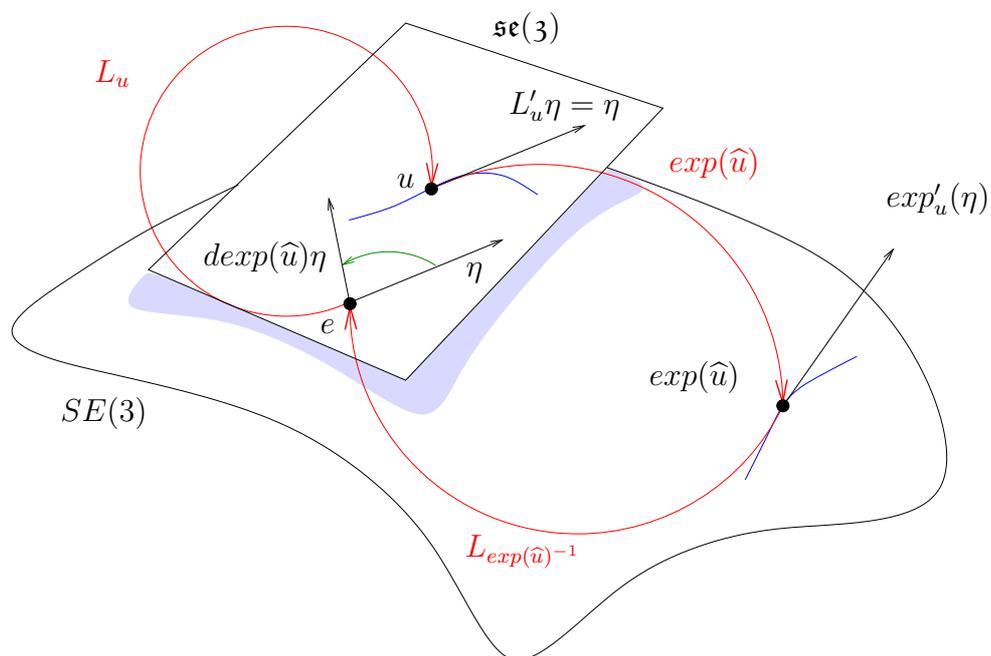


FIGURE 3.3 – Illustration de l'opérateur $dexp(u)$: u est un point de l'algèbre $\mathfrak{se}(3)$ et $\eta = u^{-1}u'$ un vecteur du plan tangent à l'algèbre en l'identité $T_e\mathfrak{se}(3) \simeq \mathfrak{se}(3)$. La dérivée de l'exponentielle peut être exprimée grâce à $dexp(u)\eta$.

Ainsi les équations 3.21 à 3.21 deviennent :

$$\begin{aligned}
& \forall X \in]0; L[, \\
& Jd_{exp}(\hat{u})\ddot{u} + J(d_{exp}^2(\hat{u})\dot{u})\dot{u} \\
& - \Sigma d_{exp}(\hat{u})u'' - \Sigma(d_{exp}^2(\hat{u})u')u' - \Sigma Ad'_{e^{-\hat{u}}}(H_0^{-1}H'_0) \\
= & ad_{d_{exp}(\hat{u})u'}^* \Sigma [d_{exp}(\hat{u})u' + Ad_{e^{-\hat{u}}}(H_0^{-1}H'_0) - H_0^{-1}H'_0] \\
& - ad_{d_{exp}(\hat{u})\dot{u}}^* Jd_{exp}(\hat{u})\dot{u} + W, \tag{3.35}
\end{aligned}$$

$$\Sigma [d_{exp}(\hat{u}(0, t))u'(0, t) + Ad_{e^{-\hat{u}(0, t)}}(H_0^{-1}H'_0) - H_0^{-1}H'_0] = \begin{bmatrix} m_0 \\ f_0 \end{bmatrix} \tag{3.36}$$

$$\Sigma [d_{exp}(\hat{u}(L, t))u'(L, t) + Ad_{e^{-\hat{u}(L, t)}}(H_0^{-1}H'_0) - H_0^{-1}H'_0] = \begin{bmatrix} m_L \\ f_L \end{bmatrix} \tag{3.37}$$

L'équation 3.22 est quant à elle vérifiée automatiquement par ce changement de variable (cf. annexe C.4).

Afin d'obtenir une écriture plus simple, bien adaptée aux séries de Volterra, les formules trigonométriques comprises dans les définitions de $d^n exp$ (cf. annexe C.1) seront remplacées par le développement de Taylor jusqu'à l'ordre 2 (cf. annexe C.2).

La simulation par les séries de Volterra étant tronquée à l'ordre 2, il est possible d'effectuer le développement de Taylor des opérateurs contenus dans ces matrices sans changer la qualité de l'approximation.

Multiplions l'équation 3.35 par $d_{exp}^T(\hat{u})$. Elle peut être réécrite sous la forme :

$$\mathcal{A}(u, \ddot{u}) + \mathcal{B}(u, \dot{u}) + \mathcal{C}(u, u'') + \mathcal{D}(u, u') + \mathcal{F}(u, \dot{u}) = d^T exp(\hat{u})W. \tag{3.38}$$

où les cinq composantes de l'équation (3.38) sont définies par (détails en annexe C.3) :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(u, \ddot{u}) &= d_{exp}^T(\hat{u})Jd_{exp}(\hat{u})\ddot{u} \simeq \mathcal{A}_1\ddot{u} + \mathcal{A}_2(u)\ddot{u} \\
\mathcal{B}(u, \dot{u}) &= d_{exp}^T(\hat{u})J(d_{exp}^2(\hat{u})\dot{u})\dot{u} + d_{exp}^T(\hat{u})ad_{d_{exp}(\hat{u})\dot{u}}^* Jd_{exp}(\hat{u})\dot{u} \simeq \mathcal{B}_2(\dot{u})\dot{u} \\
\mathcal{C}(u, u'') &= -d_{exp}^T(\hat{u})\Sigma d_{exp}(\hat{u})u'' \simeq \mathcal{C}_1u'' + \mathcal{C}_2(u)u'' \\
\mathcal{D}(u, u') &= -d_{exp}^T(\hat{u})\Sigma(d_{exp}^2(\hat{u})u')u' \\
&\quad - d_{exp}^T(\hat{u})ad_{d_{exp}(\hat{u})u'}^* \Sigma [d_{exp}(\hat{u})u' + Ad_{e^{-\hat{u}}}(H_0^{-1}H'_0) - H_0^{-1}H'_0] \\
&\quad - d_{exp}^T(\hat{u})\Sigma Ad'_{e^{-\hat{u}}}(H_0^{-1}H'_0) \\
&\simeq \mathcal{D}_1u' + \mathcal{D}_2(u')u' + \mathcal{E}_2(u, u') \\
\mathcal{F}(u, \dot{u}) &= ad_{exp}^T(\hat{u})Jd_{exp}(\hat{u})\dot{u} \simeq \mathcal{F}_1\dot{u} + \mathcal{F}_2(u)\dot{u}
\end{aligned}$$

3.6 Conclusion

Ce chapitre a permis d'établir l'équation d'équilibre d'une poutre de Reissner dans un groupe de Lie en respectant les contraintes imposées par les séries de Volterra. Le groupe $SE(3)$ a été préféré à $SO(3) \times \mathbb{R}^3$ permettant de ne travailler que sur une seule variable H contenant tous les degrés de libertés (rotations et translations).

L'équation a été établie dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{se}(3)$ permettant d'avoir une écriture concise et de travailler dans un espace vectoriel, la résolution de l'équation consistera en la variable u à partir de laquelle les vitesses \mathbf{T} et les déformations Ξ peuvent être retrouvées. Puis l'utilisation du changement de variable (3.28) permettra de repasser de l'algèbre au groupe et ainsi retrouver les valeurs des degrés de liberté pour chaque section d'abscisse curviligne X et à chaque instant t .

Grâce aux développements effectués, il est maintenant possible de calculer les noyaux de Volterra du système (3.38) afin d'identifier une structure de simulation, ce sera l'objet du prochain chapitre.

Chapitre 4

Application des séries de Volterra dans l'algèbre de Lie $se(3)$

4.1 Propriétés et opérateurs applicables aux noyaux de Volterra vectoriels

Définition

Un système causal (au sens des automaticiens) d'entrée f , de sortie u (cf. figure 4.1) est décrit par une série de Volterra de noyaux $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ si

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(\mathbb{R}^+)^n} h_n(\tau_{1:n}) f(t - \tau_1) \dots f(t - \tau_n) d\tau_{1:n}, \quad (4.1)$$

avec la notation $(\tau_{1:n}) = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ et $d\tau_{1:n} = d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_n$.

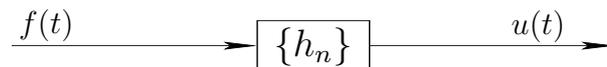


FIGURE 4.1 – Système d'entrée f et de sortie u décrit par une série de Volterra de noyaux $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$.

L'équation (4.1) peut être interprétée comme suit : pour $n = 1$ le terme est la convolution linéaire standard telle que h_1 est la réponse impulsionnelle de la contribution linéaire. Pour $n = 2$ le terme introduit une contribution quadratique de f sur la sortie u . Plus généralement, le n -ième terme est associé à une non-linéarité homogène d'ordre n .

De plus, comme dans le cas linéaire, des fonctions de transfert généralisées $H_n(s_{1:n})$ peuvent être définies comme la transformée de Laplace des réponses impulsionnelles généralisées $h_n(\tau_{1:n})$ (où $(s_{1:n}) = (s_1, \dots, s_n)$ sont

les variables de Laplace). Pour un système amorti (i.e. stable) causal, elles sont définies par

$$\forall (s_{1:n}) \in \mathcal{D} \subset (\mathbb{C}_0^+)^n, \quad H_n(s_{1:n}) = \int_{(\mathbb{R}^+)^n} h_n(\tau_{1:n}) e^{-(s_1\tau_1 + \dots + s_n\tau_n)} d\tau_{1:n},$$

où \mathcal{D} est le domaine de définition et \mathbb{C}_0^+ est l'ensemble des nombres complexes à partie réelle strictement positive (cf. [3, (29.1.2)] et [21] pour plus de détails).

Afin d'appliquer les séries de Volterra au modèle, des lois d'interconnexion seront utilisées, plus de détails à propos de ces lois et des propriétés des séries de Volterra peuvent être trouvés dans [29].

4.1.1 Lois d'interconnexion

Les lois d'interconnexion suivantes seront utiles pour résoudre le modèle. Considérons deux séries de Volterra de noyaux $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$. Les systèmes d'entrée f et de sortie u définis respectivement dans les figures 4.2, 4.3 et si $b_n = 0$ pour $n \geq 2$, dans la figure 4.4 sont toujours décrits par des séries de Volterra. Leurs noyaux $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont déterminés dans le domaine de Laplace par, respectivement ([21, p. 34,35]),

$$C_n(s_{1:n}) = A_n(s_{1:n}) + B_n(s_{1:n}), \quad (4.2)$$

$$C_n(s_{1:n}) = \sum_{p=1}^{n-1} A_p(s_{1:p}) B_{n-p}(s_{p+1:n}), \quad (4.3)$$

$$C_n(s_{1:n}) = A_n(s_{1:n}) B_1(\widehat{s_{1:n}}), \quad (4.4)$$

avec la notation $\widehat{s_{1:n}} = s_1 + \dots + s_n$.

Considérons \underline{F}_n et \underline{G}_n deux systèmes de Volterra vectoriels de même dimension. Le produit vectoriel de ces deux systèmes peut être récrit comme un noyau équivalent

$$\underline{H}_n = \sum_{p=1}^{n-1} \underline{F}_p \wedge \underline{G}_{n-p}.$$

De même, si A_n et B_n sont deux systèmes de Volterra matriciels (de dimensions respectives, $i \times j$ et $j \times k$), le produit matriciel a pour noyau équivalent

$$H_n = \sum_{p=1}^{n-1} A_p B_{n-p}.$$

4.1.2 Opérateurs de transformation vecteur/matrice

Considérons $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $\widehat{\mathbf{x}}$ est une matrice anti-symétrique définie par

$$\widehat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{se}(3)$ cet opérateur permet d'écrire un produit vectoriel comme un produit matriciel

$$\widehat{\mathbf{x}} \wedge \widehat{\mathbf{y}} = [\widehat{\mathbf{x}}; \widehat{\mathbf{y}}] = \widehat{\mathbf{x}}\widehat{\mathbf{y}} - \widehat{\mathbf{y}}\widehat{\mathbf{x}}.$$

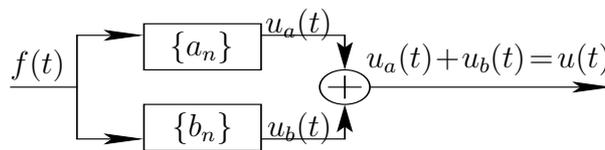


FIGURE 4.2 – Interconnexion : somme des sorties.

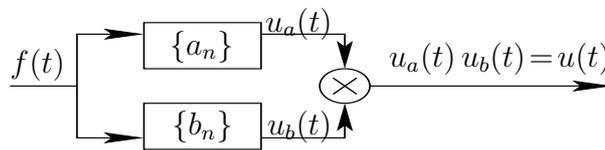


FIGURE 4.3 – Interconnexion : produit des sorties.

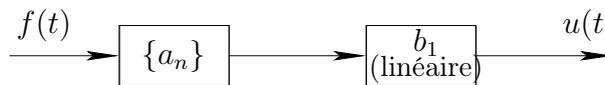


FIGURE 4.4 – Interconnexion : cascade d'un système de Volterra avec un système linéaire.

4.2 Équation des noyaux

Les séries de Volterra sont appliquées à l'équation d'équilibre établie dans l'algèbre de Lie.

L'entrée du système est une force d'excitation $f(t)$ répartie sur une distribution spatiale $\Phi(X) \in \mathbb{R}^{6 \times 1}$ (cf. équation (3.18)).

La sortie du système est le vecteur $u(X, t) = \begin{bmatrix} \alpha(X, t) \\ \beta(X, t) \end{bmatrix}$ i.e. un pseudo-vecteur dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{se}(3)$. Ainsi, les noyaux de Volterra $\mathbf{h}_n^{(X)}$ du système seront des vecteurs de dimension 6.

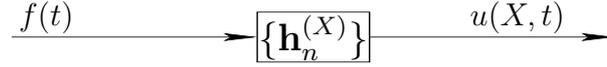


FIGURE 4.5 – Système d'entrée f et vecteur de sortie u décrit par une série de Volterra $\{\mathbf{h}_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Le système annulateur de la figure 4.6 représente l'équation 3.38 où u est défini par 4.1.

En utilisant le bloc-diagramme équivalent, l'équation des noyaux est établie en utilisant les lois d'interconnexion (cf. sections 1.3 et 1.4, [29]), i.e. $w_a(X, t) + w_b(X, t) + w_c(X, t) = 0$.

Cette équation peut être exprimée dans le domaine de Laplace :

$$\widehat{s}_{1:n}^{-2} \mathcal{A}_1 \mathbf{H}_n^{(X)}(s_{1:n}) + \mathcal{D}_1 \frac{\partial \mathbf{H}_n^{(X)}(s_{1:n})}{\partial X} + \mathcal{C}_1 \frac{\partial^2 \mathbf{H}_n^{(X)}(s_{1:n})}{\partial X^2} + \widehat{s}_{1:n} \mathcal{F}_1 \mathbf{H}_n^{(X)}(s_{1:n}) = \mathbf{E}_n^{(X)}(s_{1:n}) \quad (4.5)$$

avec le terme de droite (partie non linéaire, définie grâce aux lois d'interconnexion) défini par :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_n^{(X)}(s_{1:n}) = & \Phi_n(X) \delta_{1,n} - \sum_{p=1}^{n-1} \left[\widehat{s}_{1:n}^{-2} \left[\mathcal{A}_2(\mathbf{H}_p^{(x)}) \mathbf{H}_{n-p}^{(x)} + \mathcal{B}_2(\mathbf{H}_p^{(x)}) \mathbf{H}_{n-p}^{(x)} \right] \right. \\ & \left. + \mathcal{C}_2(\mathbf{H}_p^{(x)}) \mathbf{H}_{n-p}^{(x)''} + \mathcal{D}_2(\mathbf{H}_p^{(x)'}) \mathbf{H}_{n-p}^{(x)'} + \mathcal{E}_2(\mathbf{H}_p^{(x)}, \mathbf{H}_{n-p}^{(x)'}) - \mathcal{G}_1(\mathbf{H}_p^{(x)}) \Phi_1(X) \right] \end{aligned} \quad (4.6)$$

Les conditions aux limites d'une poutre encadrée imposent un déplacement nul et par conséquent une vitesse nulle aux extrémités de la poutre $X \in \{0, 1\}$. Les déformations étant nulles également on a

$$u(1, t) = u(0, t) = \begin{bmatrix} 0_{31} \\ 0_{31} \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

4.3 Projection modale

Le problème linéaire (équation 4.5 pour $n = 1$) peut être décomposé sur une base orthogonale de 6 composantes (une pour chaque composante de

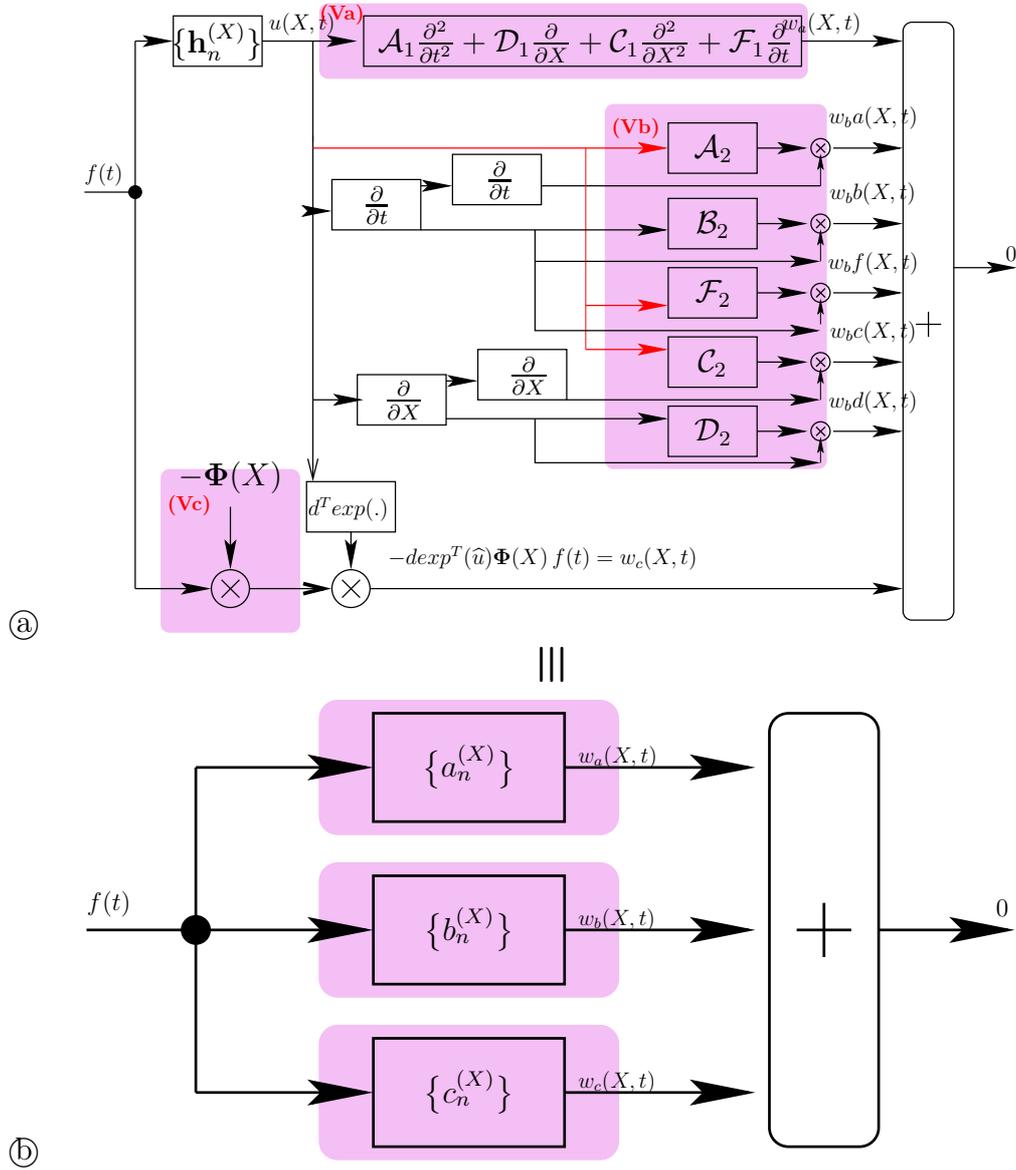


FIGURE 4.6 – Bloc-diagrammes équivalents représentant l'équation (3.38).

$u(X, t)$ définie par le vecteur :

$$\mathbf{e}_k(X) = \begin{bmatrix} \mathcal{E}_k \\ \mathcal{E}_k \end{bmatrix},$$

avec

$$\mathcal{E}_k(X) = \exp\left(\frac{-\mathcal{D}_1 \mathcal{C}_1^{-1}}{2}\right) \sqrt{\frac{2}{L}} \sinh\left(\frac{ik\pi X}{L}\right) [1_{31}] \quad (4.8)$$

qui satisfait les conditions aux limites.

Considérons un produit scalaire sur $L^2(\Omega)$ où $\forall (f, g) \in (L^2(\Omega))^2$ vecteurs de dimension 6, $\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} \text{diag}(f(X))g(X)dX$. Un noyau $\mathbf{H}_n^{(X)}(s_{1:n})$ peut être défini par :

$$\mathbf{H}_n^{(X)}(s_{1:n}) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \text{diag}(\mathbf{H}_n^{[k]}(s_{1:n})) \mathbf{e}_k(X) \quad (4.9)$$

où $\mathbf{H}_n^{[k]} = \langle \mathbf{H}_n^{(X)}, \mathbf{e}_k \rangle$.

Remarque 12

La propriété suivante est requise pour écrire l'expression de $E_n^{[k]} : \forall A \in \mathbb{R}^3, \alpha \in \mathbb{R}^3, \langle (\widehat{\text{diag}(\alpha)} \mathcal{E}_i) \text{diag}(A) \mathcal{E}_m, \mathcal{E}_k \rangle = \text{diag}(\langle \text{diag}(\mathcal{E}_i) \mathcal{E}_m, \mathcal{E}_k \rangle) \widehat{\alpha} A$. Une condition suffisante est que les trois composantes du vecteur $\mathcal{E}_i(X)$ sont égales $\forall i \in \mathbb{N}^*$ (cf. définition (4.8)).

La projection de l'équation 4.5 sur \mathbf{e}_k donne le résultat suivant :

$$\begin{aligned} (\widehat{s_{1:n}}^2 \mathcal{A}_1 + \widehat{s_{1:n}} \mathcal{F}_1) \langle \mathbf{H}_n^{(X)}, \mathbf{e}_k \rangle + \mathcal{D}_1 \left\langle \frac{\partial \mathbf{H}_n^{(X)}}{\partial x}, \mathbf{e}_k \right\rangle + \mathcal{C}_1 \left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{H}_n^{(X)}}{\partial x^2}, \mathbf{e}_k \right\rangle &= \langle \mathbf{E}_n^{(X)}, \mathbf{e}_k \rangle \\ (\widehat{s_{1:n}}^2 \mathcal{A}_1 + \widehat{s_{1:n}} \mathcal{F}_1) \mathbf{H}_n^{[k]} + \mathcal{D}_1 \left\langle \mathbf{H}_n^{(X)}, \frac{\partial \mathbf{e}_k^{(X)}}{\partial x} \right\rangle + \mathcal{C}_1 \left\langle \mathbf{H}_n^{(X)}, \frac{\partial^2 \mathbf{e}_k^{(X)}}{\partial x^2} \right\rangle &= \mathbf{E}_n^{[k]} \\ (\widehat{s_{1:n}}^2 \mathcal{A}_1 + \widehat{s_{1:n}} \mathcal{F}_1 + \mu_k \mathcal{D}_1 + \nu_k \mathcal{C}_1) \mathbf{H}_n^{[k]} &= \mathbf{E}_n^{[k]} \\ Q_k(\widehat{s_{1:n}}) \mathbf{H}_n^{[k]} &= \mathbf{E}_n^{[k]} \end{aligned}$$

avec $\mu_k = \text{diag}(\langle \text{diag}(\mathbf{e}_k), \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial x} \rangle)$ et $\nu_k = \text{diag}(\langle \text{diag}(\mathbf{e}_k), \frac{\partial^2 \mathbf{e}_k}{\partial x^2} \rangle)$,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_n^{(k)}(s_{1:n}) &= \Phi_n^{[k]} \delta_{1,n} \\ &\quad - \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{(k_1, k_2) \in \mathbb{N}^{*2}} \left[\lambda_{k_1, k_2}^k \widehat{s_{1:n}}^2 \left[\mathcal{A}_2(\mathbf{H}_p^{[k_1]}) \mathbf{H}_{n-p}^{[k_2]} + \mathcal{B}_2(\mathbf{H}_p^{[k_1]}) \mathbf{H}_{n-p}^{[k_2]} \right] \right. \\ &\quad + \sigma_{k_1, k_2}^k \mathcal{C}_2(\mathbf{H}_p^{[k_1]}) \mathbf{H}_{n-p}^{[k_2]} + \epsilon_{k_1, k_2}^k \mathcal{D}_2(\mathbf{H}_p^{[k_1]}) \mathbf{H}_{n-p}^{[k_2]} + \gamma_{k_1, k_2}^k \mathcal{E}_2(\mathbf{H}_p^{[k_1]}, \mathbf{H}_{n-p}^{[k_2]}) \\ &\quad \left. - \mathcal{G}_1(\mathbf{H}_p^{[k_1]}) \Phi_1^{[k_2]}(X) \right], \quad (4.10) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\lambda_{k_1, k_2}^k &= \text{diag}(\langle \text{diag}(\mathbf{e}_{k_1})\mathbf{e}_{k_2}, \mathbf{e}_k \rangle) \\
\epsilon_{k_1, k_2}^k &= \text{diag}(\langle \text{diag}(\mathbf{e}'_{k_1})\mathbf{e}'_{k_2}, \mathbf{e}_k \rangle) \\
\gamma_{k_1, k_2}^k &= \text{diag}(\langle \text{diag}(\mathbf{e}_{k_1})\mathbf{e}'_{k_2}, \mathbf{e}_k \rangle) \\
\sigma_{k_1, k_2}^k &= \text{diag}(\langle \text{diag}(\mathbf{e}_{k_1})\mathbf{e}''_{k_2}, \mathbf{e}_k \rangle)
\end{aligned}$$

4.4 Structure de simulation

Comme montré dans la section 2.4.3, les expressions (4.9) et (4.10) peuvent être réécrites grâce à la définition d'ensembles d'arbres afin de réorganiser la combinatoire.

4.4.1 Arbres

Théorème 6

Soit \mathbb{E} l'ensemble des arbres pleins binaires définis par $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{E}_1 = \mathbb{N}^* \quad (4.11)$$

$$\mathbb{E}_n = \bigcup_{\substack{p_1+p_2=n \\ (p_1, p_2) \in \mathbb{N}^*}} \{\mathbf{t} = (\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) \in \mathbb{E}_{p_1} \times \mathbb{E}_{p_2}\}, \quad (4.12)$$

où $\mathfrak{k}(\mathbf{t}) = \mathbf{t}$ si $n = 1$ et $\mathfrak{k}(\mathbf{t}) = \mathfrak{k}(\mathbf{t}_1) + \mathfrak{k}(\mathbf{t}_2)$ si $n \geq 2$. Alors, les noyaux $H_n^{(X)}$ peuvent être définis par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall X \in [0; L], H_n^{(X)} = \sum_{\mathbf{t} \in \mathbb{E}_n} H_{\mathbf{t}} \mathbf{e}_{\mathfrak{k}(\mathbf{t})} \quad (4.13)$$

avec si $n = 1$

$$H_{\mathbf{t}} = Q_{\mathfrak{k}(\mathbf{t})}^{-1} \Phi_{\mathfrak{k}(\mathbf{t})}$$

et si $n = 2$

$$\begin{aligned}
H_{\mathbf{t}} &= (\widehat{s_{1:n}^2} \mathcal{A}_1 + \widehat{s_{1:n}^2} \mathcal{F}_1 + \mu \mathcal{D}_1 + \nu \mathcal{C}_1)^{-1} \left[\lambda_{\mathfrak{k}(\mathbf{t}_1), \mathfrak{k}(\mathbf{t}_2)}^{\mathfrak{k}(\mathbf{t})} \widehat{s_{1:n}^2} [\mathcal{A}_2(\mathbf{H}_{\mathbf{t}_1})\mathbf{H}_{\mathbf{t}_2} + \mathcal{B}_2(\mathbf{H}_{\mathbf{t}_1})\mathbf{H}_{\mathbf{t}_2}] \right. \\
&+ \sigma_{\mathfrak{k}(\mathbf{t}_1), \mathfrak{k}(\mathbf{t}_2)}^{\mathfrak{k}(\mathbf{t})} \mathcal{C}_2(\mathbf{H}_{\mathbf{t}_1})\mathbf{H}_{\mathbf{t}_2} + \epsilon_{\mathfrak{k}(\mathbf{t}_1), \mathfrak{k}(\mathbf{t}_2)}^{\mathfrak{k}(\mathbf{t})} \mathcal{D}_2(\mathbf{H}_{\mathbf{t}_1})\mathbf{H}_{\mathbf{t}_2} + \gamma_{\mathfrak{k}(\mathbf{t}_1), \mathfrak{k}(\mathbf{t}_2)}^{\mathfrak{k}(\mathbf{t})} \mathcal{E}_2(\mathbf{H}_{\mathbf{t}_1}, \mathbf{H}_{\mathbf{t}_2}) \\
&\left. - \mathcal{G}_1(\mathbf{H}_{\mathbf{t}_1}) \Phi_{\mathfrak{k}(\mathbf{t}_2)}(X) \right].
\end{aligned}$$

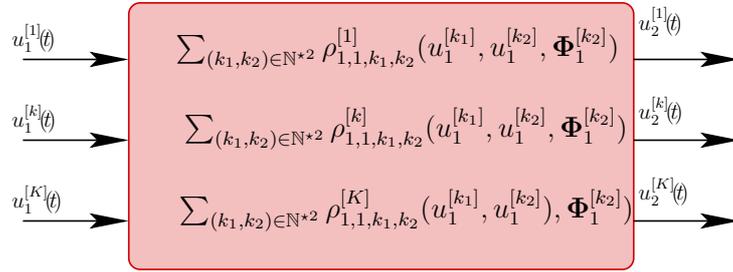


FIGURE 4.8 – Détail du bloc Tw .

avec l'exponentielle dans $SO(3)$ calculée grâce à la formule de Rodrigues

$$e^{\hat{\alpha}} = I + \frac{\hat{\alpha}}{\|\alpha\|} \sin \|\alpha\| + \frac{\hat{\alpha}^2}{\|\alpha\|^2} (1 - \cos \|\alpha\|),$$

et

$$A = \text{dexp}^T(\hat{\alpha}) = I + \frac{\hat{\alpha}}{\|\alpha\|^2} (1 - \cos \|\alpha\|) + \frac{\hat{\alpha}^2}{\|\alpha\|^3} (\|\alpha\| - \sin \|\alpha\|).$$

4.5 Conclusion

Ce chapitre a mis en valeur la relative simplicité de l'application des séries de Volterra à la dynamique de la poutre de Reissner, la démarche est quasiment identique à celle utilisée dans le chapitre 2. La simulation de cette structure n'a pas encore été réalisée. Une fois implémentée, les valeurs obtenues devront être corrélées. Il sera intéressant de qualifier et quantifier l'apport de cette non-linéarité quadratique (troncature de la série à l'ordre 2), du point de vue des couplages entre les degrés de liberté, de l'influence de l'excitation (degré de liberté où elle est appliquée), ou du résultat perçu par l'auditeur de la synthèse (contenu spectral, forme d'onde du transitoire d'attaque...).

Chapitre 5

Vers un formalisme en noyaux de Green-Volterra

5.1 Introduction

Les travaux présentés dans le cadre de cette thèse ont tous pour point commun, une condition particulière sur l'excitation du système. En effet, les chapitres 2 et 3 ont présenté un modèle excité par un nombre fini d'entrées $u(t)$ indépendantes de l'espace. A l'avenir il serait intéressant de travailler sur des excitations de la forme $u(x, t)$ ce qui permettrait de généraliser les excitations appliquées au système (plusieurs forces en plusieurs endroits, problèmes de contact...). Pour les problèmes linéaires, le formalisme de Green répond à ce problème (cf. [6] par exemple).

Ce chapitre présente une approche de ce problème où l'excitation est définie par une fonction à variables non séparables (i.e. $u(x, t) \neq \phi(x)f(t)$) pour des systèmes non linéaires que l'on sait approximer à l'aide des séries de Volterra. L'équation des noyaux baptisés « de Green-Volterra » sera établie pour les deux modèles de cordes présentés dans la section 2.2.1. Pour ce faire trois méthodes de représentation seront utilisées, la représentation d'état, la représentation d'Huygens, et les guides d'ondes. Dans chaque cas, les noyaux seront établis pour des conditions aux limites à l'infini (Sommerfeld) et pour des conditions de Dirichlet appliquées à un système borné. La méthode des images sera présentée pour calculer le calcul des noyaux d'un système borné, connaissant les noyaux du système équivalent à l'infini. Enfin, un tableau récapitulatif présentera tous les expressions obtenues, équivalentes.

5.2 Vers des noyaux de Green-Volterra

5.2.1 Introduction

Afin de prendre en compte les non-linéarités spatiales de la dynamique d'un solide (par exemple : contact), il est nécessaire d'utiliser des noyaux de Volterra instationnaires en espace. Ces noyaux seront définis comme des noyaux de Green-Volterra dans le sens, où ils respecteront l'équation linéaire à résoudre (pour tout ordre n) quand l'excitation est définie par une impulsion spatiale.

5.2.2 Formalisme de Green : rappels

Considérons un modèle de corde linéaire \mathcal{S} soumis à une force d'excitation $f(x, t)$ et gouverné par

$$\begin{aligned} m\ddot{y}(x, t) - T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) &= f(x, t) \quad \forall (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^{+*} \\ y(x, 0) &= 0 \quad y(0, t) = y_0 \\ \dot{y}(x, 0) &= 0 \quad y(L, t) = y_L \end{aligned} \quad (5.1)$$

où y est le déplacement transverse de la corde.

Définition 16

La solution de l'équation (5.1) est définie par

$$y(x, t) = \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^{+*}} G(x, t, \xi, \tau) f(\xi, \tau) d\tau d\xi$$

où G est la fonction de Green du système. Il s'agit d'une solution particulière du problème pour $f(x, t) = \delta(x - x_0)\delta(t - t_0)$ (une impulsion au point x_0 à l'instant t_0),

$$m\ddot{G}(x, t, x_0, t_0) - T\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x, t, x_0, t_0) = \delta(x - x_0)\delta(t - t_0). \quad (5.2)$$

Le formalisme de Green consiste à utiliser le principe de superposition pour exprimer une solution y pour f quelconque, comme une combinaison linéaire de G , la solution particulière si f est une impulsion.

Pour les systèmes d'ordre 2, un exemple de calcul de fonction de Green est donné dans l'annexe A.1 en utilisant la représentation d'état dans le domaine de Laplace.

Application au problème linéarisé ($\epsilon = 0$)

On considère le problème de la corde de Kirchhoff linéarisé (équation d'équilibre sur le déplacement)

$$\ddot{u}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = f(x, t), \quad (5.3)$$

où $u(x, t)$ est le déplacement transverse de la corde, $f(x, t)$ est une excitation distribuée de type force, avec pour conditions aux limites $\forall t > 0, u(0, t) = u(1, t) = 0$ et $\forall x \in [0; 1], u(x, 0) = 0$.

Forme d'Euler-Lagrange

Après le changement de variable $p = \dot{u}$, $q = \frac{\partial u}{\partial x}$, l'équation (5.3) devient

$$\begin{aligned} \dot{p}(x, t) - \frac{\partial q}{\partial x}(x, t) &= f(x, t) \\ \frac{\partial p}{\partial x} &= \dot{q} \\ \forall t > 0, \quad p(0, t) = p(1, t) &= 0 \\ \forall x \in [0; 1], \quad p(x, 0) = q(x, 0) &= 0 \end{aligned}$$

Forme matricielle On définit $p = \dot{u}$, $q = \frac{\partial u}{\partial x}$ et $X = [q, p]^t$ de sorte que (5.3) devient

$$\begin{aligned} \dot{X} &= A \frac{\partial X}{\partial x} + Bf, \\ A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ B &= [0, 1]^t, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \forall t > 0, \quad p(0, t) = p(1, t) &= 0 \\ \forall x \in [0; 1], \quad p(x, 0) = q(x, 0) &= 0 \end{aligned}$$

Changement d'état : ondes découplées progressives du système linéarisé

Ce système de deux équations à deux inconnues peut s'écrire sous la forme de deux équations d'ondes planes, découplées. Le changement de variable $(q, p) \rightarrow (q^+, q^-)$

$q^+ = \frac{1}{2}(p + q)$	$q = q^+ + q^-$
$q^- = \frac{1}{2}(-p + q)$	$p = q^+ - q^-$

permet d'obtenir un système d'équations grâce auquel peut être calculée la fonction de Green pour une représentation en guide d'onde :

$$\begin{aligned}
\dot{q}^+(x, t) - \frac{\partial q^+}{\partial x}(x, t) &= \frac{1}{2}f(x, t) \\
-\dot{q}^-(x, t) - \frac{\partial q^-}{\partial x}(x, t) &= \frac{1}{2}f(x, t) \\
\forall t > 0, \quad q^+(0, t) - q^-(0, t) &= q^+(1, t) - q^-(1, t) = 0 \\
\forall x \in [0; 1], \quad q^+(x, 0) = q^-(x, 0) &= 0
\end{aligned}$$

Forme matricielle Les valeurs propres de A dans l'équation (5.4) sont $+1$ et -1 et deux vecteurs propres associés sont $\frac{1}{2}[1, 1]^t$ et $\frac{1}{2}[1, -1]^t$. Soit $Z = PX$ où la matrice de passage P et son inverse sont données par

$$P = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(5.4) devient

$$\begin{aligned}
\dot{Z} &= \mathcal{A} \frac{\partial Z}{\partial x} + \mathcal{B}f, \\
\mathcal{A} &= \begin{bmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \\
\mathcal{B} &= \frac{1}{2}[1, -1]^t.
\end{aligned}$$

Les conditions temporelles et spatiales (5.4) et (5.4) sont

$$\begin{aligned}
\forall t > 0, \quad CZ(x = 0, t) = CZ(x = 1, t) &= 0 \text{ avec } C = [1, -1] \\
\forall x \in [0; 1], \quad Z(x, t = 0) &= [0, 0]^t.
\end{aligned}$$

5.2.3 Noyaux instationnaires

L'équation (1.32) présentée dans la section 1.3 est un cas particulier, utilisé jusqu'à présente dans le cadre de cette thèse, de la définition de la sortie d'un système représenté par une série de Volterra. En effet, jusqu'à maintenant les noyaux du systèmes étaient considérés comme stationnaires, i.e. invariants en temps et en espace.

De manière plus générale on peut écrire (cf. section 1.6.1)

$$u(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \int_{(\Omega \times \mathbb{R}_+)^n} h_n(x, t; \xi, \tau) f(\xi_1, \tau_1) \dots f(\xi_n, \tau_n) d\xi_1 d\tau_1 \dots d\xi_n d\tau_n$$

où les $h_n(x, t; \xi, \tau)$ sont des noyaux de Volterra instationnaires, i.e. des noyaux représentant le système qui dépendent du temps et de l'espace.

Les noyaux h_n peuvent être vus comme des opérateurs spatio-temporels (intégraux) qui agissent sur l'entrée (distribuée) qui construisent la composante non linéaire de degré n de la solution.

Remarque 13

h_1 est à ce titre une fonction de transfert pour la partie temporelle et une fonction de Green pour la partie spatiale (cf. section 5.2.2).

Soient $\underline{h}_n(x, t; \xi, \tau)$ les noyaux du système causal d'entrée f et de sortie Z .

Le problème étant stationnaire par rapport au temps, on s'intéresse aux noyaux convolutifs sur la variable temporelle qu'on note h_n avec

$$\underline{h}_n(x, t; \xi, \tau) = h_n(x; \xi, t - \tau)$$

Enfin, on note $H_n(x; \xi, s)$ la transformée de Laplace de $\tau \mapsto h_n(x; \xi, \tau)$.

Définition 17

Soit u la solution pour l'excitation f . Soit $T_{x,t}$ la translation spatio-temporelle de vecteur $xe_x + te_t$. Le problème est invariant dans le temps si $T_{0,t}u$ est la solution pour l'excitation $T_{0,t}f$ et dans ce cas, il existe \tilde{h}_n tel que

$$h_n(x, t, \xi_{1:n}, \tau_{1:n}) = \tilde{h}_n(x; \xi_{1:n}, t - \tau_{1:n})$$

Idem pour l'invariance en espace.

5.2.4 Proposition d'une extension d'un formalisme de Green-Volterra

Dans le cadre de ce manuscrit, le système est stationnaire en temps et non stationnaire en espace, en effet, la translation spatiale est non invariante (sauf cas particuliers de système infinis) (cf. section 1.6.1).

Problème posé et formulation

On se place sur l'espace-temps $r = (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+$

On considère le problème de la corde de Kirchhoff (équation d'équilibre sur le déplacement, cf. section 2.2)

$$\ddot{u}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = \epsilon \left(\int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right)^2 dx \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + f(x, t), \quad (5.4)$$

où $u(x, t)$ est le déplacement transverse de la corde, $f(x, t)$ est une excitation distribuée de type force, avec pour conditions aux limites $\forall t > 0, u(0, t) = u(1, t) = 0$ et $\forall x \in [0; 1], u(x, 0) = 0$.

Forme d'Euler-Lagrange

Après le changement de variable $p = \dot{u}, q = \frac{\partial u}{\partial x}$, l'équation (5.3) devient

$$\begin{aligned} \dot{p}(x, t) - \frac{\partial q}{\partial x}(x, t) &= \epsilon \int_0^1 q^2(x, t) dx \frac{\partial q}{\partial x}(x, t) + f(x, t) \\ \frac{\partial p}{\partial x} &= \dot{q} \\ \forall t > 0, & \quad p(0, t) = p(1, t) = 0 \\ \forall x \in [0; 1], & \quad p(x, 0) = q(x, 0) = 0 \end{aligned}$$

Forme matricielle On définit $p = \dot{u}, q = \frac{\partial u}{\partial x}$ et $X = [q, p]^t$ de sorte que (5.3) devient

$$\begin{aligned} \dot{X} &= A \frac{\partial X}{\partial x} + N(X, X) \frac{\partial X}{\partial x} + Bf, \\ A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ N(X, Y) &= \epsilon \int_0^1 X^T(x, t) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Y(x, t) dx \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right), \\ B &= [0, 1]^t, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \forall t > 0, & \quad p(0, t) = p(1, t) = 0 \\ \forall x \in [0; 1], & \quad p(x, 0) = q(x, 0) = 0 \end{aligned}$$

Changement d'état : ondes découplées progressives du système linéarisé

Ce système de deux équations à deux inconnues peut s'écrire sous la forme de deux équations d'ondes planes, découplées pour leur parties linéaire. Le changement de variable $(q, p) \rightarrow (q^+, q^-)$

$$\begin{array}{|l|l|} \hline q^+ = \frac{1}{2}(p + q) & q = q^+ + q^- \\ \hline q^- = \frac{1}{2}(-p + q) & p = q^+ - q^- \\ \hline \end{array}$$

permet d'obtenir un système d'équations grâce auquel peuvent être calculés les noyaux de Green-Volterra pour une représentation en guide d'onde :

$$\begin{aligned} & \dot{q}^+(x, t) - \frac{\partial q^+}{\partial x}(x, t) \\ = & \frac{1}{2}\epsilon \int_0^1 (q^+(x, t) + q^-(x, t))^2 dx \frac{\partial(q^+(x, t) + q^-(x, t))}{\partial x} + \frac{1}{2}f(x, t) \\ & - \dot{q}^-(x, t) - \frac{\partial q^-}{\partial x}(x, t) \\ = & \frac{1}{2}\epsilon \int_0^1 (q^+(x, t) + q^-(x, t))^2 dx \frac{\partial(q^+(x, t) + q^-(x, t))}{\partial x} + \frac{1}{2}f(x, t) \\ \forall t > 0, & \quad q^+(0, t) - q^-(0, t) = q^+(1, t) - q^-(1, t) = 0 \\ \forall x \in [0; 1], & \quad q^+(x, 0) = q^-(x, 0) = 0 \end{aligned}$$

Forme matricielle L'équation 5.5 devient

$$\begin{aligned} \dot{Z} &= \mathcal{A} \frac{\partial Z}{\partial x} + \rho(Z, Z) N \frac{\partial Z}{\partial x} + \mathcal{B} f, \\ \mathcal{A} &= \begin{bmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \\ \rho(Y, Z) &= \left(\int_0^1 Y(x, t)^t \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} Z(x, t) dx \right), \\ N &= \frac{\epsilon}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \\ \mathcal{B} &= \frac{1}{2} [1, -1]^t. \end{aligned}$$

Les conditions temporelles et spatiales (5.5) et (5.5) sont

$$\begin{aligned} \forall t > 0, & \quad CZ(x = 0, t) = CZ(x = 1, t) = 0 \text{ avec } C = [1, -1] \\ \forall x \in [0; 1], & \quad Z(x, t = 0) = [0, 0]^t. \end{aligned}$$

5.2.5 Équation des noyaux pour un système infini

Soit problème de la corde de Kirchhoff-Carrier (équation d'équilibre sur le déplacement) avec développement de la racine carrée jusqu'à l'ordre 3 (cf. sections 2.2 et 2.7).

$$\ddot{u}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = \frac{\partial \epsilon(\frac{\partial u^3}{\partial x})}{\partial x} + f(x, t), \quad (5.5)$$

où $u(x, t)$ est le déplacement transverse de la corde, $f(x, t)$ est une excitation distribuée de type force. Les conditions aux limites de Sommerfeld sont appliquées, stipulant qu'il n'y a pas d'énergie en provenance de l'infini. La condition initiale est $u(x, 0) = 0$.

Cas 1

L'équation des noyaux du système 5.5 dans le domaine de Laplace est (cf. section 2.3)

$$\tilde{s}^2 H_n(x; \xi, s) - \frac{\partial^2 H_n(x; \xi, s)}{\partial x^2} = E_n(x; \xi, s), \quad (5.6)$$

avec

$$E_1 = \delta(x - \xi) \quad (5.7)$$

$$\forall n \geq 2, E_n = \epsilon \partial_x \sum_{\substack{p, q, r \geq 1 \\ p+q+r=n}} \frac{\partial H_p}{\partial x} \frac{\partial H_q}{\partial x} \frac{\partial H_r}{\partial x} \quad (5.8)$$

Résolution Les conditions aux limites de Sommerfeld stipulent que l'énergie ne peut revenir de l'infini, on a donc

$$H_1(x; \xi, s) = \frac{e^{-s|x-\xi|}}{2s},$$

et

$$\mathbf{X}_1(x; \xi, s) = \left[\begin{array}{c} H_1(x; \xi, s) \\ \frac{\partial H_1(x; \xi, s)}{\partial x} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \frac{e^{-s|x-\xi|}}{2s} \\ \frac{1}{2}(e^{-s(\xi-x)}\Gamma(\xi-x) - e^{-s(x-\xi)}\Gamma(x-\xi)) \end{array} \right], \quad (5.9)$$

où Γ est la fonction d'Heaviside.

Cas 2 (Huygens)

Pour $\mathbf{Y}_n = \mathbf{P}_{YX}\mathbf{X}_n = \begin{bmatrix} \frac{\partial H_n}{\partial x} \\ \widehat{s}H_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_n^q \\ H_n^p \end{bmatrix}$, la solution \mathbf{Y}_1 s'obtient par simple produit de la solution (5.9) par la matrice de changement de base :

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_1(x; \xi, s) &= \begin{bmatrix} H_1^q \\ H_1^p \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{P}_{YX}\mathbf{X}_1(x; \xi, s) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ s & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{e^{-s|x-\xi|}}{2s} \\ \frac{1}{2}(e^{-s\xi-x}\Gamma(\xi-x) - e^{-s(x-\xi)}\Gamma(x-\xi)) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{-s(\xi-x)}\Gamma(\xi-x) - e^{-s(x-\xi)}\Gamma(x-\xi) \\ e^{-s|x-\xi|} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Cas 3 (Guide d'onde)

De même, l'équation

$$\widehat{s}\mathbf{Z}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{Z}_1}{\partial x} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \delta(x-\xi) \quad (5.10)$$

a pour solution

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_1(x; \xi, s) &= \begin{bmatrix} H_1^{p+} \\ H_1^{p-} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{P}_{ZY}\mathbf{Y}_1(x; \xi, s) \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{-s(\xi-x)}\Gamma(\xi-x) - e^{-s(x-\xi)}\Gamma(x-\xi) \\ e^{-s|x-\xi|} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{-s(x-\xi)}\Gamma(x-\xi) \\ e^{-s(\xi-x)}\Gamma(\xi-x) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

5.2.6 Équation des noyaux pour un système borné sur l'intervalle $[0;1]$ avec des conditions de Dirichlet

On considère le problème (5.5) avec pour conditions aux limites $\forall t > 0, u(0, t) = u(1, t) = 0$ et $\forall x \in [0; 1], u(x, 0) = 0$.

Cas 1

Soit $\mathbf{X}_n = \begin{bmatrix} H_n \\ \frac{\partial H_n}{\partial x} \end{bmatrix}$ où $H_n(x; \xi, s)$ sont les noyaux de Green-Volterra du système dans le domaine de Laplace.

L'équation des noyaux s'écrit :

$$\widehat{s}^2 \mathbf{X}_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \widehat{s}^2 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{X}_n}{\partial x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} F_n, \quad (5.11)$$

avec

$$\begin{aligned} F_1(x; \xi, s) &= \delta(x - \xi) \\ F_n(x; \xi, s) &= \epsilon \partial_x \sum_{\substack{p, q, r \geq 1 \\ p+q+r=n}} [0, 1] \mathbf{X}_p [0, 1] \mathbf{X}_q [0, 1] \mathbf{X}_r \end{aligned}$$

Résolution L'équation (5.11) peut se récrire sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{X}_n}{\partial x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \widehat{s}^2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{X}_n + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} F_n \\ \frac{\partial \mathbf{X}_n}{\partial x} &= \mathbf{A} \mathbf{X}_n + \mathbf{B} F_n. \end{aligned}$$

avec pour solution générale

$$\mathbf{X}_n(x; \xi, s) = \int_0^x e^{(x-\nu)\mathbf{A}} \mathbf{B} F_n(\nu; \xi, s) d\nu + e^{\mathbf{A}x} \mathbf{X}_n(x=0; \xi, s),$$

l'application des conditions de Dirichlet homogènes permet d'écrire (cf. annexe A.1)

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_n(x; \xi, s) &= \int_0^x - \begin{bmatrix} \frac{\sinh(\widehat{s}(x-\nu))}{\cosh(\widehat{s}(x-\nu))} \end{bmatrix} F_n(\nu; \xi, s) d\nu \\ &+ \begin{bmatrix} \frac{\sinh(\widehat{s}x)}{\widehat{s} \sinh(\widehat{s})} \\ \frac{\cosh(\widehat{s}x)}{\sinh(\widehat{s})} \end{bmatrix} \int_0^1 \sinh(\widehat{s}(1-\nu)) F_n(\nu; \xi, s) d\nu \end{aligned} \quad (5.12)$$

Cas 2 (Huygens)

$$\text{Soit } \mathbf{Y}_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \widehat{s} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{X}_n = \mathbf{P}_{YX} \mathbf{X}_n = \begin{bmatrix} \frac{\partial H_n}{\partial x} \\ \widehat{s} H_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_n^q \\ H_n^p \end{bmatrix}.$$

L'équation des noyaux s'écrit :

$$\widehat{s} \mathbf{Y}_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{Y}_n}{\partial x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} G_n \quad (5.13)$$

avec

$$\begin{aligned} G_1(x; \xi, s) &= \delta(x - \xi) \\ G_n(x; \xi, s) &= \epsilon \partial_x \sum_{\substack{p, q, r \geq 1 \\ p+q+r=n}} [1, 0] \mathbf{Y}_p [1, 0] \mathbf{Y}_q [1, 0] \mathbf{Y}_r \end{aligned}$$

Résolution L'équation (5.13) peut se récrire sous la forme

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{Y}_n}{\partial x} &= \widehat{s} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{Y}_n + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} G_n \\ \frac{\partial \mathbf{Y}_n}{\partial x} &= \mathbf{A} \mathbf{Y}_n + \mathbf{B} G_n.\end{aligned}$$

De la même manière que pour le premier cas, la solution

$$\mathbf{Y}_n(x; \xi, s) = \int_0^x e^{(x-\nu)\mathbf{A}} \mathbf{B} G_n(\nu; \xi, s) d\nu + e^{\mathbf{A}x} \mathbf{Y}_n(x=0; \xi, s),$$

associée à des conditions de Dirichlet homogènes permet d'écrire

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}_n(x; \xi, s) &= \int_0^x - \begin{bmatrix} \cosh(\widehat{s}(x-\nu)) \\ \sinh(\widehat{s}(x-\nu)) \end{bmatrix} G_n(\nu; \xi, s) d\xi \\ &+ \begin{bmatrix} \frac{\cosh(\widehat{s}x)}{\sinh(\widehat{s})} \\ \frac{\sinh(\widehat{s}x)}{\sinh(\widehat{s})} \end{bmatrix} \int_0^1 \sinh(\widehat{s}(1-\nu)) G_n(\nu; \xi, s) d\nu.\end{aligned}\quad (5.14)$$

Cas 3 (Guide d'ondes)

Soit $\mathbf{Z}_n = \mathbf{P}_{ZY} \mathbf{Y}_n = \begin{bmatrix} H_n^{p^+} \\ H_n^{p^-} \end{bmatrix}$ avec $P_{ZY} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ la matrice de passage entre les variables (p, q) et (p^+, p^-) , qui définit $p = p^+ + p^-$ et $q = p^- - p^+$.

L'équation des noyaux s'écrit :

$$\widehat{s} \mathbf{Z}_n = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{Z}_n}{\partial x} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} I_n \quad (5.15)$$

avec

$$\begin{aligned}I_1(x; \xi, s) &= \delta(x - \xi) \\ I_n(x; \xi, s) &= \epsilon \partial_x \sum_{\substack{p, q, r \geq 1 \\ p+q+r=n}} [-1, 1] \mathbf{Z}_p [-1, 1] \mathbf{Z}_q [-1, 1] \mathbf{Z}_r\end{aligned}$$

Résolution L'équation (5.15) peut se récrire sous la forme

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{Z}_n}{\partial x} &= \widehat{s} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{Z}_n + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} I_n \\ \frac{\partial \mathbf{Z}_n}{\partial x} &= \mathbf{A} \mathbf{Z}_n + \mathbf{B} I_n,\end{aligned}$$

et a pour solution avec des conditions de Dirichlet homogènes,

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_n(x; \xi, s) &= \int_0^x e^{(x-\nu)\mathbf{A}} \mathbf{B} I_n(\nu; \xi, s) d\nu + e^{\mathbf{A}x} \mathbf{Z}_n(x=0; \xi, s), \\ \mathbf{Z}_n(x; \xi, s) &= \int_0^x \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{-\widehat{s}(x-\nu)} \\ -e^{\widehat{s}(x-\nu)} \end{bmatrix} I_n(\nu; \xi, s) d\nu \\ &+ \begin{bmatrix} -e^{-\widehat{s}x} \\ e^{\widehat{s}x} \end{bmatrix} \frac{1}{2 \sinh(\widehat{s})} \int_0^1 \sinh(\widehat{s}(1-\nu)) I_n(\nu; \xi, s) d\nu. \end{aligned} \quad (5.16)$$

5.3 Méthode des images

La méthode des images, permet de calculer la fonction de Green d'un système borné à partir de la fonction de Green correspondante à l'infini (avec conditions aux limites de Sommerfeld). Cette méthode sera illustrée par le calcul de la fonction de Green en vitesse (deuxième composante de \mathbf{Y}_1) pour une corde avec conditions de Dirichlet homogènes en $x = 0$ et $x = 1$.

5.3.1 Méthode

Soit $H_1^{p\infty}(x; \xi, s)$ la fonction de Green du système infini. L'étude de la corde sur l'intervalle $[0; +\infty[$ avec une condition de Dirichlet homogène en $x = 0$, est réalisée grâce à la fonction

$$H_1^p(x; \xi, s) = H_1^{p\infty}(x; \xi, s) - H_1^{p\infty}(x; -\xi, s).$$

En effet, la superposition des effets de deux sources situées en ξ et en $-\xi$, annule la différence exprimée ci-dessus pour $x = 0$ (cf. [6]).

5.3.2 Application

Dans le cas présent, deux conditions aux limites sont nécessaires en $x = 0$ et en $x = 1$ (à chaque extrémité de la corde). Il faut donc tenir compte du fait que la réflexion de la source par une des conditions aux limites est elle-même, ainsi que la source originale, réfléchi par la deuxième condition. Il y a donc une infinité de sources à prendre compte pour calculer la fonction de Green

du système borné :

$$\begin{aligned}
& \forall (x, \xi) \in [0; 1]^2, \forall s \in \mathbb{C} / \text{Re}(s) > 0 \\
& H_1^p(x; \xi, s) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} H_1^{p\infty}(x; \xi + 2n, s) - H_1^{p\infty}(x; -\xi + 2n, s) \\
& = \begin{cases} \sinh(s\xi) \left[\cosh(sx) - \frac{\sinh(sx)}{\tanh(s)} \right] & \text{si } x > \xi \\ \sinh(sx) \left[\cosh(s\xi) - \frac{\sinh(s\xi)}{\tanh(s)} \right] & \text{si } \xi > x \end{cases} \quad (5.17)
\end{aligned}$$

Le résultat dont le calcul est détaillé en annexe E correspond bien à celui de la deuxième composante de Y_1 calculée par la méthode de la variation de la constante.

5.4 Formulaire

5.5 Conclusion

Ce chapitre a présenté un nouveau formalisme, sous la forme d'une extension de celui de Green étendu aux modèles non linéaires grâce aux séries de Volterra. Après avoir défini les noyaux de Volterra instationnaires en espace, ces noyaux ont été calculés pour les deux modèles de corde du chapitre 2, avec cette fois-ci une excitation de la forme $f(x, t)$. Les noyaux obtenus (dans différentes représentations) sont le point de départ nécessaire à une généralisation de l'excitation des systèmes simulés, à travers, par exemple, plusieurs forces réparties, ou un problème de contact.

Conditions de Sommerfeld	
$\mathbf{X}_1^\infty(x; \xi, s)$	$\frac{1}{2} \left[\begin{array}{c} \frac{e^{-s x-\xi }}{s} \\ e^{-s(\xi-x)}\Gamma(\xi-x) - e^{-s(x-\xi)}\Gamma(x-\xi) \\ e^{-s(\xi-x)}\Gamma(\xi-x) - e^{-s(x-\xi)}\Gamma(x-\xi) \\ e^{-s x-\xi } \end{array} \right]$
$\mathbf{Y}_1^\infty(x; \xi, s)$	
$\mathbf{Z}_1^\infty(x; \xi, s)$	
Système borné sur $[0; 1]$	
$\mathbf{X}_1(x; \xi, s)$	$\left[\begin{array}{c} \frac{\sinh(s(\xi-x))}{s} \\ -\cosh(s(x-\xi)) \\ -\cosh(s(x-\xi)) \\ \sinh(s(\xi-x)) \end{array} \right] \Gamma(x-\xi) + \left[\begin{array}{c} \frac{\sinh(sx)}{s} \\ \cosh(sx) \\ \cosh(sx) \\ \sinh(sx) \end{array} \right] \left(\cosh(s\xi) - \frac{\sinh(s\xi)}{\tanh(s)} \right)$
$\mathbf{Y}_1(x; \xi, s)$	
$\mathbf{Z}_1(x; \xi, s)$	
Système borné sur $[0; 1]$	
$\mathbf{X}_n(x; \xi, s)$	$\int_0^x - \left[\begin{array}{c} \frac{\sinh(\widehat{s}(x-\nu))}{\widehat{s}} \\ \cosh(\widehat{s}(x-\nu)) \end{array} \right] F_n(\nu; \xi, s) d\nu$ $+ \left[\begin{array}{c} \frac{\sinh(\widehat{s}x)}{\widehat{s} \sinh(\widehat{s})} \\ \frac{\cosh(\widehat{s}x)}{\sinh(\widehat{s})} \end{array} \right] \int_0^1 \sinh(\widehat{s}(1-\nu)) F_n(\nu; \xi, s) d\nu$
$\mathbf{Y}_n(x; \xi, s)$	
$\mathbf{Z}_n(x; \xi, s)$	

TABLE 5.1 – Noyaux de Green-Volterra pour une corde infinie (conditions aux limites de Sommerfeld) et une corde finie avec des conditions de Dirichlet. Γ est la fonction d'Heaviside.

Conclusion et perspectives

Ce travail s'est attaché à établir la possibilité de simuler à faible coût un modèle de propagation d'onde non linéaire. Pour ce faire les séries de Volterra ont été utilisées. Cette méthode présente l'avantage de permettre l'identification de structures de simulation simples, laissant envisager la possibilité de synthèse sonore en temps réel. Par opposition à d'autres méthodes d'approximation (différences finies, éléments finis...), la spécificité de cet outil est son formalisme en série, laissant la liberté de tronquer l'expression de la solution à un ordre de non-linéarité donné. La convergence de cette série peut maintenant être calculée (cf. [25], [26] et [27]), posant ainsi une borne sur l'amplitude de l'entrée du système destinée à assurer la validité de l'approximation. De plus, la connaissance de ce rayon de convergence permet de quantifier l'erreur réalisée par la troncature.

Le chapitre 2 a permis de vérifier l'applicabilité de cette méthode bien connue en théorie des systèmes, à un problème de dynamique des solides. Pour deux modèles de cordes associés à deux types de non-linéarité, les noyaux de Volterra ont été établis et identifiés à des structures de simulation. Les synthèses sonores réalisées ont permis de mettre en valeur plusieurs phénomènes associés à la prise en compte de la non-linéarité :

- une modification de la forme d'onde, au début du son, avec une émergence progressive de la réponse non linéaire due à l'excitation ;
- un enrichissement spectral lié au phénomène précédent, principalement dans les moyennes et hautes fréquences ;
- une variation temporelle de la fréquence fondamentale au début du son.

Ces résultats sont prometteurs du point de vue du temps de calcul. En effet, la synthèse d'un son de 3 secondes avec 20 modes nécessite entre 15 et 45 secondes (selon l'ordre de troncature et le modèle) secondes dans Matlab sur un Pentium 4. De nombreuses améliorations sont donc encore possibles (programmation optimisée, langage compilé, processeur...).

Le chapitre 3 est une réponse aux limitations rencontrées dans les résultats du chapitre 2. La synthèse d'un modèle de corde à un degré de liberté,

nous prive des phénomènes non linéaires *a priori* les plus importants dans la dynamique des instruments à cordes, à savoir, les couplages entre les degrés de liberté, et la possibilité d’appliquer une excitation sous forme de torsion (archet). Le modèle de poutre de Reissner est donc la suite logique de ce travail. La simulation d’un modèle à 6 degrés de liberté a été l’occasion de découvrir une autre écriture des équations de base de la mécanique du solide rigide et des poutres, grâce aux groupes de Lie. Ce chapitre consiste donc au travail nécessaire d’écriture des équations d’équilibre en respectant les hypothèses liées à l’utilisation des séries de Volterra.

Le chapitre 4 est l’équivalent du chapitre 2, pour la poutre de Reissner dont l’équilibre est localement exprimé dans l’algèbre de Lie $se(3)$. Une fois l’équation des noyaux établis, la projection sur une base modale permet d’établir une structure de simulation, qui n’a pas encore été implémentée.

Enfin, le chapitre 5 présente un nouveau formalisme, sous la forme d’une extension de celui de Green étendu aux modèles non linéaires grâce aux séries de Volterra. Il devient alors possible de simuler la dynamique non linéaire d’un solide soumis à des excitations et des conditions aux limites plus générales. Un exemple peut être la résolution d’un problème de contact bilatéral. Si les deux solides sont représentés par des séries de Volterra, un bouclage entre les deux systèmes représentés par leurs noyaux va apparaître.

Ce travail présente de nombreuses perspectives dans différents domaines. Tout d’abord, il semble important de valider les approximations obtenues par une corrélation avec des mesures. Ce travail, difficile avec les modèles de corde à un degré de liberté, devra être effectué pour la poutre de Reissner. Les calculs obtenus pour les six degrés de liberté devront être comparés à des mesures en faisant varier les excitations (torsion, déplacement transverse, déplacement imposé, vitesse imposée...).

En cas de validation satisfaisante, cette méthode pourra être implémentée dans le logiciel Modalys par exemple. Deux approches sont possibles :

- un catalogue d’objets pourra être créé, comprenant des structures de simulation pour différents modèles (poutres, plaques, coques...) dans la continuité des travaux d’Olivier Thomas et Cyril Touzé (cf. [43] et [44] par exemple) ;
- intégrer les séries de Volterra dans une méthode de discrétisation (éléments finis par exemple) en vue de simuler la propagation d’onde dans une géométrie quelconque.

Cette dernière proposition, si elle s’avère réalisable, laisse entrevoir une avancée importante dans le domaine du calcul numérique, bien au-delà de la synthèse sonore. En effet, des problèmes de dynamique, linéarisés ou non, se retrouvent fréquemment dans l’industrie mécanique ou le BTP (préven-

tion des risques sismiques...) par exemple. Cependant, il semble important de réfléchir à la mise en oeuvre de cette idée en gardant à l'esprit l'avantage de la simulation à faible coût qui peut rapidement disparaître avec des maillages fins. Des travaux sur la réduction de système pourraient permettre de contourner cet inconvénient.

Un autre paramètre apparaît en faisant ce parallèle avec l'industrie. Le travail présenté fait l'hypothèse d'un matériau élastique, linéaire et isotrope. Cette hypothèse est souvent mise à mal dans le cadre des instruments de musique. Pour l'exemple de la corde, les composites (cordes de piano), le procédé de fabrication ou le simple choix du matériau (nylon, boyau...) serait à prendre en compte.

Cependant, et il s'agit sans doute du travail le plus difficile, toutes ces pistes ne sont pas forcément utiles dans le cadre de la synthèse sonore. L'objectif de réalisme affiché en début de ce manuscrit ne consiste pas en une équation. La finesse de l'audition, de la perception, le fait de savoir ou non si le son est le résultat d'une synthèse, sont autant de paramètres subjectifs abordés par la psycho-acoustique. Ainsi, après avoir défini leur objectif, les chercheurs en acoustique devront savoir comment ce dernier est perçu, avant de pouvoir enfin chercher les moyens de le réaliser.

Annexe A

Séries de Volterra

A.1 Fonction de Green du problème linéarisé

L'équation (2.15) peut s'écrire

$$\forall (x, s_{1:n}) \in \Omega \times (\mathbb{C}_0^+)^n, \frac{\partial \mathbf{X}_n^{(x)}(s_{1:n})}{\partial x} = \mathbf{A}(\widehat{s_{1:n}}) \mathbf{X}_n^{(x)}(s_{1:n}) + \mathbf{B}(\widehat{s_{1:n}}) E_n^{(x)}(s_{1:n}), \quad (\text{A.1})$$

où $\mathbf{X}_n^{(x)}(s_{1:n}) = \begin{bmatrix} H_n^{(x)}(s_{1:n}) \\ \frac{\partial H_n^{(x)}(s_{1:n})}{\partial x} \end{bmatrix}$, $\forall s \in \mathbb{C}_0^+$, $\mathbf{A}(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ [\Gamma(s)]^2 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B}(s) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-1}{1+\beta s} \end{bmatrix}$,
dont la solution générale est

$$\mathbf{X}_n^{(x)}(s_{1:n}) = \int_0^x e^{(\xi-x)\mathbf{A}(\widehat{s_{1:n}})} \mathbf{B}(\widehat{s_{1:n}}) E_n^{(\xi)}(s_{1:n}) d\xi + e^{x\mathbf{A}(\widehat{s_{1:n}})} \mathbf{X}_n^{(0)}(s_{1:n}), \quad (\text{A.2})$$

$$\text{avec } e^{x\mathbf{A}(s)} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{11}(x, s) & \mathbf{E}_{12}(x, s) \\ \mathbf{E}_{21}(x, s) & \mathbf{E}_{22}(x, s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(x\Gamma(s)) & \sinh(x\Gamma(s))/\Gamma(s) \\ \sinh(x\Gamma(s))\Gamma(s) & \cosh(x\Gamma(s)) \end{bmatrix}.$$

Les conditions aux limites (2.19), $[1, 0] \mathbf{X}_n^{(x)}(s_{1:n}) = 0$ pour $x \in \{0; 1\}$ impliquent, pour l'équation (A.2),

$$\forall (s_{1:n}) \in (\mathbb{C}_0^+)^n, \quad \frac{\partial H_n^{(0)}(s_{1:n})}{\partial x} = \int_0^1 F(\xi, \widehat{s_{1:n}}) E_n^{(\xi)}(s_{1:n}) d\xi,$$

avec $F(x, s) = \frac{\mathbf{E}_{12}(x-1, s)}{(1+\beta s) \mathbf{E}_{12}(1, s)}$. Ainsi, en notant $1_{\mathbb{I}}(x) = 1$ si $x \in \mathbb{I}$ et $1_{\mathbb{I}}(x) = 0$ si $x \notin \mathbb{I}$, l'équation (2.20) est satisfaite avec $\forall (x, \xi, s) \in \Omega \times \Omega \times \mathbb{C}_0^+$,

$$G(x, \xi, s) = -1_{[0, x]}(\xi) \frac{\mathbf{E}_{12}(\xi - x, s)}{1 + \beta s} + 1_{[0, 1]}(\xi) \mathbf{E}_{12}(x, s) F(\xi, s), \quad (\text{A.3})$$

qui est également l'équation (2.21).

A.2 Modèle (M1) : projection des noyaux de Volterra sur la base modale

La projection de l'équation (2.15) sur les modes spatiaux e_k donne :

$$\left\langle \left[\Gamma(\widehat{s_{1:n}}) \right]^2 H_n^{(x)}(s_{1:n}) - \frac{\partial^2 H_n^{(x)}(s_{1:n})}{\partial x^2}, e_k \right\rangle = \left\langle \frac{E_n^{(x)}(s_{1:n})}{1 + \beta \widehat{s_{1:n}}}, e_k \right\rangle, \quad (\text{A.4})$$

où $E_n^{(x)}$ est défini équations (2.16) et (2.17). En développant le premier membre de l'équation (A.4) et grâce à la linéarité du produit scalaire

$$\begin{aligned} & \left\langle \left[\Gamma(\widehat{s_{1:n}}) \right]^2 H_n^{(x)}(s_{1:n}), e_k \right\rangle - \left\langle \frac{\partial^2 H_n^{(x)}(s_{1:n})}{\partial x^2}, e_k \right\rangle \\ &= \left[\Gamma(\widehat{s_{1:n}}) \right]^2 \langle H_n^{(x)}(s_{1:n}), e_k \rangle - \left\langle H_n^{(x)}(s_{1:n}), \frac{\partial^2 e_k}{\partial x^2} \right\rangle \\ &= \left[\Gamma(\widehat{s_{1:n}}) \right]^2 H_n^{[k]}(s_{1:n}) + (k\pi)^2 \langle H_n^{(x)}(s_{1:n}), e_k \rangle \\ &= \left(\left[\Gamma(\widehat{s_{1:n}}) \right]^2 + (k\pi)^2 \right) H_n^{[k]}(s_{1:n}) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Le second membre de l'équation (A.4) est $[1 + \widehat{\beta s_{1:n}}]^{-1} \langle E_n^{(x)}(s_{1:n}), e_k \rangle$ où $E_n^{[k]}(s_{1:n}) = \langle E_n^{(x)}(s_{1:n}), e_k \rangle$ est donné par

$$E_1^{[k]}(s_1) = \langle \phi, e_k \rangle, \quad \text{si } n = 1, \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{aligned} E_n^{[k]}(s_{1:n}) &= \int_0^1 E_n^{(x)}(s_{1:n}) e_k(x) dx & (\text{A.7}) \\ &= \epsilon \int_0^1 \left(\sum_{\substack{p,q,r \geq 1 \\ p+q+r=n}} \int_0^1 \left[\frac{\partial H_p^{(\xi)}(s_{1:p})}{\partial x} \frac{\partial H_q^{(\xi)}(s_{p+1:p+q})}{\partial x} \right] d\xi \right. \\ &\quad \cdot \left. \frac{\partial^2 H_r^{(x)}(s_{p+q+1:n})}{\partial x^2} e_k(x) \right) dx \\ &= -\epsilon \int_0^1 \left(\sum_{\substack{p,q,r \geq 1 \\ p+q+r=n}} \int_0^1 \left[\sum_{(\ell_1, \ell_2) \in (\mathbb{N}^*)^2} 2\ell_1 \ell_2 \pi^2 \cos(\ell_1 \pi \xi) \cos(\ell_2 \pi \xi) \right. \right. \\ &\quad \cdot \left. \left. H_p^{[\ell_1]}(s_{1:p}) H_q^{[\ell_2]}(s_{p+1:p+q}) \right] d\xi \right. \\ &\quad \cdot \left. \left[\sum_{m \in \mathbb{N}^*} 2m^2 \pi^2 H_r^{[m]}(s_{p+q+1:n}) \sin(m\pi x) \sin(k\pi x) \right] \right) dx \\ &= -\epsilon k^2 \pi^4 \sum_{\substack{p,q,r \geq 1 \\ p+q+r=n}} \sum_{\ell \in \mathbb{N}^*} [\ell^2 H_p^{[\ell]}(s_{1:p}) H_q^{[\ell]}(s_{p+1:p+q})] H_r^{[k]}(s_{p+q+1:n}), \\ &\quad \text{if } n \geq 2. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Finalement, les équations (A.4) à (A.8) donnent les équations (2.24) à (2.26) avec la définition (2.27).

A.3 Preuve du théorème 3

D'après la remarque 5, les noyaux $H_n^{(x)}$ d'ordre n pair sont nuls, ainsi l'équation (2.36) est naturellement vérifiée par l'équation (2.34) dans la définition 12.

Pour les ordres impairs, la preuve est établie par induction comme suit.

Pour $n = 1$, L'équation (2.37) est naturellement déduite par identification avec l'équation (2.28).

Pour $n \geq 3$, supposons les équations (2.36) à (2.38) vérifiées pour tous les ordres strictement inférieurs à n . Alors, grâce à l'équation (2.17) et sous les hypothèses standards du théorème de convergence dominée de Lebesgue (cf.

e.g. [9]) et de la règle de Leibniz (cf. e.g. [3, (3.3.7)]),

$$\begin{aligned}
E_n^{(x)}(s_{1,n}) &= \epsilon \sum_{\substack{p,q,r \geq 1 \\ p+q+r=n}} \int_0^1 \left(\left[\sum_{\mathbf{b} \in \mathbb{A}_p} H_{\mathbf{b}}(s_{1:p}) \frac{\partial e_{\mathfrak{k}(\mathbf{b})}}{\partial x}(x) \right] \right. \\
&\quad \cdot \left[\sum_{\mathbf{c} \in \mathbb{A}_q} H_{\mathbf{c}}(s_{p+1:p+q}) \frac{\partial e_{\mathfrak{k}(\mathbf{c})}}{\partial x}(x) \right] \left. \right) dx \\
&\quad \cdot \left[\sum_{\mathfrak{d} \in \mathbb{A}_n} H_{\mathfrak{d}}(s_{p+q+1:n}) \frac{\partial^2 e_{\mathfrak{k}(\mathfrak{d})}}{\partial x^2}(x) \right] \\
&= \epsilon \sum_{\substack{p,q,r \geq 1 \\ p+q+r=n}} \sum_{(\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathfrak{d}) \in \mathbb{A}_p \times \mathbb{A}_q \times \mathbb{A}_r} H_{\mathbf{b}}(s_{1:p}) H_{\mathbf{c}}(s_{p+1:p+q}) H_{\mathfrak{d}}(s_{p+q+1:n}) \mathcal{K}_{\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathfrak{d}}(x),
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_{\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathfrak{d}}(x) &= \left(\int_0^1 \frac{\partial e_{\mathfrak{k}(\mathbf{b})}}{\partial x}(x) \cdot \frac{\partial e_{\mathfrak{k}(\mathbf{c})}}{\partial x}(x) dx \right) \frac{\partial^2 e_{\mathfrak{k}(\mathfrak{d})}}{\partial x^2}(x) \\
&= -(\pi^2 \mathfrak{k}(\mathbf{b}) \mathfrak{k}(\mathfrak{d}))^2 (\delta_{\mathfrak{k}(\mathbf{b}), \mathfrak{k}(\mathbf{c})}) e_{\mathfrak{k}(\mathfrak{d})}(x).
\end{aligned}$$

A partir des définitions (2.34) et (2.35), il est établi que

$$\sum_{\substack{p,q,r \geq 1 \\ p+q+r=n}} \sum_{(\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathfrak{d}) \in \mathbb{A}_p \times \mathbb{A}_q \times \mathbb{A}_r} \equiv \sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{A}_n} \quad (\text{A.9})$$

avec $\mathbf{b} = \mathbf{a}_1$, $\mathbf{c} = \mathbf{a}_2$, $\mathfrak{d} = \mathbf{a}_3$, $p = \mathbf{n}(\mathbf{a}_1)$, $q = \mathbf{n}(\mathbf{a}_2)$, $r = \mathbf{n}(\mathbf{a}_3)$.

Finalement, à partir des équations (2.24) et (A.9) à (A.9), l'équation (2.36) est satisfaite en considérant la définition (2.38) pour $H_{\mathbf{a}}$.

A.4 Démonstration des lois d'interconnexion

Somme de sorties Soit $u(t)$ l'entrée du système représenté figure A.1 telle que les séries de Volterra $\{f_n(t, \tau_{1,n})\}$ et $\{g_n(t, \tau_{1,n})\}$ convergent. La sortie $y(t)$

est définie par

$$\begin{aligned}
 y(t) &= y_f(t) + y_g(t) \\
 &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^n} f_n(t, \tau_{1,n}) u(\tau_1) \dots u(\tau_n) d\tau_{1,n} \\
 &+ \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^n} g_n(t, \tau_{1,n}) u(\tau_1) \dots u(\tau_n) d\tau_{1,n} \\
 &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^n} (f_n(t, \tau_{1,n}) + g_n(t, \tau_{1,n})) \\
 &\quad u(\tau_1) \dots u(\tau_n) d\tau_{1,n}
 \end{aligned}$$

si les séries sont absolument convergentes.

Le noyau $h_n(t, \tau_{1,n})$ est donc égal à la somme des noyaux $f_n(t, \tau_{1,n}) + g_n(t, \tau_{1,n})$.

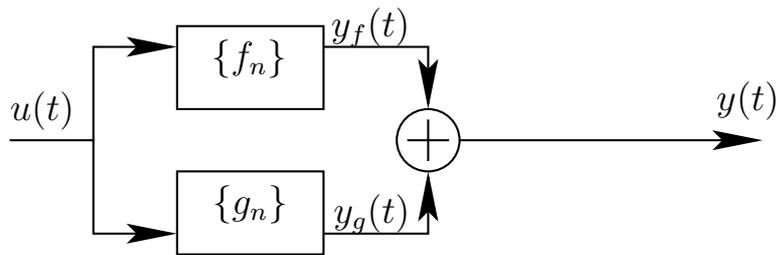


FIGURE A.1 – Somme des sorties de deux noyaux

Produit de sorties Soit $u(t)$ l'entrée du système représenté figure A.2 tel que les séries de Volterra $\{f_n(t, \tau_{1,n})\}$ et $\{g_n(t, \tau_{1,n})\}$ convergent. La sortie

$y(t)$ est définie par

$$\begin{aligned}
y(t) &= y_f(t) \cdot y_g(t) \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^n} f_n(t, \tau_{1,n}) u(\tau_1) \dots u(\tau_n) d\tau_{1,n} \\
&\quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^n} g_n(t, \tau_{1,n}) u(\tau_1) \dots u(\tau_n) d\tau_{1,n} \\
&= \sum_{p \in \mathbb{N}} y_{f_p}(t) \sum_{q \in \mathbb{N}} y_{g_q}(t) \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{\substack{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \\ p+q=n}} y_{f_p}(t) y_{g_q}(t) \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{\substack{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \\ p+q=n}} \int_{\mathbb{R}^p} f_p(t, \tau_{1,p}) u(\tau_1) \dots u(\tau_p) d\tau_{1,p} \\
&\quad \int_{\mathbb{R}^q} g_q(t, \tau_{1,q}) u(\tau_1) \dots u(\tau_q) d\tau_{1,q}.
\end{aligned}$$

On définit le changement de variable

$$(\tau_{1,q}) = (\tau_{p+1,n}).$$

On peut regrouper les intégrales en une seule car les variables sont séparées, puis on fait commuter la somme finie et l'intégrale qui est absolument convergente :

$$= \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{\substack{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \\ p+q=n}} f_p(t, \tau_{1,p}) g_q(t, \tau_{p+1,n}) u(\tau_1) \dots u(\tau_n) d\tau_{1,n}$$

Finalement

$$h_n(t, \tau_{1,n}) = \sum_{\substack{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \\ p+q=n}} f_p(t, \tau_{1,p}) g_q(t, \tau_{p+1,n})$$

Cascade avec un noyau linéaire Soit $u(t)$ l'entrée du système représenté figure A.3 tel que la série de Volterra $\{f_n(t, \tau_{1,n})\}$ converge. La sortie $y(t)$ s'écrit

$$\begin{aligned}
y(t) &= \int_{\mathbb{R}} g_1(\xi) y_f(t - \xi) d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} g_1(\xi) \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^n} f_n(t - \xi, \tau_{1,n}) u(\tau_1) \dots u(\tau_n) d\tau_{1,n} d\xi.
\end{aligned}$$

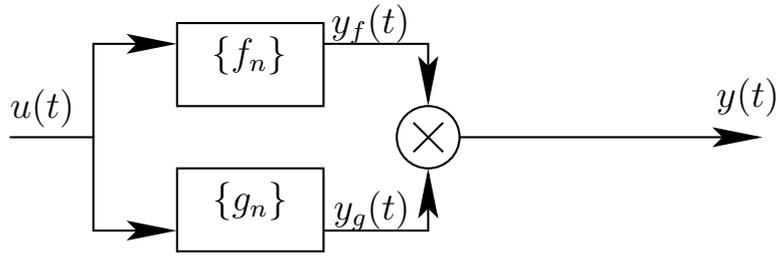


FIGURE A.2 – Produit des sorties de deux noyaux

Soit

$$\xi_k = \tau_k + \xi,$$

la sortie devient

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{\mathbb{R}} g_1(\xi) \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^n} f_n(t + \tau_{1:n} - \xi_{1:n}, \xi_{1:n} - \xi) u(\xi_1 - \xi) \dots u(\xi_n - \xi) d\tau_{1:n} d\xi \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}} g_1(\xi) f_n(t + \tau_{1:n} - \xi_{1:n}, \xi_{1:n} - \xi) d\xi \right] u(\xi_1 - \xi) \dots u(\xi_n - \xi) d\tau_{1:n}. \end{aligned}$$

Le noyau modélisant la cascade s'écrit :

$$h_n(t, \tau_{1:n}) = \int_{\mathbb{R}} g_1(\tau) f_n(t - \tau, \tau_{1:n}) d\tau_{1:n}.$$

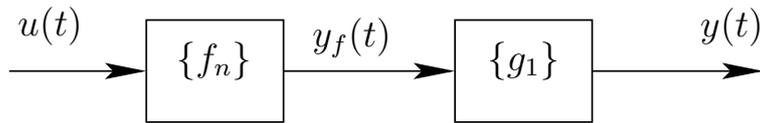


FIGURE A.3 – Cascade de deux noyaux

A.5 Séries de Volterra multi-entrées

Une corde associée à des conditions aux limites de type impédance définit un modèle qui peut également être résolu par les séries de Volterra (avec une entrée unique f). Dans ce cas, les noyaux dépendent de l'expression des impédances (cf. [40, chap.4]). Dans cette section, un cas plus général est étudié : une corde définie par le modèle **(M2)** (cf. équations (2.8) à (2.10)) et actionnée par trois entrées, une force f dans Ω , un déplacement u_0 en $x = 0$ et un déplacement u_1 en $x = 1$. Ce problème nécessite de définir les séries

de Volterra pour un système à trois entrées, comme présenté dans la section A.5.1. La solution est obtenue dans la section A.5.2 à partir de laquelle une structure de simulation est identifiée dans la section A.5.3.

A.5.1 Séries de Volterra à trois entrées

Pour des systèmes à trois entrées (e_I, e_{II}, e_{III}) et une sortie u , la définition des séries de Volterra est généralisée comme suit :

$$u(t) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{M}} \int_{\mathbb{R}^{|\mathbf{m}|}} h_{\mathbf{m}}(t_{1:\mathbf{m}_I}^I, t_{1:\mathbf{m}_{II}}^{II}, t_{1:\mathbf{m}_{III}}^{III}) e_I(t - t_1^I) \dots e_I(t - t_{\mathbf{m}_I}^I) \\ \cdot e_{II}(t - t_1^{II}) \dots e_{II}(t - t_{\mathbf{m}_{II}}^{II}) e_{III}(t - t_1^{III}) \dots e_{III}(t - t_{\mathbf{m}_{III}}^{III}) \\ \cdot dt_{1:\mathbf{m}_I}^I dt_{1:\mathbf{m}_{II}}^{II} dt_{1:\mathbf{m}_{III}}^{III}$$

où le multi-index $\mathbf{m} = (\mathbf{m}_I, \mathbf{m}_{II}, \mathbf{m}_{III}) \in \mathbb{M} = \mathbb{N}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ détaille les ordres de non-linéarité dus à chaque entrée, tandis que $|\mathbf{m}| = \mathbf{m}_I + \mathbf{m}_{II} + \mathbf{m}_{III}$ est l'ordre de non-linéarité global du noyau $h_{\mathbf{m}}$.

Remarque 14

Pour un problème linéaire, tous les noyaux $h_{\mathbf{m}}$ sont nuls si $|\mathbf{m}| \geq 2$ et, peuvent être non nuls si $|\mathbf{m}| = 1$. Dans ce cas, les trois index disponibles $\mathbf{m} \in \{(1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1)\}$ définissent la solution comme la superposition des trois contributions linéaires : c'est le principe de superposition.

Les lois d'interconnexions (1.33) à (1.35) deviennent, respectivement, pour tout $\mathbf{m} \in \mathbb{M}$,

$$C_{\mathbf{m}}(s_{1:\mathbf{m}}) = A_{\mathbf{m}}(s_{1:\mathbf{m}}) + B_{\mathbf{m}}(s_{1:\mathbf{m}}), \quad (\text{A.10})$$

$$C_{\mathbf{m}}(s_{1:\mathbf{m}}) = \sum_{(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \mathbb{M}^2 \text{ t.q. } \mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{m}} A_{\mathbf{p}}(s_{1:\mathbf{p}}) B_{\mathbf{q}}(s_{\mathbf{p}+1:\mathbf{m}}) \quad (\text{A.11})$$

$$C_{\mathbf{m}}(s_{1:\mathbf{m}}) = A_{\mathbf{m}}(s_{1:\mathbf{m}}) B_1(\widehat{s_{1:\mathbf{m}}}). \quad (\text{A.12})$$

avec les notations $\mathbf{1} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{p} + \mathbf{q} = (\mathbf{p}_I + \mathbf{q}_I, \mathbf{p}_{II} + \mathbf{q}_{II}, \mathbf{p}_{III} + \mathbf{q}_{III})$ pour $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \mathbb{M}^2$ et, si $\mathbf{p} \leq \mathbf{q}$ (c'est-à-dire $\mathbf{p}_I \leq \mathbf{q}_I, \mathbf{p}_{II} \leq \mathbf{q}_{II}, \mathbf{p}_{III} \leq \mathbf{q}_{III}$),

$$(s_{\mathbf{p}, \mathbf{q}}) = (s_{\mathbf{p}_I}^I, s_{\mathbf{p}_I+1}^I, \dots, s_{\mathbf{q}_I}^I, s_{\mathbf{p}_{II}}^{II}, s_{\mathbf{p}_{II}+1}^{II}, \dots, s_{\mathbf{q}_{II}}^{II}, s_{\mathbf{p}_{III}}^{III}, s_{\mathbf{p}_{III}+1}^{III}, \dots, s_{\mathbf{q}_{III}}^{III}), \\ \widehat{s_{\mathbf{p}, \mathbf{q}}} = s_{\mathbf{p}_I}^I + s_{\mathbf{p}_I+1}^I + \dots + s_{\mathbf{q}_I}^I + s_{\mathbf{p}_{II}}^{II} + s_{\mathbf{p}_{II}+1}^{II} + \dots + s_{\mathbf{q}_{II}}^{II} + s_{\mathbf{p}_{III}}^{III} + s_{\mathbf{p}_{III}+1}^{III} + \dots + s_{\mathbf{q}_{III}}^{III}.$$

A.5.2 Calcul des noyaux de Volterra pour (M2)

La représentation du déplacement $u(x, t)$ par une série de Volterra $\{h_{\mathbf{m}}^{(x)}\}_{\mathbf{m} \in \mathbb{M}}$ d'entrées $e_I(t) = f(t)$, $e_{II}(t) = u_0(t)$, $e_{III}(t) = u_1(t)$ et la réécriture de

l'équation (2.8) en le bloc-diagramme de la figure A.4 permet d'obtenir l'équation suivante grâce aux lois (A.10) à (A.12) : pour tout $\mathbf{m} \in \mathbb{M}$ et $(x, s_{1:\mathbf{m}}) \in \Omega \times (\mathbb{C}_0^+)^{|\mathbf{m}|}$,

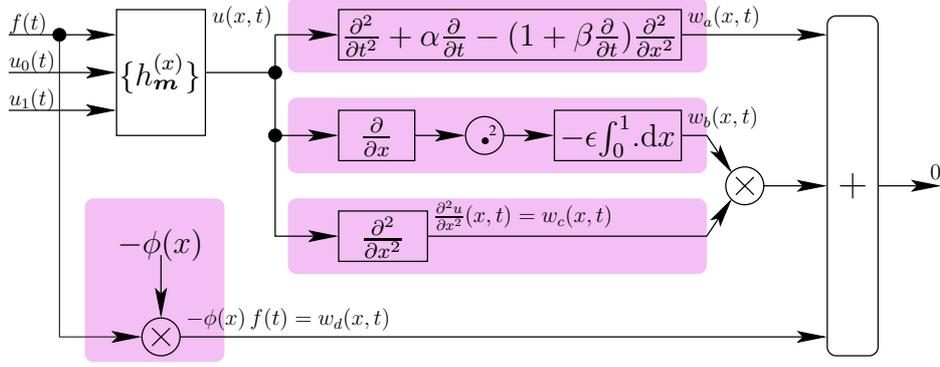


FIGURE A.4 – Bloc-diagramme représentant l'équation (2.8).

$$[\Gamma(\widehat{s_{1:\mathbf{m}}})]^2 H_{\mathbf{m}}^{(x)}(s_{1:\mathbf{m}}) - \frac{\partial^2 H_{\mathbf{m}}^{(x)}(s_{1:\mathbf{m}})}{\partial x^2} = \frac{E_{\mathbf{m}}^{(x)}(s_{1:\mathbf{m}})}{1 + \beta \widehat{s_{1:\mathbf{m}}}}, \quad (\text{A.13})$$

avec

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{m}}^{(x)}(s_1^{\text{I}}) &= \phi(x), & \text{si } \mathbf{m} &= (1, 0, 0), \\ E_{\mathbf{m}}^{(x)}(s_1^{\text{II}}) &= 0, & \text{si } \mathbf{m} &= (0, 1, 0), \\ E_{\mathbf{m}}^{(x)}(s_1^{\text{III}}) &= 0, & \text{si } \mathbf{m} &= (0, 0, 1), \\ E_{\mathbf{m}}^{(x)}(s_{1:\mathbf{m}}) &= \epsilon \sum_{\substack{(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) \in \mathbb{M}^3 \\ \mathbf{p} + \mathbf{q} + \mathbf{r} = \mathbf{m}}} \int_0^1 \left[\frac{\partial H_{\mathbf{p}}^{(x)}(s_{1:\mathbf{p}})}{\partial x} \frac{\partial H_{\mathbf{q}}^{(x)}(s_{\mathbf{p}+1:\mathbf{p}+\mathbf{q}})}{\partial x} \right] dx \\ &\quad \cdot \frac{\partial^2 H_{\mathbf{r}}^{(x)}(s_{\mathbf{p}+\mathbf{q}+1:\mathbf{m}})}{\partial x^2} \quad \text{si } |\mathbf{m}| \geq 2. \end{aligned}$$

Les conditions aux limites (2.9) deviennent, pour tout $\mathbf{m} \in \mathbb{M}$ et $(s_{1:\mathbf{m}}) \in (\mathbb{C}_0^+)^{|\mathbf{m}|}$,

$$\begin{aligned} [H_{\mathbf{m}}^{(x=0)}(s_1^{\text{II}}), H_{\mathbf{m}}^{(x=1)}(s_1^{\text{II}})] &= [1, 0], & \text{si } \mathbf{m} &= (0, 1, 0), \\ [H_{\mathbf{m}}^{(x=0)}(s_1^{\text{III}}), H_{\mathbf{m}}^{(x=1)}(s_1^{\text{III}})] &= [0, 1], & \text{si } \mathbf{m} &= (0, 0, 1), \\ [H_{\mathbf{m}}^{(x=0)}(s_{1:\mathbf{m}}), H_{\mathbf{m}}^{(x=1)}(s_{1:\mathbf{m}})] &= [0, 0], & \text{si } \mathbf{m} &= (1, 0, 0) \text{ ou } |\mathbf{m}| \geq 2. \end{aligned}$$

Pour chaque $\mathbf{m} \in \mathbb{M}$, les équations (A.13) à (A.14) définissent un problème aux limites linéaire de second ordre qui peut être résolu analytiquement, ou

par décomposition sur une base, comme dans la section 2.4. De même que pour $(\mathbf{M1})$, les noyaux $H_{\mathbf{m}}^{(x)}$ sont nuls si $|\mathbf{m}|$ est pair.

Plus précisément, les expressions exactes de $H_{\mathbf{m}}^{(x)}$ sont, pour tout $\mathbf{m} \in \mathbb{M}$, $(s_{1:\mathbf{m}}) \in (\mathbb{C}_0^+)^{|\mathbf{m}|}$ en utilisant les définitions des équations (2.18) et (2.21),

$$H_{\mathbf{m}}^{(x)}(s_1^{\mathbb{I}}) = \sinh((1-x)\Gamma(s_1^{\mathbb{I}})) / \sinh \Gamma(s_1^{\mathbb{I}}), \quad \text{si } \mathbf{m} = (0, 1, 0), \quad (\text{A.14})$$

$$H_{\mathbf{m}}^{(x)}(s_1^{\mathbb{III}}) = \sinh(x\Gamma(s_1^{\mathbb{III}})) / \sinh \Gamma(s_1^{\mathbb{III}}), \quad \text{si } \mathbf{m} = (0, 0, 1), \quad (\text{A.15})$$

$$H_{\mathbf{m}}^{(x)}(s_{1:\mathbf{m}}) = \int_{\Omega} G(x, \xi, \widehat{s_{1:\mathbf{m}}}) E_{\mathbf{m}}^{(\xi)}(s_{1:\mathbf{m}}) d\xi, \quad \text{si } \mathbf{m} = (1, 0, 0) \text{ ou } |\mathbf{m}| \geq 2. \quad (\text{A.16})$$

Les fonctions $e_k \in \mathcal{B}$ sont les vecteurs propres des problèmes définis par les équations (A.13) à (A.14) si $\mathbf{m} = \{(1, 0, 0)\}$ ou $|\mathbf{m}| \geq 2$. Les cas $\mathbf{m} \in \{(0, 1, 0); (0, 0, 1)\}$ sont associés à deux bases distinctes de vecteurs propres, même si \mathcal{B} définit encore une base orthogonale de L^2 . Une décomposition sur une base de L^2 assure la convergence vers la solution pour la moyenne quadratique mais pas forcément à un point x donné : c'est l'effet de Gibbs. C'est précisément le cas en $x = 0$ et $x = 1$ si l'on choisit \mathcal{B} pour $\mathbf{m} \in \{(0, 1, 0); (0, 0, 1)\}$. Néanmoins, ce choix simplifie le calcul des solutions. Il amène le résultat suivant en utilisant la définition équation (2.27), pour tout $\mathbf{m} \in \mathbb{M}$, $k \in \mathbb{N}^*$, $(s_{1:\mathbf{m}}) \in (\mathbb{C}_0^+)^{|\mathbf{m}|}$,

$$\begin{aligned} H_{\mathbf{m}}^{(x)}(s_{1:\mathbf{m}}) &= \sum_{L^2} \sum_{k \in \mathbb{N}^*} H_{\mathbf{m}}^{[k]}(s_{1:\mathbf{m}}) e_k(x), \\ H_{\mathbf{m}}^{[k]}(s_1^{\mathbb{I}}) &= \phi_k Q^{[k]}(s_1^{\mathbb{I}}), & \text{si } \mathbf{m} = (1, 0, 0), \\ H_{\mathbf{m}}^{[k]}(s_1^{\mathbb{II}}) &= \sqrt{2}k\pi (1 + \beta s_1^{\mathbb{II}}) Q^{[k]}(s_1^{\mathbb{II}}), & \text{si } \mathbf{m} = (0, 1, 0), \\ H_{\mathbf{m}}^{[k]}(s_1^{\mathbb{III}}) &= (-1)^{k+1} \sqrt{2}k\pi (1 + \beta s_1^{\mathbb{III}}) Q^{[k]}(s_1^{\mathbb{III}}), & \text{si } \mathbf{m} = (0, 0, 1), \\ H_{\mathbf{m}}^{[k]}(s_{1:\mathbf{m}}) &= -\epsilon k^2 \pi^4 Q^{[k]}(\widehat{s_{1:\mathbf{m}}}) \sum_{\substack{(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) \in \mathbb{M}^3 \\ \mathbf{p} + \mathbf{q} + \mathbf{r} = \mathbf{m}}} \left[\sum_{\ell \in \mathbb{N}^*} \ell^2 H_{\mathbf{p}}^{[\ell]}(s_{1:\mathbf{p}}) H_{\mathbf{q}}^{[\ell]}(s_{\mathbf{p}+1:\mathbf{p}+\mathbf{q}}) \right] \\ &\quad \cdot H_{\mathbf{r}}^{[k]}(s_{\mathbf{p}+\mathbf{q}+1:\mathbf{m}}), \quad \text{si } |\mathbf{m}| \geq 2. \end{aligned}$$

La combinatoire peut également être organisée comme une unique somme de termes élémentaires comme suit.

Théorème 7

Soit $\mathbb{B}_{\mathbf{m}}$ l'ensemble des arbres ternaires complets défini par, pour $\mathbf{m} \in \mathbb{M}$. Si $|\mathbf{m}| = 1$,

$$\mathbb{B}_{(1,0,0)} = \mathbb{N}^* \times \{\mathbb{I}\}, \quad \mathbb{B}_{(0,1,0)} = \mathbb{N}^* \times \{\mathbb{II}\}, \quad \mathbb{B}_{(0,0,1)} = \mathbb{N}^* \times \{\mathbb{III}\},$$

si $|\mathbf{m}|$ est pair,

$$\mathbb{B}_{\mathbf{m}} = \emptyset,$$

si $|\mathbf{m}| \geq 3$ est impair,

$$\mathbb{B}_{\mathbf{m}} = \bigcup_{\substack{(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) \in \mathbb{M}^3 \\ |\mathbf{p}|, |\mathbf{q}|, |\mathbf{r}| \text{ impair} \\ \mathbf{p} + \mathbf{q} + \mathbf{r} = \mathbf{m}}} \{(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) \in \mathbb{B}_{\mathbf{p}} \times \mathbb{B}_{\mathbf{q}} \times \mathbb{B}_{\mathbf{r}} \mid \mathfrak{k}(\mathbf{b}_1) = \mathfrak{k}(\mathbf{b}_2)\},$$

où, pour tout $\mathbf{m} \in \mathbb{M}$ et $\mathbf{b} \in \mathbb{B}_{\mathbf{m}}$, la définition de $\mathfrak{k}(\mathbf{b})$ est la suivante : si $|\mathbf{m}| = 1$ de telle sorte que $\mathbf{b} = (k, \iota) \in \mathbb{N}^* \times \{\text{I, II, III}\}$, alors $\mathfrak{k}(\mathbf{b}) = k$; si $|\mathbf{m}| \geq 3$ est impair de telle sorte que $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$, alors $\mathfrak{k}(\mathbf{b}) = \mathfrak{k}(\mathbf{b}_3)$.

Alors, pour tout $\mathbf{m} \in \mathbb{M}$, les noyaux $H_{\mathbf{m}}^{(x)}$ sont définis par, pour tout $(x, s_{1:\mathbf{m}}) \in \Omega \times (\mathbb{C}_0^+)^{|\mathbf{m}|}$,

$$H_{\mathbf{m}}^{(x)}(s_{1:\mathbf{m}}) = \sum_{\mathbf{b} \in \mathbb{B}_{\mathbf{m}}} H_{\mathbf{b}}(s_{1:\mathbf{m}}) e_{\mathfrak{k}(\mathbf{b})}(x), \quad (\text{A.17})$$

où, pour tout $\mathbf{b} \in \mathbb{B}_{\mathbf{m}}$ (avec $|\mathbf{m}|$ impair et $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ si $|\mathbf{m}| \geq 3$),

$$\begin{aligned} \text{si } |\mathbf{m}| = 1, \quad H_{\mathbf{b}} &= H_{\mathbf{m}}^{[\mathfrak{k}(\mathbf{b})]}, \quad (\text{cf. équations (A.17) à (A.17)}) \\ \text{si } |\mathbf{m}| \geq 3, \quad H_{\mathbf{b}}(s_{1:\mathbf{m}}) &= -\epsilon [\mathfrak{k}(\mathbf{b}_1) \mathfrak{k}(\mathbf{b}_3) \pi^2]^2 Q^{[\mathfrak{k}(\mathbf{b})]}(\widehat{s_{1:\mathbf{m}}}) H_{\mathbf{b}_1}(s_{1:\mathbf{m}(\mathbf{b}_1)}) \\ &\quad \cdot H_{\mathbf{b}_2}(s_{\mathbf{m}(\mathbf{b}_1)+1:\mathbf{m}(\mathbf{b}_1)+\mathbf{m}(\mathbf{b}_2)}) H_{\mathbf{b}_3}(s_{\mathbf{m}(\mathbf{b}_1)+\mathbf{m}(\mathbf{b}_2)+1:\mathbf{m}}), \end{aligned}$$

où $\mathbf{m}(\mathbf{b}) = (\mathbf{m}_{\text{I}}, \mathbf{m}_{\text{II}}, \mathbf{m}_{\text{III}}) = \mathbf{m}$ est le nombre de feuilles étiquetées respectivement, par I, II et III.

A.5.3 Identification d'une structure simulable et connexion à un chevalet

Une identifications des équations (A.17) à (A.17) pour $|\mathbf{m}| \leq 3$ et un nombre fini de modes ($1 \leq k \leq K$) conduit à la structure présentée figure A.5, qui donne une approximation en $o(\epsilon)$ de la solution. Dans cette figure, $h_{\mathbf{m}}^{[k]}$ sont des filtres linéaires (cf. équations (A.17) à (A.17)). Leur simulation peut être réalisée identiquement à celle $q^{[k]}$ (cf. 2.6) avec $\mathbf{C} = \phi_k [1, 0]$ pour $\mathbf{m} = (1, 0, 0)$, avec $\mathbf{C} = \sqrt{2}k\pi [1, \beta]$ pour $\mathbf{m} = (0, 1, 0)$, et avec $\mathbf{C} = (-1)^{k+1} \sqrt{2}k\pi [1, \beta]$ pour $\mathbf{m} = (0, 0, 1)$. C'est également le cas pour $g_{\mathbf{m}}^{[k]} = -\gamma_k q^{[k]}$ (cf. équation (2.45)) qui peut être réalisé avec $\mathbf{C} = -\gamma_k [1, 0]$ pour $|\mathbf{m}| = 1$. Ainsi, tous les filtres de cette structure ont la même complexité, à savoir, $N_h^+ = N_g^+ = 4$ et $N_h^\times = N_g^\times = 5$. La complexité globale pour une réalisation en temps discret de cette structure avec la version optimisée de (Bw) présentée figure A.6(à droite) est détaillée dans la table A.1.

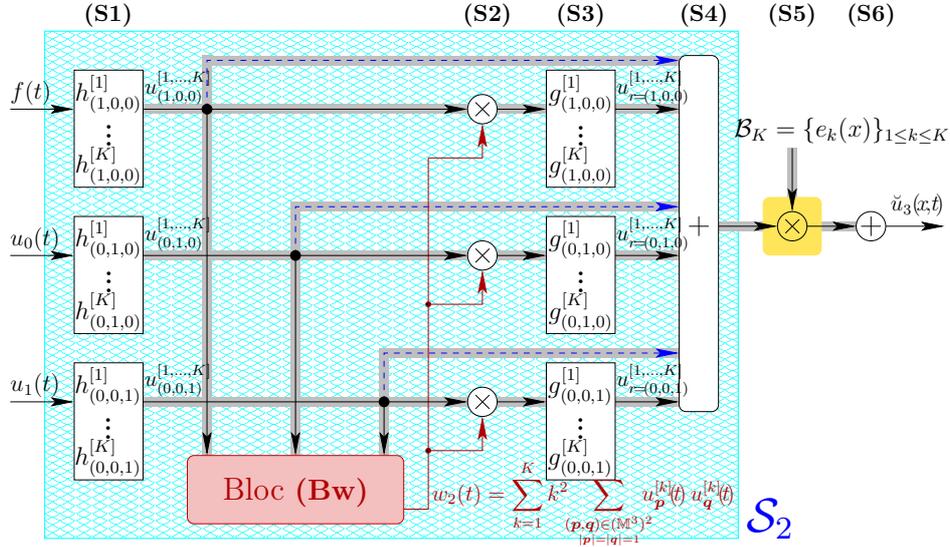


FIGURE A.5 – Bloc-diagramme de la simulation en $o(\epsilon)$ de **(M2)** avec K modes : Les flèches ombragées sont des vecteurs composés de K signaux tandis que les flèches simples ne transportent qu'un signal. Le premier étage **(S1)** correspond aux trois bancs de filtres de dimension K . Le premier banc de filtres est alimenté par la force $f(t)$, le deuxième par $u_0(t)$ et le troisième par $u_1(t)$. Le bloc **(Bw)** est décrit dans la figure A.6. L'étage **(S2)** correspond aux produits d'un signal vecteur par un signal scalaire dans le domaine temporel et **(S3)** à $3K$ filtres, chacun alimenté par un signal. L'étage **(S4)** additionne six vecteurs de dimension K . Puis, en dehors de la structure \mathcal{S}_2 , l'étage **(S5)** multiplie (pour chaque coordonnée) les coordonnées de deux vecteurs de dimension K , avant d'effectuer une somme à l'étage **(S6)**.

	approx. linéaire : $N = 1, o(\epsilon^0)$	approx. troisième ordre : $N = 3, o(\epsilon^1)$
N^+	$K(3N_h^+ + N_x + 2) - N_x$	$K(3N_h^+ + 3N_g^+ + N_x + 10) - N_x - 1$
N^\times	$K(3N_h^\times + N_x)$	$K(3N_h^\times + 3N_g^\times + N_x + 12) - 2$
N^{flaps}	$K(3N_h^{flaps} + 2N_x + 2) - N_x$	$K(6N_h^{flaps} + 2N_x + 22) - N_x - 3$

TABLE A.1 – Nombre d'opérations en virgule flottante pour calculer $u(x, t)$ pour **(M2)** avec K modes, à un instant donné et à N_x emplacements distincts pour **(M2)** : N_h^+ est le nombre de sommes nécessaires pour la simulation d'un filtre $h_1^{[k]}$ (N_h^\times pour les produits et N_g^+, N_g^\times pour $g_1^{[k]}$).

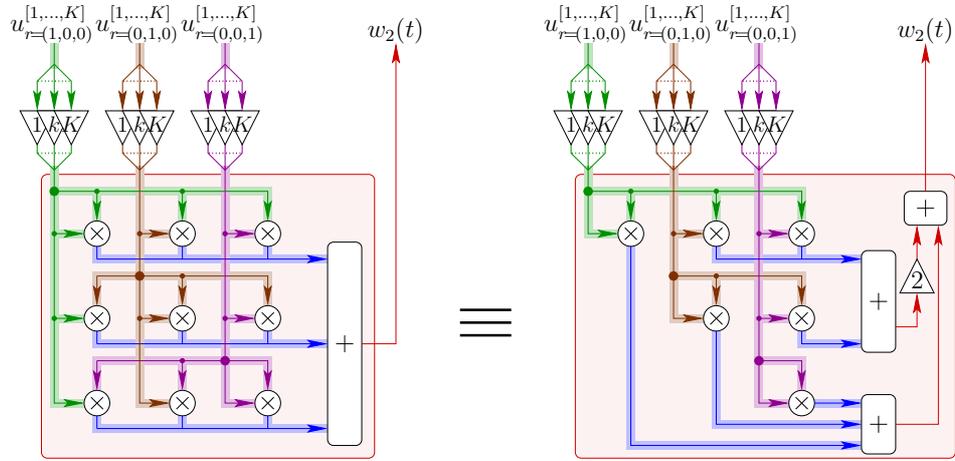


FIGURE A.6 – Bloc-diagramme détaillé de (\mathbf{Bw}) : les produits agissent sur chaque coordonnée séparément tandis que les sommes additionnent tous les signaux (toutes les coordonnées de tous les vecteurs).

Remarque : En choisissant $\mathcal{D}_K = \left\{ \frac{\partial e_k}{\partial x}(x) \right\}_{1 \leq k \leq K}$ à la place de $\mathcal{B}_K = \{e_k(x)\}_{1 \leq k \leq K}$ on calcule la sortie $\frac{\partial u_3}{\partial x}(x, t)$. Ainsi, en $x = 0$ ou $x = 1$, il est possible de connecter la structure à d'autres systèmes à ces frontières, un chevalet par exemple. Il est à noter que $\frac{\partial e_k}{\partial x}(x) = \sqrt{2}k\pi (-1)^{kx}$ pour $x \in \{0, 1\}$ et que la convergence est conservée à ces points quand $K \rightarrow \infty$.

Annexe B

Notions pour l'introduction aux groupes de Lie

Cette annexe a pour but d'introduire les notions de géométrie différentielle permettant de définir les groupes de Lie et de montrer leur lien avec la cinématique des corps rigides.

B.1 Variété différentiable

B.1.1 Variété différentiable régulière

Une variété M de dimension n est un espace topologique métrisable (qui peut être muni d'une métrique en conservant la base topologique). Cette variété est paramétrée par un ensemble de cartes (ϕ, U) , où U est un ouvert de M et ϕ une fonction de U dans un ouvert de \mathbb{R}^n . Deux cartes dont les domaines se chevauchent (ϕ, U) et (ψ, V) sont C^∞ -compatibles si $\psi^{-1} \circ \phi$ est un C^∞ -difféomorphisme et si $\phi(U \cap V)$ est un ouvert de \mathbb{R}^n . Une collection de telles cartes recouvrant M est un atlas régulier. Une variété M est régulière si elle admet un atlas régulier.

B.1.2 Espaces tangents

Soit $C^\infty(p)$ l'ensemble des fonctions réelles définies sur un voisinage de $p \in M$. L'application $X_p : C^\infty(p) \rightarrow \mathbb{R}$ est une dérivation, si $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $\forall f, g \in C^\infty(p)$

$$X_p(\alpha f + \beta g) = \alpha(X_p f) + \beta(X_p g) \quad (\text{B.1})$$

$$X_p(fg) = (X_p f)g(p) + f(p)(X_p g) \quad (\text{B.2})$$

L'ensemble des dérivations X_p définit un espace vectoriel, c'est l'espace tangent à la variété M au point p , noté T_pM . Les éléments de T_pM sont les vecteurs tangents à M en p .

Soit (U, ϕ) une carte sur M , de coordonnées locales (x_1, \dots, x_n) , l'ensemble des dérivations $\frac{\partial}{\partial x_i}$ forme une base de T_pM , ce qui permet d'écrire

$$X_p = X_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + X_n \frac{\partial}{\partial x_n}$$

où le vecteur $(X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n$ contient les coordonnées locales de X_p .

L'union disjointe des espaces tangents T_pM sur l'ensemble des points p de M définit le fibré tangent TM de M (cf. figure B.1). C'est une variété de dimension $2n$ dont les éléments sont de la forme (p, X_p) où p est un point de M et X_p un élément de T_pM .

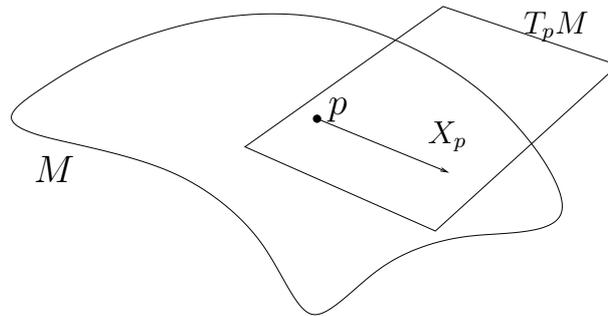


FIGURE B.1 – Variété différentiable régulière M : p est un point de la variété et X_p l'application dérivation en ce point est un vecteur de l'espace tangent à M au point p . L'ensemble des couples (p, X_p) sur la variété M constitue le fibré tangent TM de M .

B.1.3 Applications tangentées, différentielle

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Soit f une fonction différentiable d'un ouvert de E vers F , sa différentielle en un point x sera notée $Df(x)$.

Soit ϕ une carte de la variété M définie en un voisinage du point $x \in M$, pour tout entier i compris dans l'intervalle $[1, n]$, le vecteur tangent $\frac{\partial}{\partial x_i} : D_x^1(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est défini par

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)f &= \frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ \phi^{-1})(\phi(x)) \\ &= D(f \circ \phi^{-1})(\phi(x))(e_i) \end{aligned} \tag{B.3}$$

où e_i est le i -ème vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^n .

Si M_1 et M_2 sont deux variétés C^∞ -différentiables de dimensions respectives n_1 et n_2 , une fonction $\Phi : M_1 \rightarrow M_2$ est C^∞ -différentiable en $x \in M_1$ s'il existe une carte ψ_1 au voisinage de $x \in M_1$ et une carte ψ_2 au voisinage $\Phi(x) \in M_2$ telles que $\psi_2 \circ \Phi \circ \psi_1^{-1}$ est de classe C^∞ au sens classique des fonctions de \mathbb{R}^{n_1} dans \mathbb{R}^{n_2} .

La différentielle de Φ au point x , notée $\Phi'(x)$ est définie par

$$\forall X \in T_x M_1, \forall f \in D_{f(x)}^1(M_2, \mathbb{R}), (\Phi'(x)X)f = X(f \circ \Phi). \quad (\text{B.4})$$

Cette définition étend la notion classique de différentielle entre deux espaces vectoriels de dimension finie. En effet, dans un espace vectoriel les dérivées directionnelles associent les vecteurs de l'espace aux dérivations, elles permettent d'identifier l'espace vectoriel à son espace tangent. On peut alors écrire

$$f'(x) = D(f(x)) \circ Df(x) \circ (D(x))^{-1}. \quad (\text{B.5})$$

B.1.4 Champs de vecteurs tangents

Un champs de vecteurs tangents régulier sur une variété M est une application régulière $X : M \rightarrow TM$, telle que $\pi \circ X = id$ où $\pi : TM \rightarrow M$ est la projection canonique et $id : M \rightarrow M$ est l'application identité. Soit $\mathfrak{X}(M)$ l'ensemble des champs de vecteurs tangents réguliers de M .

Un champs de vecteurs tangents peut être écrit par rapport à une carte (ϕ, U) de la manière suivante

$$X(x) = X_1(x) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + X_n(x) \frac{\partial}{\partial x_n} \quad (\text{B.6})$$

où chaque X_i est une fonction régulière (la fonction coordonnée locale du champs de vecteurs X) définie sur un voisinage ouvert de $x = \phi(p)$.

Les champs de vecteur représentent les équations différentielles sur les variétés. La courbe c est une courbe intégrale sur le champs de vecteur X si

$$\dot{c}(t) = X(c(t)).$$

Soient X un champs de vecteurs tangents régulier et $f \in C^\infty(M)$ une fonction régulière sur M . La dérivée de Lie de f par rapport à X est la fonction $Xf : M \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$Xf(p) = X_p f.$$

Dans la carte (ϕ, U) et en utilisant l'équation B.6, on peut écrire

$$Xf(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} X_i(x)$$

où les dérivées partielles sont évaluées en $x = \phi(p)$.

Si X et Y sont deux champs de vecteurs tangents réguliers, le crochet de Lie $[X, Y]$ définit un nouveau champs de vecteurs tangents régulier

$$[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf).$$

Soient M et N deux variétés, $X \in \mathfrak{X}(M)$ et $Y \in \mathfrak{X}(N)$ deux champs de vecteurs tangents réguliers. X et Y sont F-compatibles si

$$Y_{F(p)} = F_{*p}X_p$$

où F est un C^∞ -difféomorphisme et $F' : TM \rightarrow TN$ est l'application push forward qui définit un champs de vecteurs tangents dans $\mathfrak{X}(N)$ par

$$(FX)'_q = F'_{F^{-1}(q)}X_{F^{-1}(q)}.$$

De même, l'application pull back $F^* : TN \rightarrow TM$, permet de définir un champs de vecteur sur M par

$$(F^*Y)_p = (F_p)^{-1'}Y_{F(p)}.$$

Ces deux applications sont liées par la relation $F^* = (F^{-1})' = (F')^{-1}$.

B.1.5 Espaces et applications cotangentes

Pour tout espace tangent T_pM à une variété M au point p , l'espace cotangent T_p^*M est défini comme le dual de l'espace tangent ($T_p^*M = (T_pM)^*$), i.e. l'ensemble de toutes les formes linéaires $\omega_p : T_pM \rightarrow \mathbb{R}$. Les éléments de l'espace cotangent sont les vecteurs cotangents.

L'action d'un vecteur cotangent ($\omega_p \in T_p^*M$) sur un vecteur tangent ($X_p \in T_pM$) est notée $\langle \omega_p, X_p \rangle$.

Si la base $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ de T_pM est associée à la base (x_1, \dots, x_n) des coordonnées locales, la base duale de T_p^*M est donnée par $\{dx_1, \dots, dx_n\}$, avec pour tout i et j entiers compris entre 1 et n ,

$$\langle dx_i, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle = \delta_{ij}.$$

Soit une fonction $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, le vecteur cotangent $df(p) \in T_p^*M$ est défini par

$$\langle df(p), X_p \rangle = X_p(f),$$

$df(p)$ coïncide avec la différentielle de f .

En prenant en compte la carte (U, ϕ) de coordonnées locales $x = (x_1, \dots, x_n)$, $df(p)$ s'écrit

$$df(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)x_n,$$

avec $x = \phi(p)$.

L'union disjointe des espaces cotangents T_p^*M sur l'ensemble des points p de M définit le fibré cotangent T^*M de M . C'est une variété de dimension $2n$ dont les éléments sont (p, α_p) où p est un point de M et α_p un élément de T_p^*M .

B.1.6 Formes différentielles

Une forme différentielle régulière sur une variété M est un champs de vecteurs réguliers, i.e. une application régulière $\alpha : M \rightarrow T^*M$ qui satisfait $\pi \circ \alpha = id$ où $\pi : T^*M \rightarrow M$ est la projection canonique et $id : M \rightarrow M$ est l'application identité.

En coordonnées locales, une forme différentielle s'écrit

$$\alpha(x) = \alpha_1(x)dx_1 + \dots + \alpha_n(x)dx_n$$

où chaque α_i est une fonction régulière sur M .

B.2 Groupes de Lie

Un groupe de Lie G est un groupe, qui est également une variété régulière et pour lequel les opérations de composition $gh, \forall (g, h) \in G^2$ et d'inversion $g^{-1}, \forall g \in G$ sont régulières (C^∞ entre les variétés). L'élément neutre est noté e .

B.2.1 Translations

Pour chaque élément g de G , on peut définir la translation à gauche $L_g : G \rightarrow G$ par

$$L_g(h) = gh$$

avec $h \in G$.

De même la translation à droite sera $R_g : G \rightarrow G$ avec

$$R_g(h) = hg$$

avec $h \in G$.

Ces translations possèdent les propriétés suivantes

$$L_{g^{-1}} = L_g^{-1} \tag{B.7}$$

$$R_{g^{-1}} = R_g^{-1}. \tag{B.8}$$

La différentielle $L'_{g^{-1}}$ d'une translation $L_{g^{-1}}$ est un isomorphisme de $T_g G$ vers $T_e G$.

B.2.2 Algèbre de Lie

Une algèbre de Lie est une algèbre dont le produit interne (appelé crochet $[\cdot, \cdot]$) est anti-symétrique ($[A, B] = -[B, A]$ et $[A, A] = 0$) et respecte l'identité de Jacobi

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0.$$

L'ensemble $\mathfrak{X}(M)$ des champs de vecteurs sur la variété M , muni du crochet est une algèbre de Lie.

Algèbre de Lie d'un groupe de Lie Un champs de vecteurs X sur un groupe de Lie G est dit invariant à gauche si $(L_g)_* X = X$ où $(L_g)_*$ est une application push forward. L'ensemble des champs de vecteurs sur G invariants à gauche est noté $\mathfrak{X}_L(G)$.

Soient X et Y deux éléments de $\mathfrak{X}_L(G)$, on peut écrire

$$L_{g*}[X, Y] = [L_{g*}X, L_{g*}Y] = [X, Y].$$

$\mathfrak{X}_L(G)$ est donc une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie $\mathfrak{X}(G)$.

L'application $\rho_L : \mathfrak{X}_L(G) \rightarrow T_e G$ est un isomorphisme linéaire, elle transporte les propriétés du crochet dans l'ensemble $T_e G$. $T_e G$ est donc également une algèbre de Lie, et plus spécifiquement l'algèbre de Lie du groupe de Lie G , on la notera \mathfrak{g} .

B.2.3 Opérateurs adjoints

Soient g et h deux éléments d'un groupe de Lie G . L'application

$$I_g : G \rightarrow G \tag{B.9}$$

$$h \longmapsto ghg^{-1} \tag{B.10}$$

est différentiable.

Soit ξ un élément de l'algèbre de Lie. La différentielle de I_g au point e s'écrit

$$Ad_g(\xi) = (L_g \circ R_{g^{-1}})'(e)\xi = (T_e I_g)\xi, \quad (\text{B.11})$$

c'est l'application adjointe du groupe. Elle représente l'action d'un élément g du groupe sur son algèbre.

Finalement, on peut définir la différentielle de cette application adjointe par

$$ad_\xi(\omega) = Ad'(e)\omega = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} Ad_{\exp(t\xi)}\omega \quad (\text{B.12})$$

où ω est également un élément de l'algèbre, comme étant l'action de l'algèbre sur elle-même.

Dans le cadre des algèbres de Lie, un lien peut être fait avec le commutateur de l'algèbre, on a en effet :

$$ad_\xi(\omega) = [\xi, \omega]. \quad (\text{B.13})$$

B.3 Application exponentielle

Pour tout élément ξ de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} , l'application $\phi_\xi : \mathbb{R} \rightarrow G$ est la courbe intégrale du champs de vecteurs invariant à gauche X_ξ passant en e à $t = 0$

$$\begin{aligned} \phi_\xi(0) &= e \\ \frac{d}{dt}\phi_\xi(t) &= X_\xi(\phi_\xi(t)). \end{aligned}$$

On peut montrer (cf. [34]) que

$$\phi_\xi(s+t) = \phi_\xi(s)\phi_\xi(t)$$

ce qui signifie que ϕ_ξ est un sous-groupe à un paramètre de G .

L'application exponentielle $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ est définie par

$$\exp(\xi) = \phi_\xi(1).$$

Elle envoie les droites vectorielles de \mathfrak{g} dans un sous-groupe à un paramètre de G .

C'est un difféomorphisme d'un voisinage de 0 dans l'algèbre vers un voisinage de l'identité dans le groupe. Dans le cas de groupe de Lie matriciels, il s'agit donc d'une exponentielle de matrice.

Cette application est surjective si G est compact : chaque élément du groupe peut être exprimé comme l'exponentielle d'un élément de l'algèbre.

B.4 Exemples

Voici quelques exemples de groupes de Lie utilisés dans le cadre de cette thèse.

B.4.1 $GL(n, \mathbb{R})$

Le groupe $GL(n, \mathbb{R})$ des matrices carrées réelles inversibles de dimension n , muni du produit de matrices, est un groupe de Lie. On remarque donc que les translations à gauche et à droite ne sont pas égales.

B.4.2 $SO(n)$

Le groupe spécial orthogonal est un sous-groupe de $GL(n, \mathbb{R})$ défini par

$$SO(n) = \{R \in GL(n, \mathbb{R}) : RR^T = \mathbf{1}, \det(R) = 1\}.$$

Pour $n = 3$, $SO(3)$ est le groupe des rotations dans \mathbb{R}^3 qui préservent l'orientation.

Les éléments de l'algèbre $\mathfrak{so}(3)$ sont définis par

$$R^{-1}\dot{R} = \widehat{\omega} \tag{B.14}$$

où $\widehat{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}$ et $\omega = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}$.

Le crochet de Lie est défini par

$$[\widehat{\omega}_1, \widehat{\omega}_2] = \widehat{\omega}_1\widehat{\omega}_2 - \widehat{\omega}_2\widehat{\omega}_1 \tag{B.15}$$

et a la propriété suivante

$$[\widehat{\omega}_1, \widehat{\omega}_2] = \widehat{\omega_1 \wedge \omega_2}. \tag{B.16}$$

L'application exponentielle est définie par la formule de Rodrigues

$$e^{\widehat{\omega}} = I + \frac{\widehat{\omega}}{\|\omega\|} \sin \|\omega\| + \frac{\widehat{\omega}^2}{\|\omega\|^2} (1 - \cos \|\omega\|). \tag{B.17}$$

B.4.3 $SE(3)$

Tous les mouvements d'un corps rigide dans \mathbb{R}^3 peuvent être définis par :

$$H(x) = Rx + p$$

où x et p appartiennent à \mathbb{R}^3 et R à $SO(3)$.

Le groupe $SE(3)$ est le groupe dont les éléments sont

$$H = \begin{bmatrix} R & p \\ 0_{13} & 1 \end{bmatrix}.$$

C'est un groupe de dimension 6.

Les éléments de l'algèbre $\mathfrak{se}(3)$ sont définis par

$$H^{-1}\dot{H} = \hat{T} \tag{B.18}$$

où $\hat{T} = \begin{bmatrix} \hat{\omega} & v \\ 0_{13} & 0 \end{bmatrix}$ et $T = \begin{bmatrix} \omega \\ v \end{bmatrix}$. Le crochet de Lie est défini par

$$[\hat{T}_1, \hat{T}_2] = \hat{T}_1\hat{T}_2 - \hat{T}_2\hat{T}_1. \tag{B.19}$$

L'application exponentielle est définie par

$$e^{\hat{T}} = \begin{bmatrix} e^{\hat{\omega}} & Av \\ 0_{13} & 1 \end{bmatrix}, \tag{B.20}$$

avec

$$A = I + \frac{\hat{\omega}}{\|\omega\|^2}(1 - \cos \|\omega\|) + \frac{\hat{\omega}^2}{\|\omega\|^3}(\|\omega\| - \sin \|\omega\|). \tag{B.21}$$

Annexe C

Calculs des dérivées de l'exponentielle

C.1 Opérateur $dexp$

$d^i exp(\hat{u})$ dans $SE(3)$ peut être exprimé en fonction de $d^j exp(\hat{\alpha})$ dans $SO(3)$ ([34]).

Pour $u = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \in se(3)$ avec $\hat{\alpha} \in so(3)$ et $\beta \in \mathbb{R}^3$, et $w = \begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \end{bmatrix} \in se(3)$ avec $\hat{\gamma} \in so(3)$ et $\delta \in \mathbb{R}^3$:

$$exp(\hat{u}) = \begin{bmatrix} exp(\hat{\alpha}) & d_{exp}^T(\hat{\alpha})\beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (C.1)$$

$$dexp(\hat{u}) = \begin{bmatrix} dexp(\hat{\alpha}) & 0 \\ d^2 exp(\hat{\alpha})(\hat{\beta}) & dexp(\hat{\alpha}) \end{bmatrix} \quad (C.2)$$

$$d^2 exp(\hat{u})(\hat{w}) = \begin{bmatrix} d^2 exp(\hat{\alpha})(\hat{\gamma}) & 0 \\ d^3 exp(\hat{\alpha})(\hat{\beta})(\hat{\gamma}) + d^2 exp(\hat{\alpha})(\hat{\delta}) & d^2 exp(\hat{\alpha})(\hat{\gamma}) \end{bmatrix} \quad (C.3)$$

avec

$$\exp(\hat{\alpha}) = \mathbf{1}_3 + \frac{\sin \|\alpha\|}{\|\alpha\|} \hat{\alpha} + \frac{1 - \cos \|\alpha\|}{\|\alpha\|^2} \hat{\alpha}^2 \quad (\text{C.4})$$

$$\text{dexp}(\hat{\alpha}) = \mathbf{1}_3 - \frac{1 - \cos \|\alpha\|}{\|\alpha\|^2} \hat{\alpha} + \frac{\|\alpha\| - \sin \|\alpha\|}{\|\alpha\|^3} \hat{\alpha}^2 \quad (\text{C.5})$$

$$\begin{aligned} d^2 \exp(\hat{\alpha})(\hat{\beta}) &= -\frac{1 - \cos \|\alpha\|}{\|\alpha\|^2} \hat{\beta} + \frac{\|\alpha\| - \sin \|\alpha\|}{\|\alpha\|} (\hat{\beta} \hat{\alpha} + \hat{\alpha} \hat{\beta}) \\ &+ \langle \alpha, \beta \rangle \left(\frac{\|\alpha\| \sin \|\alpha\| - 2(1 - \cos \|\alpha\|)}{\|\alpha\|^4} \hat{\alpha} \right. \\ &\left. - \frac{2\|\alpha\| + \|\alpha\| \cos \|\alpha\| - 3 \sin \|\alpha\|}{\|\alpha\|^5} \hat{\alpha}^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

$$\begin{aligned} d^3 \exp(\hat{\alpha})(\hat{\beta})(\hat{\gamma}) &= \frac{\|\alpha\| - \sin \|\alpha\|}{\|\alpha\|^3} (\hat{\gamma} \hat{\beta} + \hat{\beta} \hat{\gamma}) \\ &+ \langle \alpha, \beta \rangle \left(-\frac{\|\alpha\| \sin \|\alpha\| - 2(1 - \cos \|\alpha\|)}{\|\alpha\|^4} \hat{\gamma} \right. \\ &\left. - \frac{2\|\alpha\| + \|\alpha\| \cos \|\alpha\| - 3 \sin \|\alpha\|}{\|\alpha\|^5} (\hat{\gamma} \hat{\alpha} + \hat{\alpha} \hat{\gamma}) \right) \\ &+ \langle \beta, \gamma \rangle \left(-\frac{\|\alpha\| \sin \|\alpha\| - 2(1 - \cos \|\alpha\|)}{\|\alpha\|^4} \hat{\alpha} \right. \\ &\left. - \frac{2\|\alpha\| + \|\alpha\| \cos \|\alpha\| - 3 \sin \|\alpha\|}{\|\alpha\|^5} \hat{\alpha}^2 \right) \\ &+ \langle \alpha, \gamma \rangle \left[\langle \alpha, \beta \rangle \left(-\frac{\|\alpha\|^2 \cos \|\alpha\| + 3\|\alpha\| \sin \|\alpha\| - 8(1 - \cos \|\alpha\|)}{\|\alpha\|^6} \hat{\alpha} \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{12\|\alpha\| - \|\alpha\|^2 \sin \|\alpha\| + 3\|\alpha\| \cos \|\alpha\| - 15 \sin \|\alpha\|}{\|\alpha\|^7} \hat{\alpha}^2 \right) \right. \\ &\left. - \frac{\|\alpha\| \sin \|\alpha\| - 2(1 - \cos \|\alpha\|)}{\|\alpha\|^4} \hat{\beta} \right. \\ &\left. - \frac{2\|\alpha\| + \|\alpha\| \cos \|\alpha\| - 3 \sin \|\alpha\|}{\|\alpha\|^5} (\hat{\beta} \hat{\alpha} + \hat{\alpha} \hat{\beta}) \right] \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

C.2 Développement de Taylor

Le développement de Taylor des fonctions sin et cos jusqu'à l'ordre $\|\alpha\|^2$, permet d'écrire $\forall \alpha \in so(3)$:

$$d_{exp}(\hat{\alpha}) \simeq \mathbf{1}_3 - \left(\frac{1}{2} - \frac{\|\alpha\|^2}{24}\right)\hat{\alpha} + \left(\frac{1}{6} - \frac{\|\alpha\|^2}{120}\right)\hat{\alpha}^2.$$

En utilisant les propriétés des matrices anti-symétriques dans $so(3)$ i.e. $\hat{\alpha}^T = -\hat{\alpha}$, on peut écrire

$$d_{exp}^T(\hat{\alpha}) \simeq \mathbf{1}_3 + \left(\frac{1}{2} - \frac{\|\alpha\|^2}{24}\right)\hat{\alpha} + \left(\frac{1}{6} - \frac{\|\alpha\|^2}{120}\right)\hat{\alpha}^2.$$

Les expressions de $d^2 exp(\hat{\alpha})(\hat{\beta})$ et $d^3 exp(\hat{\alpha})(\hat{\beta})(\hat{\gamma})$ sont

$$\begin{aligned} d^2 exp(\hat{\alpha})(\hat{\beta}) &\simeq \frac{\|\alpha\|^2 - 12}{24}\hat{\beta} + \langle \alpha, \beta \rangle \left[\frac{15 - \|\alpha\|^2}{180}\hat{\alpha} + \frac{\|\alpha\|^2 - 21}{1260}\hat{\alpha}^2 \right] \\ &\quad + \frac{20 - \|\alpha\|^2}{120}(\hat{\alpha}\hat{\beta} + \hat{\beta}\hat{\alpha}) \\ d^3 exp(\hat{\alpha})(\hat{\beta})(\hat{\gamma}) &\simeq \frac{20 - \|\alpha\|^2}{120}(\hat{\gamma}\hat{\beta} + \hat{\beta}\hat{\gamma}) \\ &\quad + \langle \alpha, \beta \rangle \left[\frac{15 - \|\alpha\|^2}{180}\hat{\gamma} + \frac{\|\alpha\|^2 - 21}{1260}(\hat{\gamma}\hat{\alpha} + \hat{\alpha}\hat{\gamma}) \right] \\ &\quad + \langle \beta, \gamma \rangle \left[\frac{15 - \|\alpha\|^2}{180}\hat{\alpha} + \frac{\|\alpha\|^2 - 21}{1260}\hat{\alpha}^2 \right] \\ &\quad + \langle \alpha, \gamma \rangle \left[\langle \alpha, \beta \rangle \left(\frac{9\|\alpha\|^4 - 280\|\alpha\|^2 + 3360}{5040\|\alpha\|^2}\hat{\alpha} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{-7\|\alpha\|^4 + 288\|\alpha\|^2 - 5040}{30240\|\alpha\|^2}\hat{\alpha}^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{15 - \|\alpha\|^2}{180}\hat{\beta} + \frac{\|\alpha\|^2 - 21}{1260}(\hat{\beta}\hat{\alpha} + \hat{\alpha}\hat{\beta}) \right] \end{aligned}$$

C.3 Équation d'équilibre

La simulation par les séries de Volterra étant tronquée à l'ordre 2, il est alors possible d'effectuer le développement de Taylor des opérateurs contenus dans ces matrices sans changer la qualité de l'approximation. On utilisera les

expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
dexp(\widehat{\alpha}) &= \mathbf{1}_3 - \frac{1}{2}\widehat{\alpha} + \frac{1}{6}\widehat{\alpha}^2 + O(\|u\|^3) \\
d^2exp(\widehat{\alpha})(\widehat{\beta}) &= -\frac{1}{2}\widehat{\beta} + \frac{1}{6}(\widehat{\alpha}\widehat{\beta} + \widehat{\beta}\widehat{\alpha}) + O(\|u\|^3) \\
d^3exp(\widehat{\alpha})(\widehat{\beta})(\widehat{\gamma}) &= \frac{1}{6}(\widehat{\gamma}\widehat{\beta} + \widehat{\beta}\widehat{\gamma}) + O(\|u\|^3) \\
e^{-\widehat{\alpha}} - \mathbf{1}_3 &= -\widehat{\alpha} + \frac{1}{2}\widehat{\alpha}^2 + O(\|u\|^3) \\
(e^{-\widehat{\alpha}})' &= -e^{-\widehat{\alpha}}dexp(-\widehat{\alpha})\alpha' = -\alpha' - \frac{1}{2}\widehat{\alpha}\alpha' + \widehat{\alpha}\alpha' + O(\|u\|^3)
\end{aligned}$$

Les cinq composantes de l'équation (3.38) sont définies par :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(u, \ddot{u}) &= d_{exp}^T(\widehat{u})Jd_{exp}(\widehat{u})\ddot{u} \\
&= \begin{bmatrix} dexp^T(\widehat{\alpha}) & d^2exp(\widehat{\alpha})(\widehat{\beta}) \\ 0 & dexp^T(\widehat{\alpha}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dexp(\widehat{\alpha}) & 0 \\ d^2exp(\widehat{\alpha})(\widehat{\beta}) & dexp(\widehat{\alpha}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} dexp^T(\widehat{\alpha})J_1 & d^2exp(\widehat{\alpha})(\widehat{\beta})J_4 \\ 0 & dexp^T(\widehat{\alpha})J_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dexp(\widehat{\alpha}) & 0 \\ d^2exp(\widehat{\alpha})(\widehat{\beta}) & dexp(\widehat{\alpha}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{bmatrix} \\
&\simeq \mathcal{A}_1\ddot{u} + \mathcal{A}_2(u, \ddot{u}) \\
&= \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\widehat{\alpha}J_1 - J_1\widehat{\alpha}) & \frac{1}{2}\widehat{\beta}J_4 \\ \frac{-1}{2}J_4\widehat{\beta} & \frac{1}{2}(\widehat{\alpha}J_4 - J_4\widehat{\alpha}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{bmatrix} \\
\\
\mathcal{B}(u, \dot{u}) &= d_{exp}^T(\widehat{u})J(d_{exp}^2(\widehat{u})\dot{u})\dot{u} + d_{exp}^T(\widehat{u})ad_{d_{exp}^2(\widehat{u})\dot{u}}^*Jd_{exp}(\widehat{u})\dot{u} \\
&= \begin{bmatrix} dexp^T(\widehat{\alpha}) & d^2exp(\widehat{\alpha})(\widehat{\beta}) \\ 0 & dexp^T(\widehat{\alpha}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d^2exp(\widehat{\alpha})(\widehat{\alpha}) & 0 \\ d^3exp(\widehat{\alpha})(\widehat{\beta})(\widehat{\alpha}) + d^2exp(\widehat{\alpha})(\widehat{\beta}) & d^2exp(\widehat{\alpha})(\widehat{\alpha}) \end{bmatrix} \dot{u} \\
&+ \begin{bmatrix} dexp^T(\widehat{\alpha}) & d^2exp(\widehat{\alpha})(\widehat{\beta}) \\ 0 & dexp^T(\widehat{\alpha}) \end{bmatrix} ad_{d_{exp}^2(\widehat{u})\dot{u}}^* \begin{bmatrix} dexp(\widehat{\alpha}) & 0 \\ d^2exp(\widehat{\alpha})(\widehat{\beta}) & dexp(\widehat{\alpha}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dexp(\widehat{\alpha}) & 0 \\ d^2exp(\widehat{\alpha})(\widehat{\beta}) & dexp(\widehat{\alpha}) \end{bmatrix} \dot{u} \\
&\simeq \mathcal{B}_2(u, \dot{u}) = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2}J_1\widehat{\alpha} - \widehat{J}_1\widehat{\alpha} & -\widehat{J}_4\widehat{\beta} \\ \frac{-1}{2}J_4\widehat{\beta} - \widehat{J}_4\widehat{\beta} & \frac{-1}{2}J_4\widehat{\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{-1}{2}J_1\widehat{\alpha} + \widehat{\alpha}J_1 & \widehat{\beta}J_4 \\ \frac{-1}{2}J_4\widehat{\beta} & \frac{-1}{2}J_4\widehat{\alpha} + \widehat{\alpha}J_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}(u, u'') &= -d_{exp}^T(\hat{u})\Sigma d_{exp}(\hat{u})u'' - d_{exp}^T(\hat{u})\Sigma Ad'_{e^{-\hat{u}}}(H_0^{-1}H'_0) \\
&= -\begin{bmatrix} dexp^T(\hat{\alpha}) & d^{2T}exp(\hat{\alpha})(\hat{\beta}) \\ 0 & dexp^T(\hat{\alpha}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dexp(\hat{\alpha}) & 0 \\ d^2exp(\hat{\alpha})(\hat{\beta}) & dexp(\hat{\alpha}) \end{bmatrix} u'' \\
&\quad - \begin{bmatrix} dexp^T(\hat{\alpha}) & d^{2T}exp(\hat{\alpha})(\hat{\beta}) \\ 0 & dexp^T(\hat{\alpha}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_4 \end{bmatrix} Ad_{e^{-\hat{u}}}ad_{-dexp(-\hat{u})u'}H_0^{-1}H'_0 \\
&= -\begin{bmatrix} dexp^T(\hat{\alpha})\Sigma_1 & d^{2T}exp(\hat{\alpha})(\hat{\beta})\Sigma_4 \\ 0 & dexp^T(\hat{\alpha})\Sigma_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dexp(\hat{\alpha}) & 0 \\ d^2exp(\hat{\alpha})(\hat{\beta}) & dexp(\hat{\alpha}) \end{bmatrix} u'' \\
&\quad - \begin{bmatrix} dexp^T(\hat{\alpha})\Sigma_1 & d^{2T}exp(\hat{\alpha})(\hat{\beta})\Sigma_4 \\ 0 & dexp^T(\hat{\alpha})\Sigma_4 \end{bmatrix} e^{-\hat{u}} [ad_{-dexp(-\hat{u})u'}H_0^{-1}H'_0] e^{\hat{u}} \\
&\simeq \mathcal{C}_1 u'' + \mathcal{C}_2(u, u'') = \begin{bmatrix} -\Sigma_1 & 0 \\ 0 & -\Sigma_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha'' \\ \beta'' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\hat{\alpha}\Sigma_1 - \Sigma_1\hat{\alpha}) & \frac{1}{2}\hat{\beta}\Sigma_4 \\ -\frac{1}{2}\Sigma_4\hat{\beta} & \frac{1}{2}(\hat{\alpha}\Sigma_4 - \Sigma_4\hat{\alpha}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha'' \\ \beta'' \end{bmatrix} \\
&\quad - \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\hat{\beta}\Sigma_4\hat{\alpha}'E_1 \\ -\Sigma_4(\hat{\alpha}'E_1 - \hat{\alpha}\hat{\alpha}'E_1 + \frac{1}{2}\hat{\alpha}\hat{\alpha}'E_1) - \frac{1}{2}\hat{\alpha}\Sigma_4\hat{\alpha}'E_1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(u, u') &= -d_{exp}^T(\hat{u})\Sigma(d_{exp}^2(\hat{u})u')u' - d_{exp}^T(\hat{u})ad_{d_{exp}^2(\hat{u})u'}^*\Sigma [d_{exp}(\hat{u})u' + Ad_{e^{-\hat{u}}}(H_0^{-1}H'_0) - H_0^{-1}H'_0] \\
&\quad - dexp^T\Sigma Ad'_{e^{-\hat{u}}}(H_0^{-1}H'_0) \\
&= -\begin{bmatrix} dexp^T(\hat{\alpha}) & d^{2T}exp(\hat{\alpha})(\hat{\beta}) \\ 0 & dexp^T(\hat{\alpha}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_4 \end{bmatrix} \\
&\quad \begin{bmatrix} d^2exp(\hat{\alpha})(\hat{\alpha}') & 0 \\ d^3exp(\hat{\alpha})(\hat{\beta})(\hat{\alpha}') + d^2exp(\hat{\alpha})(\hat{\beta}') & d^2exp(\hat{\alpha})(\hat{\alpha}') \end{bmatrix} u' \\
&\quad - \begin{bmatrix} dexp^T(\hat{\alpha}) & d^{2T}exp(\hat{\alpha})(\hat{\beta}) \\ 0 & dexp^T(\hat{\alpha}) \end{bmatrix} ad^* \begin{bmatrix} dexp(\hat{\alpha}) & 0 \\ d^2exp(\hat{\alpha})(\hat{\beta}) & dexp(\hat{\alpha}) \end{bmatrix} u' \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_4 \end{bmatrix} \\
&\quad \begin{bmatrix} dexp(\hat{\alpha}) & 0 \\ d^2exp(\hat{\alpha})(\hat{\beta}) & dexp(\hat{\alpha}) \end{bmatrix} u' + Ad_{e^{-\hat{u}}}(H_0^{-1}H'_0) - H_0^{-1}H'_0 \\
&\quad - \begin{bmatrix} dexp^T(\hat{\alpha}) & d^{2T}exp(\hat{\alpha})(\hat{\beta}) \\ 0 & dexp^T(\hat{\alpha}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_4 \end{bmatrix} Ad_{e^{-\hat{u}}}ad_{-dexp(-\hat{u})u'}H_0^{-1}H'_0 \\
&\simeq \mathcal{D}_2(u, u') \\
&= -\begin{bmatrix} \frac{-1}{2}\Sigma_1\hat{\alpha}' - \widehat{\Sigma_1\alpha'} & -\widehat{\Sigma_4\beta'} + \widehat{\Sigma_4\hat{\alpha}E_1} \\ \frac{-1}{2}\Sigma_4\hat{\beta}' - \widehat{\Sigma_4\beta'} + \widehat{\Sigma_4\hat{\alpha}E_1} & \frac{-1}{2}\Sigma_4\hat{\alpha}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{bmatrix} \\
&\quad - \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\hat{\beta}\Sigma_4(I - \hat{\alpha})(\alpha' + \frac{1}{2}\hat{\alpha}\alpha')E_1 \\ (-I - \frac{1}{2}\hat{\alpha})\Sigma_4(I - \hat{\alpha})(\alpha' + \frac{1}{2}\hat{\alpha}\alpha')E_1 \end{bmatrix} \\
&= -\begin{bmatrix} \frac{-1}{2}\Sigma_1\hat{\alpha}' + \hat{\alpha}'\Sigma_1 & \hat{\beta}'\Sigma_4 \\ \frac{-1}{2}\Sigma_4\hat{\beta}' & \frac{-1}{2}\Sigma_4\hat{\alpha}' + \hat{\alpha}'\Sigma_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{bmatrix} \\
&\quad - \begin{bmatrix} -\hat{\beta}'\Sigma_4\hat{\alpha}E_1 \\ -\hat{\alpha}'\Sigma_4\hat{\alpha}E_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\hat{\beta}\Sigma_4\hat{\alpha}'E_1 \\ -\Sigma_4\hat{\alpha}'E_1 - \Sigma_4\frac{1}{2}\hat{\alpha}\hat{\alpha}'E_1 + \Sigma_4\hat{\alpha}\hat{\alpha}'E_1 - \frac{1}{2}\hat{\alpha}\Sigma_4\hat{\alpha}'E_1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(u, \dot{u}) &= ad_{exp}^T(\hat{u})Jd_{exp}(\hat{u})\dot{u} \\
&\simeq \mathcal{F}_1\dot{u} + \mathcal{F}_2(u, \dot{u}) = a \begin{bmatrix} 11J_1 & 0 \\ 0 & J_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\hat{\alpha}J_1 - J_1\hat{\alpha})\dot{\alpha} + \frac{1}{2}\hat{\beta}J_4\dot{\beta} \\ \frac{-1}{2}J_4\hat{\beta}\dot{\alpha} + \frac{1}{2}(\hat{\alpha}J_4 - J_4\hat{\alpha})\dot{\beta} \end{bmatrix} \\
&= a(\mathcal{A}_1\dot{u} + \mathcal{A}_2(u, \dot{u}))
\end{aligned}$$

C.4 Vérification du changement de variable $(\mathbf{T}, \Xi) \rightarrow u$

L'équation 3.22 révèle la non commutation entre dérivation temporelle et dérivation spatiale. La variable u est définie dans un groupe commutatif où la question ne se pose plus. On a $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}u = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}u$ ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{T} - \frac{\partial}{\partial t}\Xi \\
&= d_{exp}(\hat{u})\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t} + d^2exp(\hat{u})\left(\frac{\partial\hat{u}}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial t} - d_{exp}(\hat{u})\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x} - d^2exp(\hat{u})\left(\frac{\partial\hat{u}}{\partial t}\right)\frac{\partial u}{\partial x} \\
&\quad - \frac{\partial Ad_{exp(-\hat{u})}}{\partial t}H_0^{-1}\frac{\partial H_0}{\partial x} \\
&= d^2exp(\hat{u})\left(\frac{\partial\hat{u}}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial t} - d^2exp(\hat{u})\left(\frac{\partial\hat{u}}{\partial t}\right)\frac{\partial u}{\partial x} \\
&\quad + ad_{-d_{exp(-\hat{u})}\frac{\partial\hat{u}}{\partial t}}(Ad_{exp(-\hat{u})}H_0^{-1}\frac{\partial H_0}{\partial x}).
\end{aligned}$$

Une généralisation du théorème de Schwartz présentée par Xavier Merhiot dans ce cadre permet d'écrire (cf. [34])

$$\begin{aligned}
d^2exp(\hat{u})\left(\frac{\partial\hat{u}}{\partial x}\right)\dot{u} &= d^2exp(\hat{u})\left(\frac{\partial\hat{u}}{\partial t}\right)\frac{\partial u}{\partial x} \\
&+ ad_{d_{exp(\hat{u})}\frac{\partial\hat{u}}{\partial t}}(d_{exp(\hat{u})}\frac{\partial u}{\partial x}) - d_{exp(\hat{u})}ad_{\frac{\partial\hat{u}}{\partial t}}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)
\end{aligned}$$

avec $ad_{\frac{\partial\hat{u}}{\partial t}}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0$ puisque u est sur un groupe commutatif. Finalement

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{T} - \frac{\partial}{\partial t}\Xi \\
&= ad_{d_{exp(\hat{u})}\frac{\partial\hat{u}}{\partial t}}(d_{exp(\hat{u})}\frac{\partial u}{\partial x}) + ad_{-d_{exp(-\hat{u})}\frac{\partial\hat{u}}{\partial t}}(Ad_{exp(-\hat{u})}H_0^{-1}\frac{\partial H_0}{\partial x}) \\
&= ad_{\mathbf{T}}(\Xi + H_0^{-1}\frac{\partial H_0}{\partial x} - Ad_{exp(-\hat{u})}H_0^{-1}\frac{\partial H_0}{\partial x}) + ad_{\mathbf{T}}Ad_{H^{-1}}H_0^{-1}\frac{\partial H_0}{\partial x} \\
&= ad_{\mathbf{T}}(\Xi + H_0^{-1}\frac{\partial H_0}{\partial x}).
\end{aligned}$$

L'équation (3.22) est vérifiée.

Annexe D

Principe de Hamilton

D.1 Énergie cinétique

L'énergie cinétique de la poutre $\frac{1}{2}\rho\dot{\mathbf{x}}^T\dot{\mathbf{x}}$ peut être exprimée dans $SE(3)$ grâce aux équations 3.7 et 3.9

$$\begin{aligned}dE_c &= \frac{1}{2}\rho P^T \dot{H}^T \dot{H} P \, dV(X, Y, Z) \\ &= \frac{1}{2}\rho P^T (H\hat{\mathbf{T}})^T H\hat{\mathbf{T}} P \, dV(X, Y, Z)\end{aligned}$$

où $P^T\hat{\mathbf{T}}^T$ peut être récrit $\mathbf{T}^T Q^T$.

En effet, en utilisant les propriétés du produit vectoriel, il est possible d'écrire pour $\hat{\mathbf{T}} \in se(3)$:

$$\begin{aligned}P^T\hat{\mathbf{T}}^T &= \begin{bmatrix} \mathbf{w}_0^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\omega}^T & 0_{31} \\ v^T & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{w}_0^T \hat{\omega}^T + v^T & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (\omega \wedge \mathbf{w}_0)^T + v^T & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -(\widehat{\mathbf{w}}_0 \omega)^T + v^T & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \omega^T \widehat{\mathbf{w}}_0^T + v^T & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \omega^T & v^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{w}}_0^T & 0 \\ \mathbf{1}_3 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{T}^T Q^T.\end{aligned}$$

Finalement,

$$dE_c = \frac{1}{2}\rho \mathbf{T}^T A \mathbf{T} \, dV(X, Y, Z)$$

avec

$$\begin{aligned} A &= Q^T H^T H Q \\ &= \rho \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{w}}_0 \widehat{\mathbf{w}}_0^T & \widehat{\mathbf{w}}_0 \\ \widehat{\mathbf{w}}_0^T & \mathbf{1}_3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

En considérant A indépendant de X (section constante), la matrice d'inertie étendue est définie comme étant l'intégrale de A sur la section :

$$J = \int_{\text{section}} A(Y, Z) dY dZ \quad (\text{D.1})$$

Afin d'utiliser le principe de Hamilton, l'expression d'une petite variation δE_c d'énergie cinétique est nécessaire. Cette petite variation est définie par :

$$\delta E_c = \frac{1}{2} \int_0^L \delta \mathbf{T}^T J \mathbf{T} dX,$$

D.2 Énergie potentielle

Soit Σ le tenseur de loi de comportement élastique linéaire, et

$$\widehat{\Xi} = H^{-1} H' - H_0^{-1} H'_0 = \begin{bmatrix} \widehat{\Pi} & \Gamma \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

le tenseur des déformations, avec $H_0(X) = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_3 & X E_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $H(X, t)^{-1} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T r \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. H_0 est la position initiale de la poutre, i.e. pour tout $t \leq 0$ la poutre est droite le long de l'axe E_1 .

En utilisant la même méthode que pour l'énergie cinétique, la variation d'énergie potentielle due à la variation $\delta H = e^{\delta\theta}$ est fonction de $\delta \Xi = \delta\theta' + ad_{H^{-1}H'}(\delta\theta)$.

Ainsi,

$$\delta E_p = \frac{1}{2} \int_0^L \delta \Xi^T \Sigma \Xi dX$$

Annexe E

Détail du calcul de l'application de la méthode des images

L'équation (5.17) est issue du calcul suivant :

$$\begin{aligned}
& \forall(x, \xi) \in [0; 1]^2, \forall s \in \mathbb{C}/\operatorname{Re}(s) > 0 \\
& H_1^p(x; \xi, s) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} H_1^{p\infty}(x; \xi + 2n, s) - H_1^{p\infty}(x; -\xi + 2n, s) \\
& = \sum_{n \in \mathbb{Z}} H_1^{p+\infty}(x; \xi + 2n, s) + H_1^{p-\infty}(x; \xi + 2n, s) \\
& \quad - H_1^{p+\infty}(x; -\xi + 2n, s) - H_1^{p-\infty}(x; -\xi + 2n, s) \\
& = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-s(x-\xi-2n)} \Gamma(x-\xi-2n) + e^{-s(-x+\xi+2n)} \Gamma(-x+\xi+2n) \\
& \quad - e^{-s(x+\xi-2n)} \Gamma(x+\xi-2n) - e^{-s(-x-\xi+2n)} \Gamma(-x-\xi+2n) \\
& = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} e^{-s(-x+\xi+2n)} \Gamma(-x+\xi+2n) - e^{-s(-x-\xi+2n)} \Gamma(-x-\xi+2n) \\
& \quad + \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}^{*-}} e^{-s(x-\xi-2n)} \Gamma(x-\xi-2n) - e^{-s(x+\xi-2n)} \Gamma(x+\xi-2n) \\
& \quad + \frac{1}{2} [e^{-s(x-\xi)} \Gamma(x-\xi) + e^{-s(\xi-x)} \Gamma(\xi-x) - e^{-s(x+\xi)}] \\
& = \sinh(sx) \left[\sinh(s\xi) \left[-1 - 2 \sum_{n \in \mathbb{N}^*} e^{-2ns} \right] + \cosh(s\xi) \Gamma(\xi-x) \right] \\
& \quad + \cosh(sx) \sinh(s\xi) \Gamma(x-\xi) \\
& = \sinh(sx) \left[\sinh(s\xi) \left[1 - \frac{2}{1-e^{-2s}} \right] + \cosh(s\xi) \Gamma(\xi-x) \right] \\
& \quad + \cosh(sx) \sinh(s\xi) \Gamma(x-\xi) \\
& = \begin{cases} \sinh(s\xi) \left[\cosh(sx) - \frac{\sinh(sx)}{\tanh(s)} \right] & \text{si } x > \xi \\ \sinh(sx) \left[\cosh(s\xi) - \frac{\sinh(s\xi)}{\tanh(s)} \right] & \text{si } \xi > x \end{cases}
\end{aligned}$$

Bibliographie

- [1] Source for materials information. <http://www.matweb.com>.
- [2] R. Abraham and J.E. Marsden. *Foundations of mechanics : Second edition*. Addison-Wesley Publishing, 1978.
- [3] M. Abramowitz and I.A. Stegun. *Handbook of mathematical functions*. New York : Dover, 1970.
- [4] G.V. Anand. Large-amplitude damped free vibration of a stretched string. *Journal of the Acoustical Society of America*, 45(5) :1089–1096, 1969.
- [5] M.F. Ashby. *Materials Selection In Mechanical Design*. Butterworth-Heinemann, 2004.
- [6] J. Bensoam. *Représentation intégrale appliquée à la synthèse sonore par modélisation physique*. PhD thesis, Université du Maine, 2003.
- [7] S.P. Boyd. *Volterra series : Engineering fundamentals*. PhD thesis, Harvard University, 1985.
- [8] F. Boyer and D. Primault. The poincaré-chetayev equations and flexible multibody systems. *Journal of applied mathematics and mechanics*, 69 :925–942, 2005.
- [9] A. Browder. *Mathematical Analysis : An introduction*. New York : Springer-Verlag, 1996.
- [10] H. Brézis. *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*. Dunod, 1999.
- [11] G.F. Carrier. On the non-linear vibration problem of the elastic string. *Quarterly of Applied Mathematics*, 3 :157–165, 1945.
- [12] A. Chaigne and V. Doutaut. Numerical simulations of xylophones. i. time-domain modeling of the vibrating bars. *Journal of the Acoustical Society of America*, 101 :539–557, 1997.
- [13] J. Le Rond d’Alembert. *Mémoires de l’académie des sciences de Berlin*, chapter Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration, pages 214–219. 1747.

- [14] A. de Cheveigné and H. Kawahara. Yin, a fundamental frequency estimator for speech and music. *Journal of the Acoustical Society of America*, 111 :1917–1930, 2002.
- [15] C. Deschamps and A. Warusfel. *Mathématiques Tout-en-un 2ème année MP*. Dunod, 2006.
- [16] J. Dieudonné. *Calcul infinitésimal*. Hermann, 1980.
- [17] L. Euler. *Mémoires de l'académie des sciences de Berlin*, chapter Sur la vibration des cordes, pages 69–85. 1750.
- [18] M. Fliess, M. Lamnabhi, and F. Lamnabhi-Lagarrigue. An algebraic approach to nonlinear functional expansions. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 30 :554–570, 1983.
- [19] D. George. Continuous nonlinear systems. Technical report, MIT RLE Tech. Rep. 335, 1959.
- [20] G.C. Gorain and S.K. Bose. Uniform stability of damped nonlinear vibrations of an elastic string. *Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.)*, 113(4) :443–449, November 2003.
- [21] M. Hasler. *Systèmes non linéaires*. EPFL Lausanne, 1999.
- [22] D.D. Holm. *Geometric mechanics, Part II : Rotating, translating and rolling*. Imperial College Press, 2008.
- [23] T. Hélie. Résolution d'une équation des ondes faiblement non-linéaire par les séries de volterra et décomposition modale. In *Congrès Français d'Acoustique*, Tours, 2006.
- [24] T. Hélie and M. Hasler. Volterra series for solving weakly non-linear partial differential equations : application to a dissipative burger's equation. *International Journal of Control*, 77(12) :1071–1082, 2004.
- [25] T. Hélie and B. Laroche. On the convergence of volterra series of finite dimensional quadratic mimo systems. *International Journal of Control, special issue in Honor of Michel Fliess 60 th-birthday*, 81-3 :358–370, 2008.
- [26] T. Hélie and B. Laroche. Computation of convergence radius and error bounds of volterra series for single input systems with a polynomial nonlinearity. In *Joint 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference*, Shanghai, P.R. China, 2009.
- [27] T. Hélie and B. Laroche. Convergence of series expansions for some infinite dimensional nonlinear systems. In *IFAC SSSC*, volume 4, pages 1–7, Ancone, Italie, Septembre 2010.

- [28] T. Hélie and D. Matignon. Damping models for the sound synthesis of bar-like instruments. In *7th int. conf. on Systemics, Cybernetics and Informatics, Orlando, Florida*, pages 541–546, Juillet 2001.
- [29] T. Hélie and D. Roze. Sound synthesis of a nonlinear string using volterra series. *Journal of Sound and Vibration*, 314 :275–306, 2008.
- [30] A. Isidori. *Nonlinear control systems (3rd edition)*. Springer Verlag, 1995.
- [31] G. Kirchhoff. *Vorlesungen über Mathematische Physik : Mechanik*. Leipzig : Teubner, 1877.
- [32] F. Lamnabhi-Lagarrigue. *Analyse des systèmes non linéaires*. Hermès, 1994.
- [33] J.E. Marsden and T. Ratiu. *Introduction to mechanics and symmetry : a basic exposition of classical mechanical systems*. Springer, 1999.
- [34] X. Merlhiot. *Une contribution algorithmique aux outils de la simulation mécanique interactive pour la maquette numérique industrielle*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, 2009.
- [35] H. Munthe-Kaas. Runge-kutta methods on lie groups. *BIT Numerical Mathematics*, 38 :92–111, Mars 1998.
- [36] R.M. Murray, Z. Li, and S.S. Sastry. *Robotic manipulation*. CRC Press, 1994.
- [37] R. Narasimha. Non-linear vibration of an elastic string. *Journal of Sound and Vibration*, 8, 134-146 1968.
- [38] L.R. Rabiner and C.M. Rader, editors. *Digital signal Processing*. IEEE Press, Inc. New York, 1972.
- [39] H. Reinhard. *Eléments de mathématiques du signal : tome 1 - Signaux déterministes*. Dunod, 1995.
- [40] D. Roze. Simulation d'une corde avec fortes déformations par les séries de volterra. Master's thesis, Université Pierre et Marie Curie, 2006.
- [41] W.J. Rugh. Nonlinear system theory. Web Version, 2002.
- [42] J.C. Simo and L. Vu-Quoc. On the dynamics in space of rods undergoing large motions – a geometrically exact approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 66(2) :125–161, 1988.
- [43] O. Thomas. *Analyse et modélisation de vibrations non-linéaires de milieux minces élastiques - Application aux instruments de percussion*. PhD thesis, ENST, 2001.
- [44] C. Touzé. *Analyse et modélisation de signaux acoustiques et vibratoires chaotiques. Application aux instruments de percussion non-linéaires*. PhD thesis, ENST, 2000.

- [45] C. Truesdell. Outline of the history of flexible or elastic bodies to 1788. *Journal of the Acoustical Society of America*, 32(12) :1647–1656, 1960.
- [46] C. Valette and C. Cuesta. *Mécanique de la corde vibrante*. Hermès, 1993.
- [47] V.S. Varadarajan. *Lie groups, Lie algebras, and their representations*. Springer-Verlag, 1984.
- [48] A. Watzky. Non-linear three-dimensional large-amplitude damped free vibration of a stiff elastic stretched string. *Journal of Sound and Vibration*, 153 :125–142, 1992.
- [49] A. Watzky. *Sur la vibration non linéaire des fils précontraints (cordes, verges tendues)*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie (Paris 6), 1992.