



Stage ATIAM

Géométrie différentielle et mécanique

Stage réalisé de Mars à Juillet 2011 à l'Ircam
Encadrant : Joel Bensoam

Thomas Humbert

3 août 2011

Résumé

L'application de concepts hérités de la géométrie différentielle à l'étude du comportement de systèmes dynamiques en considérant les trajectoires empruntées par ces derniers comme des géodésiques fournit des solutions générales élégantes tout en s'affranchissant des non-linéarités artificielles introduites par le paramétrage de l'espace ambiant à l'aide de systèmes de coordonnées. L'utilisation des groupes de Lie permet alors de considérer l'évolution temporelle du système en fonction des transformations subies par l'action d'un groupe.

A l'aide de ce formalisme, une étude complète du problème du corps rigide en rotation a été menée tout en prenant en compte les symétries et invariances du système en introduisant l'ellipsoïde liée à la conservation de l'énergie totale ainsi que la sphère engendrée par l'invariance du moment angulaire. L'intersection de ces surfaces fournit ainsi les solutions du problème et permettra en outre de se questionner sur la stabilité des états d'équilibre du système. Nous montrerons ensuite, en prenant exemple sur le pendule, que la prise en compte de l'énergie potentielle nécessite l'introduction de la métrique de Jacobi. Cette étape permet de pouvoir à nouveau considérer une surface traduisant la conservation de l'énergie et déterminer alors les trajectoires du système. La mise en rotation du pendule permettra finalement de mettre en lumière un exemple simple de bifurcation non-linéaire.

Afin de conclure, ce manuscrit proposera des pistes mathématiques telles que l'utilisation des connexions ou des espaces fibrés qui pourraient permettre de compléter et généraliser la méthode. Nous verrons finalement que le point de vue adopté ici semble pouvoir apporter d'intéressantes perspectives dans des domaines tels que la recherche de modes non-linéaires, la synthèse sonore ou l'interaction gestuelle homme-machine.

Remerciements

Je tenais sincèrement à remercier Joel Bensoam qui m'a permis de découvrir et comprendre de nombreux sujets passionnants de la physique, de la mécanique et des mathématiques qui me seront très utiles dans mes futurs travaux de recherche. Travailler avec lui m'a également permis de questionner mes méthodes de travail et de progresser grandement en terme d'autonomie, de gestion des connaissances accumulées et de prise de recul.

J'aimerais également remercier Pauline Eveno, René Caussé, Nicolas Ellis et Gérard, de l'équipe Acoustique Instrumentale, pour leur accueil chaleureux me permettant de travailler dans les meilleures conditions possibles. Pour finir, un grand merci à Florie-Anne pour ses remarques et corrections mathématiques ainsi qu'à Cyril Touzé pour notre discussion sur les modes et autres phénomènes non-linéaires qui semblaient difficiles d'accès.

Table des matières

1	Systèmes dynamiques : formalisme et propriétés	6
1.1	Formalismes Lagrangien et Hamiltonien	6
1.2	Point de vue géométrique	7
1.2.1	Variété Riemanienne	7
1.2.2	Métrie	8
1.2.3	Géodésique	11
1.3	Formalisme des groupes de Lie	13
1.3.1	Mouvement d'un solide dans l'espace	14
1.3.2	Actions d'un élément du groupe	15
1.3.3	Energie cinétique et principe de moindre action	17
2	Méthodes géométriques et symétries	19
2.1	Surfaces de révolution	19
2.2	Fonction moment	20
2.3	Résolution géométrique	21
2.3.1	L'orbite co-adjointe	21
2.3.2	Ellipsoïde d'énergie	22
2.3.3	Solutions du problème	22
2.4	Ajustements nécessaires en présence d'énergie potentielle	23
3	Equilibre et stabilité	28
3.1	Définitions, présentation de la méthode	28
3.2	Stabilité du problème de rotation du corps rigide	29
3.3	Le pendule tournant : instabilités et bifurcation	30
4	Perspectives	32
4.1	Perspectives théoriques	32
4.1.1	Généralisation et formalisation de la méthode	32
4.1.2	Apport de la notion de connexion	32
4.1.3	Application du théorème de Poincaré en présence de potentiel : nécessité de l'espace fibré?	33
4.2	Modes Non-Linéaires(NNM)	34
4.3	Rapport aux trajectoires sonores, symétrie et optimisation	35
4.4	Application au contrôle gestuel	36
5	Annexes	38

Table des figures

1	L'hélicoïde (a) et le caténoïde (b) sont deux surfaces reliées par des relations d'isométrie	9
2	La géodésique du plan est la droite Γ_G	11
3	Paramétrisation de la sphère en coordonnées sphériques . . .	12
4	Le mouvement d'un solide peut être vue dans un repère fixe ou un repère mobile	14
5	Surface de révolution d'axe Δ et de génératrice Γ	19
6	Trajectoires sur la sphère des Π_c engendrées par l'intersection avec l'ellipsoïde d'énergie	24
7	Pendule plan	25
8	Portrait de phase $\theta(\theta)$ pour différents niveaux d'énergie . . .	27
9	Pendule plan mis en rotation autour de l'axe \mathbf{e}_3	30
10	Théorème de Poincaré : l'ellipse roule sans glissement sur le plan correspondant à la conservation de Π_s	34
11	Paramétrisation de l'ellipse permettant d'introduire les fonctions elliptiques	42

Notations

$\mathbf{q} = \langle q^1, q^2, \dots, q^n \rangle$	Vecteur position
$\dot{\mathbf{q}}$	Dérivée de \mathbf{q} par rapport au temps
$T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$	Energie cinétique
$V(\mathbf{q})$	Energie potentielle
$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - V(\mathbf{q})$	Lagrangien
$H(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + V(\mathbf{q})$	Hamiltonien
Γ_{ij}^l	Symboles de Christoffel
G	Groupe de Lie
\hat{g}	Algèbre du groupe G
\mathbf{u}_c	Vecteur mesuré dans le repère du corps
\mathbf{u}_s	Vecteur mesuré dans le repère fixe
\mathbf{X}	Vecteur de référence d'un point du solide
$\mathbf{x}(t)$	Position d'un point du solide au cours du temps
$R(t)$	Matrice de rotation appartenant à $SO(3)$
$\hat{\Omega}$	Element de l'algèbre
$\boldsymbol{\omega}_c$	Vecteur associé à $\hat{\Omega}_c$
$\boldsymbol{\Pi}$	Vecteur moment
I_c	Matrice principale d'inertie dans le repère du corps

Introduction

Les modèles physiques implémentés à l'Ircam dans le logiciel Modalys sont basés sur la combinaison des modes linéaires d'un instrument ou plus généralement d'un système dynamique. Cependant, quand l'amplitude des vibrations devient grande, la propagation des ondes devient non-linéaire et le modèle linéaire ne suffit plus. Malgré tout, des vibrations périodiques où toutes les coordonnées du système atteignent leurs valeurs extrêmes au même instant restent observables [1] et nous verrons qu'une définition géométrique de ces modes dits non-linéaires peut être établie [2],[3]. Ce dernier point de vue semble alors permettre de généraliser l'étude du comportement d'un système dynamique (trajectoires, équilibre, stabilité, comportement en fonction des conditions initiales,...) en s'affranchissant d'une paramétrisation de l'espace ambiant introduisant des non-linéarités artificielles [4].

Le stage présenté ici s'est proposé de revenir aux fondamentaux de la mécanique (formalisme Lagrangien et Hamiltonien) afin d'évaluer de quelle manière les outils de la géométrie différentielle et des groupes de Lie nous permettent d'aborder la résolution d'un problème dynamique. Nous montrerons également que ce point de vue permet d'exploiter les symétries d'un problème afin de simplifier la résolution et l'interprétation des équations du mouvement.

Pour rendre compte du travail effectué, ce rapport se propose de traiter premièrement des formalismes et divers outils fondamentaux utiles à l'étude des systèmes dynamiques en les illustrant par des exemples simples étudiés au cours du stage afin de rester clair et de ne pas perdre de vue les buts physiques recherchés. Nous serons alors à même d'exhiber, à l'aide encore une fois d'exemples simples mais fondamentaux, des comportements particuliers tels que les phénomènes d'instabilités, les bifurcations ou les modes non-linéaires pour finalement proposer de nombreuses pistes de travail utilisant ces outils dans des domaines variés (synthèse sonore, contrôle gestuel, ...).

1 Systèmes dynamiques : formalisme et propriétés

1.1 Formalismes Lagrangien et Hamiltonien

Afin d'appréhender les méthodes mises en oeuvre au cours de ce stage, il est nécessaire de faire un point sur les deux formalismes de bases permettant la description d'un système physique, le formalisme Lagrangien et le formalisme Hamiltonien.

Le premier nécessite l'introduction d'un espace des configurations Q de coordonnées $q^i, i = 1, \dots, n$. Le comportement du système étudié peut être alors décrit complètement à l'aide du lagrangien $L(q^i, \dot{q}^i)$, fonction des positions q^i , des vitesses \dot{q}^i et usuellement défini comme l'énergie cinétique $T(q^i, \dot{q}^i)$ moins l'énergie potentielle $V(q^i)$ du système avec :

$$T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (1.1.1)$$

où $M(\mathbf{q})$ est la matrice d'inertie du système et $\dot{\mathbf{q}}^T$ la transposée de $\dot{\mathbf{q}}$.

Si on définit l'action comme la fonctionnelle :

$$A = \int_a^b L(q^i, \dot{q}^i) dt \quad (1.1.2)$$

la trajectoire choisie par le système mis en mouvement minimise cette fonctionnelle, c'est à dire qu'elle satisfait l'équation $\delta A = 0$. Cette condition constitue le principe dit "de moindre action". Si on considère une petite variation $\delta \mathbf{q}^i$ de la position (et donc une autre trajectoire infinitésimalement proche), on peut écrire à l'aide d'une intégration par parties :

$$\delta A = \sum_{i=1}^n \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i \right) dt = \sum_{i=1}^n \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \delta q^i dt = 0 \quad (1.1.3)$$

On obtient alors les équations du mouvement dites de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (1.1.4)$$

Dans certain cas, il sera plus propice d'avoir recours au formalisme hamiltonien. Pour cela, définissons le moment conjugué :

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \quad i = 1, \dots, n \quad (1.1.5)$$

La fonction regroupant les informations du système est alors l'hamiltonien $H(q^i, p_i, t)$, correspondant à l'énergie totale du système, tel que :

$$H(q^i, p_i, t) = \sum_{j=1}^n p_j \dot{q}^j - L(q^i, \dot{q}^i, t) \quad (1.1.6)$$

Les équations du mouvement peuvent alors s'écrire sous la forme :

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \tag{1.1.7}$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}$$

On notera que dans le cas d'un système conservatif (sans pertes), l'énergie totale du système est conservée au cours du temps, et l'hamiltonien est donc constant le long de toutes les trajectoires du système.

1.2 Point de vue géométrique

Riemann proposa alors une méthode mathématique permettant de s'affranchir des paramétrages de l'espace ambiant et des non-linéarités qui en découlent en introduisant des outils de la géométrie différentielle [5],[6]. Bien qu'ici il semble peu pertinent de détailler tout le formalisme mathématique inhérent à ces concepts, certaines notions ont besoin d'être explicitées dans le but de présenter leur usage dans le cadre physique introduit ci-dessus.

1.2.1 Variété Riemannienne

Afin de mettre en oeuvre la formulation générale de Riemann, il est nécessaire de se donner un ensemble de points M qu'on appellera variété de dimension n si on peut fournir un système de coordonnées générales (q^1, q^2, \dots, q^n) permettant de repérer de façon unique chaque point de M . Cette variété est une généralisation de l'espace des configurations décrit précédemment. Il est alors possible d'associer à chaque point P un espace vectoriel M_P dit espace tangent et correspondant physiquement à l'espace des phases (q^i, \dot{q}^i) . Cet espace permet de définir en chaque point une base de vecteurs $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ associée aux coordonnées générales tel que $\mathbf{e}_i = \partial \mathbf{q} / \partial q^i$, [7][8].

De plus, soit un point P' voisin de P et sa base associée $(\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n)$, il est possible de repérer P' et chaque vecteur \mathbf{e}'_i à l'aide de la forme $\omega = (dq^1, dq^2, \dots, dq^n)$ et des relations :

$$P' = P + \omega^i \mathbf{e}_i \tag{1.2.1}$$

$$\mathbf{e}'_i = \mathbf{e}_i + \omega^j_i \mathbf{e}_j \tag{1.2.2}$$

afin de définir la connexion affine :

$$dP = \omega^i \mathbf{e}_i \tag{1.2.3}$$

$$d\mathbf{e}_i = \omega^j_i \mathbf{e}_j \tag{1.2.4}$$

Cette notion est très importante en géométrie différentielle et a été utilisée dans de nombreuses applications physiques. Il faut la voir comme la réponse

à la question : “Comment est modifiée ma base de vecteurs si je la déplace de façon infinitésimale? ”. Nous proposerons une application de ce concept au chapitre 4.

L'étude des systèmes dynamiques à l'aide de ce formalisme mathématique considère l'étude des trajectoires du système sous forme de courbes sur la variété. Afin de pouvoir définir et étudier les propriétés de ces dernières, il est nécessaire d'introduire la notion de métrique qui est une caractéristique principale des variétés riemanniennes.

1.2.2 Métrique

Fondamentalement, la métrique fournit une unité de mesure des distances dans un espace, qu'il soit plat ou courbe. Si une surface est paramétrée tel qu'un point est repéré par le vecteur $\mathbf{q} = \langle x(u, v), y(u, v), z(u, v) \rangle$, alors d'après les différentielles :

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \quad (1.2.5)$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \quad (1.2.6)$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv \quad (1.2.7)$$

un petit élément de longueur sur la surface $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ devient :

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right)^2 du^2 + 2 \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) du \cdot dv + \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right)^2 dv^2 \\ &= Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

E, F et G sont les éléments de la “première forme quadratique fondamentale” et forment le tenseur métrique :

$$\gamma = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \quad (1.2.9)$$

Du point de vue physique, lorsque les forces extérieures sont nulles, nous avons vu que le lagrangien du système se réduisait à l'énergie cinétique. L'action (1.1.2) mesure alors la distance sur la variété munie d'une métrique ds^2 définie par l'énergie cinétique du système mise sous la forme :

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} \gamma_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j \quad (1.2.10)$$

en utilisant la convention de sommation d'Einstein qui sous-entend la sommation sur toutes les valeurs d'un indice quand il est répété deux fois.

Le tenseur métrique présenté ici possède des propriétés intéressantes pour nos applications futures que nous nous proposons d'introduire à l'aide d'exemples simples.

Exemple 1 : Du caténoïde à l'hélicoïde : invariance de la métrique

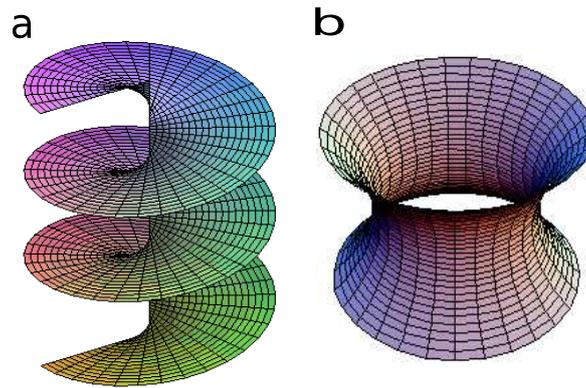


FIG. 1 – L'hélicoïde (a) et le caténoïde (b) sont deux surfaces reliées par des relations d'isométrie

Premièrement, montrons que pour deux surfaces reliées par une relation d'isométrie (une infinité de transformations infinitésimales continues sans déchirement [9]), la métrique est équivalente. Prenons l'exemple du caténoïde pouvant être paramétrée par le vecteur :

$$\mathbf{q}(u, v) = \langle \cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u \rangle \quad (1.2.11)$$

Les vecteurs tangents aux lignes de coordonnées s'écrivent :

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial u} = \langle \sinh u \cos v, \sinh u \sin v, 1 \rangle \quad (1.2.12)$$

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial v} = \langle -\cosh u \sin v, \cosh u \cos v, 0 \rangle$$

et il est alors possible de déduire les différentes composantes du tenseur

métrique :

$$\begin{aligned}
 E &= \left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial u} \right)^2 = 1 + \sinh^2 u = \cosh^2 u \\
 F &= \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial u} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = 0 \\
 G &= \left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial v} \right)^2 = \cosh^2 u
 \end{aligned} \tag{1.2.13}$$

On peut vérifier, en appliquant la même méthode, que le tenseur métrique est le même pour les surfaces déduites du caténoïde par des isométries comme les hélicoïdes minimaux d'équations :

$$\begin{aligned}
 x &= \cos \alpha \cos v \cosh u + \sin \alpha \sin v \sinh u \\
 y &= \cos \alpha \sin v \cosh u - \sin \alpha \cos v \sinh u \\
 z &= u \cos \alpha + v \sin \alpha
 \end{aligned} \tag{1.2.14}$$

$$\tag{1.2.15}$$

ou l'hélicoïde droit d'équation :

$$\mathbf{q}(u, v) = \langle \sin v \sinh u, \cos v \sinh u, v \rangle \tag{1.2.16}$$

Cette propriété permet de ramener l'étude des courbes sur une surface compliquée à l'étude de celles sur une surface proposant des lois de symétries (comme le caténoïde) où les trajectoires sont plus simples à déterminer.

Exemple 2 : Indépendance du tenseur métrique au système de coordonnées employé

On peut également montrer le caractère général du tenseur métrique en prouvant qu'il est indépendant du système de coordonnées employé. Par exemple, dans le plan paramétré par les coordonnées cartésiennes $\mathbf{q} = \langle x, y \rangle$, il vient directement :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \tag{1.2.17}$$

Si on utilise les coordonnées polaires, $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, (1.2.8) devient :

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 \tag{1.2.18}$$

On peut alors vérifier, en remarquant que $dx = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta$ et $dy = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta$ et en remplaçant dans (1.2.17) que l'on retrouve (1.2.18). Le tenseur métrique est donc équivalent pour les deux paramétrisations.

1.2.3 Géodésique

Sur la variété Riemanienne associée à l'espace des configurations, nous sommes maintenant à même de comparer les différentes courbes pouvant être définies. Les trajectoires du système, ou solutions des équations de Lagrange, correspondent alors au plus court chemin entre deux points de la variété (physiquement entre l'état initial et l'état final), ce qu'on appelle communément les géodésiques de la métrique considérée.

On détermine (voir annexe) leurs équations en injectant (1.2.10) dans (1.1.4) et il vient :

$$\frac{d^2 q^i}{dt^2} + \Gamma_{ij}^l \frac{dq^k}{dt} \frac{dq^j}{dt} = 0 \quad (1.2.19)$$

où les :

$$\Gamma_{ij}^l = \frac{g^{kl}}{2} (g_{ik,j} + g_{jk,i} - g_{ij,k}) \quad (1.2.20)$$

sont les symboles de Christoffel de seconde espèce [10] .

Ce jeu d'équations est donc équivalent à (1.1.4) mais permet de connaître les trajectoires dans un espace qui n'est plus plat (Euclidien) mais courbe (Riemannien). Les deux exemples présentés ci-dessous montrent que le concept de géodésique, bien que puissant, est intuitif dans le cas de surfaces bien connues : le plan et la sphère.

Exemple 3 : Géodésiques du plan

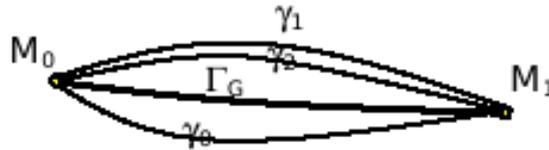


FIG. 2 – La géodésique du plan est la droite Γ_G

D'après l'équation métrique euclidienne (1.2.17), le lagrangien d'une particule parcourant un plan muni des coordonnées cartésiennes peut s'écrire :

$$L = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \gamma \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \dot{y}^2 \quad (1.2.21)$$

et d'après (1.1.4) on obtient :

$$\ddot{x} = 0 \quad \dot{x} = \alpha \quad x - x_0 = \alpha t \quad (1.2.22)$$

$$\ddot{y} = 0 \quad \dot{y} = \beta \quad y - y_0 = \beta t$$

Les géodésiques du plan sont donc des droites passant par $P_0 = (x_0, y_0)$ et de vecteur directeur $\langle \alpha, \beta \rangle$, la ligne droite étant bien entendu le plus court chemin pour rejoindre deux points dans le plan.

Exemple 4 : Géodésiques de la sphère

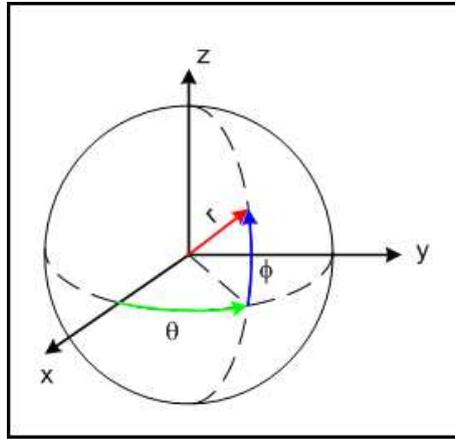


FIG. 3 – Paramétrisation de la sphère en coordonnées sphériques

La sphère peut être paramétrée par :

$$\mathbf{q}(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} x = R \cos \theta \cos \phi \\ y = R \sin \theta \cos \phi \\ z = R \sin \phi \end{pmatrix} \quad (1.2.23)$$

qui conduit au tenseur métrique :

$$\gamma = \begin{pmatrix} R^2 \cos^2 \phi & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix} \quad (1.2.24)$$

Le Lagrangien pour une particule libre de se déplacer sur la sphère est alors :

$$L = R^2 \cos^2 \phi \dot{\theta}^2 + R^2 \dot{\phi}^2 \quad (1.2.25)$$

et les équations des géodésiques sont :

$$\ddot{\phi} + \sin \phi \cos \phi \dot{\theta}^2 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\cos^2 \phi \dot{\theta}) = 0$$
(1.2.26)

La solution de ces équations peut ici être déterminée géométriquement en admettant l'unicité d'une géodésique entre deux points.

Supposons que l'arc (C) ci-dessus est la géodésique cherchée. Son symétrique (C') par rapport au plan équatorial a la même longueur et est encore tracé sur la sphère (car celle-ci est globalement invariante par la symétrie). L'arc (C') est donc lui aussi la géodésique, ce qui n'est pas possible (en dehors du cas où A et B sont antipodaux). (C) n'est donc pas une géodésique et cette dernière ne peut être que l'arc d'équateur (de grand cercle) qui relie A à B. Les géodésiques de la sphère sont donc les grands cercles, c'est à dire l'intersection avec la surface d'un plan passant par le centre.

Nous reviendrons plus tard sur la signification physique de la seconde équation mais il peut être utile de garder en tête la mise en lumière d'une équation de conservation.

1.3 Formalisme des groupes de Lie

Il est possible de pousser plus loin la généralisation de l'étude des configurations d'un système en reprenant l'utilisation des groupes de Lie introduite par Poincaré [11]. En effet, les différentes configurations d'un système peuvent être vues comme les différentes transformations appliquées par un groupe (exemple : groupe des rotations dans l'espace à 3 dimensions dans le cas d'une toupie ou celui des translations pour le mouvement d'un solide parcourant un plan incliné). L'espace des configurations est alors assimilé à l'espace des transformations du groupe et il est courbe si le groupe est non commutatif [12].

On définit formellement un groupe de Lie G comme une variété réelle ou complexe différentiable munie des opérations "multiplication" et "inversion" également différentiables et admettant un élément neutre, chaque élément ayant un symétrique.

Si R est un élément du groupe G , alors le mouvement du système est une trajectoire $R(t)$ sur le groupe. Afin de définir les transformations infinitésimales du système, il est nécessaire de se munir d'un plan tangent à l'identité afin d'introduire l'algèbre de Lie \hat{g} associée au groupe G . L'évolution d'un système peut maintenant être étudiée directement du point de vue ses transformations qui lui sont appliquées, permettant de rester général sans introduire les paramètres du système.

Ce formalisme peut être introduit d'une façon simple dans le cas d'un solide en rotation avec un point fixe dans l'espace à trois dimensions. Cet exemple servira de base aux études menées au cours du stage.

1.3.1 Mouvement d'un solide dans l'espace

Le mouvement d'un solide rigide libre en rotation dans \mathbb{R}^3 peut être observé de deux points de vue, que l'on se considère comme observateur externe ou sur le solide. On note B la configuration de référence, dont les points sont repérés par le vecteur $\mathbf{X} = \langle X^1, X^2, X^3 \rangle$ dans la base mobile $\langle \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3 \rangle$. Au cours du temps, le solide revêt différentes configurations repérées depuis un repère fixe par le vecteur $\mathbf{x} = \langle x^1, x^2, x^3 \rangle$ dans la base $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$.

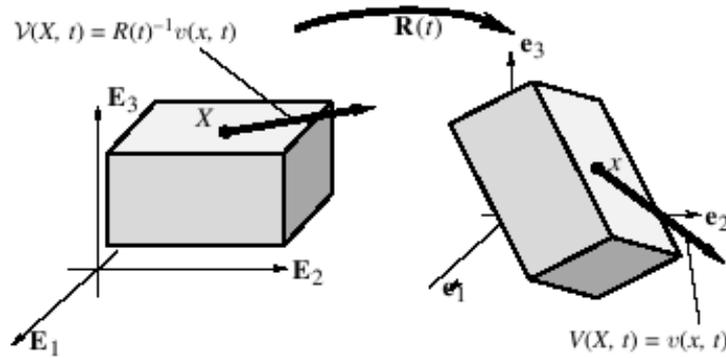


FIG. 4 – Le mouvement d'un solide peut être vue dans un repère fixe ou un repère mobile

Les diverses configurations prises au cours du temps diffèrent de la configuration d'origine par le biais d'une rotation, il est donc possible de donner la position d'un point du solide en fonction du temps par $\mathbf{x}(t) = R(t)\mathbf{X}$, \mathbf{X} repérant la position de référence. $R(t)$ est une matrice de rotation appartenant au groupe spécial orthogonal des rotations dans \mathbb{R}^3 , SO_3 , définit par :

$$SO_3 = \{R \in GL(3, \mathbb{R}) \text{ tel que } RR^T = 1 \text{ et } \det R = 1\} \quad (1.3.1)$$

Dans le repère fixe (ou spatial), la vitesse s'exprime par :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) &= \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \\ &= \hat{\Omega}_s \mathbf{x} \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

On peut également définir la vitesse dite convective dans le repère du corps par :

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) &= -\frac{\partial \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \\ &= \hat{\Omega}_c \mathbf{X}\end{aligned}\tag{1.3.3}$$

$\hat{\Omega}_s = \dot{R}R^T$ et $\hat{\Omega}_c = R^T \dot{R}$ sont les éléments de l'algèbre de Lie $so3$ et constituent des matrices antisymétriques de la forme :

$$\hat{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}\tag{1.3.4}$$

pouvant être identifiées à \mathbb{R}^3 par :

$$\hat{\Omega} \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3\tag{1.3.5}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \langle \omega_1, \omega_2, \omega_3 \rangle \in \mathbb{R}^3$$

Exemple 5 : Sens physique de l'algèbre de Lie pour SO3

Afin d'interpréter physiquement cette quantité considérons une rotation autour de l'axe \mathbf{e}_1 de la forme :

$$R(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}\tag{1.3.6}$$

On a alors :

$$\hat{\Omega}_c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{\theta} \\ 0 & \dot{\theta} & 0 \end{pmatrix}\tag{1.3.7}$$

$$\boldsymbol{\omega}_c = \langle \dot{\theta}, 0, 0 \rangle$$

On remarque que les éléments de l'algèbre correspondent dans le cas de SO3 aux vecteurs de vitesse angulaire, l'axe instantané de rotation étant bien \mathbf{e}_1 .

1.3.2 Actions d'un élément du groupe

L'automorphisme dit ADjoint d'un élément R du groupe considéré sur un autre élément R_1 de ce groupe est défini [13] par :

$$\text{AD } G \times G \rightarrow G : \quad \text{Ad}_R R_1 := R R_1 R^{-1} \quad (1.3.8)$$

Cette application peut être différenciée et ramenée en l'identité $R_1 = e$ afin de considérer l'action d'un élément du groupe sur un élément ξ de l'algèbre de Lie \hat{g} :

$$\text{Ad } G \times \hat{g} \rightarrow \hat{g} : \quad \text{Ad}_R \xi := R \xi R^{-1} \quad (1.3.9)$$

On peut finalement définir l'action adjointe d'un élément de l'algèbre sur un autre élément de l'algèbre par :

$$\text{ad } \hat{g} \times \hat{g} \rightarrow \hat{g} : \quad \text{ad}_{\xi_1} \xi_2 = [\xi_1, \xi_2] \quad (1.3.10)$$

où $[\xi_1, \xi_2] = \xi_1 \xi_2 - \xi_2 \xi_1$ est le crochet de Lie traduisant la non commutativité des opérations de l'algèbre et entraînant la courbure du groupe considéré quand il est différent de 0.

Pour SO3, l'introduction de ces actions nous permet d'obtenir (voir annexe) les relations suivantes entre l'algèbre dans le repère fixe et celle dans le repère mobile :

$$\begin{aligned} \hat{\Omega}_c &= \text{Ad}_{R^T} \hat{\Omega}_s \\ \hat{\Omega}_s &= \text{Ad}_R \hat{\Omega}_c \\ \omega_c &= R^T \omega_s \\ \omega_s &= R \omega_c \end{aligned} \quad (1.3.11)$$

L'espace dual (ou espace du moment axial $\mathbf{\Pi}_s$ et du moment angulaire $\mathbf{\Pi}_c$) peut également être introduit grâce à l'opération dite co-adjointe définie à l'aide du produit scalaire matriciel $\langle A|B \rangle = \text{tr}(A^T B)$ par $\langle \text{Ad}_g^* \hat{\Pi} | \hat{\Omega} \rangle = \langle \hat{\Pi} | \text{Ad}_g \hat{\Omega} \rangle$.

D'après [14], cette définition mène aux relations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi}_s &= R \mathbf{\Pi}_c \\ \mathbf{\Pi}_c &= R^T \mathbf{\Pi}_s \end{aligned} \quad (1.3.12)$$

Nous nous proposons maintenant de montrer que la description de l'espace physique à l'aide du formalisme des groupes de Lie permet d'obtenir des équations du mouvement équivalentes aux équations de Lagrange.

1.3.3 Energie cinétique et principe de moindre action

Premièrement, l'énergie cinétique (voir annexe) est donnée en fonction des vecteurs de vitesse angulaire dans le repère mobile par :

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} dm_0 \dot{\mathbf{x}}^T \dot{\mathbf{x}} dV \\ &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_c^T I_c \boldsymbol{\omega}_c \end{aligned} \quad (1.3.13)$$

avec $I_c = \int_{\Omega_0} dm_0 \hat{X}^T \hat{X} dV = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$ la matrice d'inertie et \hat{X}

la matrice antisymétrique associée au vecteur de référence \mathbf{X} . A noter qu'il sera toujours possible de définir le repère du corps tel que I_c soit une matrice diagonale.

Dans le repère spatial, l'opérateur d'inertie dépend de la rotation et il vient :

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_s^T I_s \boldsymbol{\omega}_s \quad (1.3.14)$$

avec $I_s = R I_c R^T$.

Comme $\mathbf{\Pi}_c = I_c \boldsymbol{\omega}_c$, on peut également exprimer l'énergie cinétique en fonction du moment mesuré dans le repère mobile :

$$T = \frac{1}{2} \mathbf{\Pi}_c^T I_c^{-1} \mathbf{\Pi}_c \quad (1.3.15)$$

En considérant l'absence de forces extérieures et en vertu du principe de moindre action, on sait que les trajectoires du système satisfont l'équation $\delta \int_a^b T dt = 0$. On peut montrer (voir annexe) que les variations du champ de vecteurs $\boldsymbol{\omega}_c$ sont régies par :

$$\delta \boldsymbol{\omega}_c = \dot{\boldsymbol{\eta}} + \boldsymbol{\omega}_c \wedge \boldsymbol{\eta} \quad (1.3.16)$$

pour lesquelles $\hat{\boldsymbol{\eta}}(t) = R^{-1} \delta R$ est une courbe dans l'algèbre de Lie s'annulant aux extrémités : $\hat{\boldsymbol{\eta}}(a) = \hat{\boldsymbol{\eta}}(b) = 0$. L'application du principe du moindre action mène alors aux équations d'Euler Lagrange vérifiées par la vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}_c$:

$$-I_c \dot{\boldsymbol{\omega}}_c + \boldsymbol{\omega}_c \wedge I_c \boldsymbol{\omega}_c = 0 \quad (1.3.17)$$

Grâce à $I_c \boldsymbol{\omega}_c = \mathbf{\Pi}_c = \langle \Pi_1, \Pi_2, \Pi_3 \rangle$, on retrouve l'équation d'Euler $\dot{\mathbf{\Pi}}_c = \mathbf{\Pi}_c \wedge I^{-1} \mathbf{\Pi}_c$ pouvant se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} \dot{\Pi}_1 &= a_1 \Pi_2 \Pi_3 \\ \dot{\Pi}_2 &= a_2 \Pi_3 \Pi_1 \\ \dot{\Pi}_3 &= a_3 \Pi_1 \Pi_2 \end{aligned} \quad (1.3.18)$$

avec :

$$a_1 = \frac{I_2 - I_3}{I_2 I_3}, \quad a_2 = \frac{I_3 - I_1}{I_1 I_3}, \quad a_3 = \frac{I_1 - I_2}{I_1 I_2}, \quad (1.3.19)$$

D'après (1.3.12), le moment dans le repère fixe est alors régi par l'équation :

$$\frac{d}{dt} \boldsymbol{\pi}_s = 0 \quad (1.3.20)$$

et on remarque qu'il est conservé au cours du temps. Ceci découle de l'invariance par rotation autour de l'axe instantané de rotation. Nous nous proposons maintenant de détailler et expliciter le rapport entre symétries et conservation en commençant par un retour au cas des surfaces afin d'exhiber un exemple visuel.

2 Méthodes géométriques et symétries

2.1 Surfaces de révolution

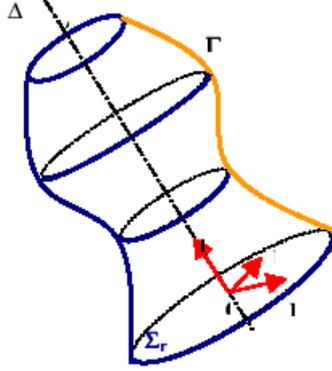


FIG. 5 – Surface de révolution d'axe Δ et de génératrice Γ

Une surface de révolution est une surface engendrée par la rotation d'une courbe appelée génératrice autour d'un axe dit de révolution. Elle est donc globalement invariante par toute rotation autour de cet axe et peut être paramétrée de façon générale par :

$$\mathbf{q}(\theta, \phi) = \langle f(\phi) \cos \theta, f(\phi) \sin \theta, g(\phi) \rangle$$

où le paramètre θ est dit longitude et f et g sont des fonctions de la latitude ϕ [15].

A l'aide de la méthode employée dans les exemples 3 et 4, on trouve les équations des géodésiques suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(f^2 \dot{\theta}) &= 0 & (2.1.1) \\ \ddot{\phi} - \frac{f f'}{f'^2 + g'^2} \dot{\theta}^2 - \frac{f' f'' + g' g''}{f'^2 + g'^2} \dot{\phi}^2 &= 0 \end{aligned}$$

On pourra montrer (cf annexe) que ces équations possèdent comme solutions particulières les méridiens ($\theta = \text{constante}$) et les parallèles ($\phi = \text{constante}$) possédant la propriété $f'(\phi) = 0$. (2.1.1) nous informe de la conservation pour toute surface de révolution de la quantité $C = f^2 \dot{\theta}$. C est la constante de Clairaut et elle correspond physiquement à la conservation du moment cinétique axial $\mathbf{\Pi}_s$ résultant de la symétrie de révolution inhérente à la surface. Dans le premier exemple, nous avons vu que la métrique était invariante pour toutes les surfaces reliées par des relations d'isométrie. La simplification des équations des géodésiques et la présence de la constante de

Clairaut nous encouragent donc à se ramener quand c'est possible à des surfaces de révolutions.

2.2 Fonction moment

Les lois de conservation tel que (2.1.1) et leur correspondance avec les symétries du problème peuvent être généralisées en revenant au formalisme hamiltonien et en introduisant la fonction moment définie comme invariante le long des trajectoires d'un système soumis aux équations d'Hamiltons (1.1.7), [14]. Cette fonction permet de traduire le théorème de Noether statifiant qu'à une symétrie d'un système correspond la conservation d'une quantité : l'invariance par translation dans le temps entraîne la conservation de l'énergie totale, l'invariance par translation dans une direction de l'espace entraîne la conservation de la quantité de mouvement dans cette direction, l'invariance par rotation entraîne la conservation du moment angulaire.

Si l'hamiltonien $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ est invariant par l'action d'un groupe G alors :

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = H(\mathbf{q}(s), \mathbf{p}(s)), \quad \text{avec} \quad \mathbf{q}(s) = g(s)\mathbf{q}, \quad \mathbf{p}(s) = g(s)\mathbf{p} \quad (2.2.1)$$

où $g(s)$ est un élément d'un sous-groupe à un paramètre de G , par exemple $g(s) = \exp(s\xi)$ où ξ est un élément de l'algèbre de g . H étant conservé au cours du mouvement, il vient :

$$\frac{d}{ds}H(\mathbf{q}(s), \mathbf{p}(s)) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}H(\mathbf{q}(s), \mathbf{p}(s))\frac{d}{ds}\mathbf{q}(s) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}H(\mathbf{q}(s), \mathbf{p}(s))\frac{d}{ds}\mathbf{p}(s) = 0 \quad (2.2.2)$$

Pour $s = 0$, $\mathbf{q}(s) = \mathbf{q}$ et $\mathbf{p}(s) = \mathbf{p}$ et d'après (1.1.7) on peut alors écrire :

$$-\dot{\mathbf{p}}\frac{d}{ds}|_{s=0}\mathbf{q}(s) + \dot{\mathbf{q}}\frac{d}{ds}|_{s=0}\mathbf{p}(s) = 0 \quad (2.2.3)$$

ou encore

$$\frac{\partial J^\xi}{\partial \mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial J^\xi}{\partial \mathbf{p}}\dot{\mathbf{p}} = \frac{d}{ds}J^\xi = 0 \quad (2.2.4)$$

après avoir posé :

$$\frac{\partial J^\xi}{\partial \mathbf{q}} = -\frac{d}{ds}|_{s=0}\mathbf{p}(s) = -\frac{d}{ds}|_{s=0}g(s)\mathbf{p} = -\xi\mathbf{p} \quad (2.2.5)$$

$$\frac{\partial J^\xi}{\partial \mathbf{p}} = -\frac{d}{ds}|_{s=0}\mathbf{q}(s) = -\frac{d}{ds}|_{s=0}g(s)\mathbf{q} = \xi\mathbf{q}$$

La fonction J est précisément la fonction moment et est bien conservée au cours du mouvement. Elle est définie formellement par la relation :

$$J^\xi(\mathbf{q}, \mathbf{p}) := \langle J(\mathbf{q}, \mathbf{p}) | \xi \rangle \quad \forall \xi \in g \quad (2.2.6)$$

Exemple 6 : Fonction moment dans le cas d'une rotation SO3

Si on applique une rotation d'un angle θ d'axe \mathbf{e}_3 à la particule étudiée, sa position est alors : $\mathbf{q}(\theta, t) = R(t)\mathbf{q}(t)$. L'invariance de l'Hamiltonien (et donc la conservation de son énergie totale) se traduit par l'équation :

$$\frac{dH}{d\theta} = 0 \quad (2.2.7)$$

La démarche décrite précédemment mène à réécrire (2.2.5) dans le cas d'une invariance par rotation sous la forme :

$$\frac{\partial J^\xi}{\partial \mathbf{p}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{q} = \xi \wedge \mathbf{q} \quad (2.2.8)$$

$$\frac{\partial J^\xi}{\partial \mathbf{q}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{p} = -\xi \wedge \mathbf{p}$$

Sachant que dériver par un vecteur introduit la notion de gradient $\frac{\partial J^\xi}{\partial \mathbf{q}} = \nabla_{\mathbf{q}} J^\xi$, on a :

$$\frac{\partial J^\xi}{\partial q_1} = p_2 \quad ; \quad \frac{\partial J^\xi}{\partial q_2} = -p_1 \quad ; \quad \frac{\partial J^\xi}{\partial q_3} = 0 \quad (2.2.9)$$

On vérifie ici que dans le cas d'une invariance par rotation, la quantité conservée est bien le moment axial. Présentons maintenant une interprétation géométrique de la conservation de l'énergie totale et du moment angulaire permettant de donner des informations sur les solutions de problèmes comportant des symétries. L'exemple du solide rigide en rotation est pour cela repris.

2.3 Résolution géométrique

2.3.1 L'orbite co-adjointe

L'orbite co-adjointe est la surface décrite au cours du mouvement par le vecteur $\mathbf{\Pi}_c$. D'après (1.3.12) et (2.2.9), on peut écrire :

$$\mathbf{\Pi}_s = \text{cste} \Rightarrow \mathbf{\Pi}_c = R^T \text{cste} \quad (2.3.1)$$

La conservation du moment dans le repère fixe conduit l'orbite co-adjointe à être une sphère d'équation :

$$\Pi_1^2 + \Pi_2^2 + \Pi_3^2 = \Pi_0^2 \quad (2.3.2)$$

où Π_0 est la norme du moment initial tel qu'à $t = 0, \|\mathbf{\Pi}_s\|^2 = \|\mathbf{\Pi}_c\|^2 = \Pi_0^2$.

2.3.2 Ellipsoïde d'énergie

En considérant toujours que le lagrangien est égal à l'énergie cinétique, il peut, d'après (1.3.15), se mettre sous la forme :

$$\frac{\Pi_1^2}{2E_0I_1} + \frac{\Pi_2^2}{2E_0I_2} + \frac{\Pi_3^2}{2E_0I_3} = 1 \quad (2.3.3)$$

correspondant, si $I_1 > I_2 > I_3$, à l'équation d'une ellipsoïde de demi grand axe $\sqrt{2E_0I_1}$, de demi axe moyen $\sqrt{2E_0I_2}$, et de demi petit axe $\sqrt{2E_0I_3}$. Cette surface est déterminée uniquement par le solide rigide étudié (via sa matrice d'inertie) et sa vitesse initiale.

2.3.3 Solutions du problème

Nous cherchons maintenant à connaître les solutions du problème selon le solide considéré.

Une solution triviale peut être exhibée pour $I_1 = I_2 = I_3$. D'après (1.3.18), pour les solides vérifiant cette condition, $\mathbf{\Pi}_c$, et donc $\boldsymbol{\omega}_c$, sont constants au cours du mouvement. Le solide est alors en rotation à vitesse angulaire constante autour d'un axe fixe.

Pour déterminer les autres solutions, revenons aux deux surfaces construites précédemment : l'ellipsoïde d'énergie et la sphère correspondant à la conservation du moment angulaire mesuré dans le repère fixe. La solution du problème devant satisfaire les deux lois de conservations, elle peut être vue comme la trajectoire intersection des deux surfaces définies ci-dessus. Elle est obtenue en injectant la troisième composante du moment de l'équation de l'ellipsoïde dans l'équation de la sphère. C'est une ellipse de demi-axes :

$$a = \sqrt{\frac{I_1(\Pi_0^2 - 2E_0I_3)}{I_1 - I_3}} \quad b = \sqrt{\frac{I_2(\Pi_0^2 - 2E_0I_3)}{I_2 - I_3}} \quad (2.3.4)$$

Cas $I_1 = I_2 > I_3$

Ici l'intersection devient un cercle de rayon $\rho = \sqrt{\frac{I_1(\Pi_0^2 - 2E_0I_3)}{I_1 - I_3}}$ à l'altitude $\Pi_3 = \text{constante}$ pouvant être paramétré par le vecteur :

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \rho \cos \lambda t \\ \Pi_2 &= \rho \sin \lambda t \\ \Pi_3 &= \sqrt{\frac{I_3(2E_0I_1 - \Pi_0^2)}{I_1 - I_3}} \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

où la vitesse $\lambda = a_2\Pi_3$ est obtenue grâce à (1.3.18). En dérivant (2.3.5), on trouve que le mouvement est soumis aux équations :

$$\begin{aligned}\dot{\Pi}_1 + \lambda\Pi_2 &= 0 \\ \dot{\Pi}_2 - \lambda\Pi_1 &= 0\end{aligned}\tag{2.3.6}$$

qui, en fonctions des conditions initiales, possèdent les solutions :

$$\begin{aligned}\Pi_1 &= \Pi_1(0) \cos \lambda t - \Pi_2(0) \sin \lambda t \\ \Pi_2 &= \Pi_2(0) \cos \lambda t + \Pi_1(0) \sin \lambda t\end{aligned}\tag{2.3.7}$$

Dans ce cas, le corps tourne dans le repère du corps à la vitesse angulaire λ autour de l'axe de symétrie du solide.

Cas $\mathbf{I}_1 > \mathbf{I}_2 > \mathbf{I}_3$

D'après [14], la courbe (2.3.4) peut être paramétrée à l'aide des fonctions elliptiques (définies en annexe) par le vecteur :

$$\begin{aligned}\Pi_1 &= -acn(\mu t) \\ \Pi_2 &= bsn(\mu t) \\ \Pi_3 &= \delta dn(\mu t)\end{aligned}\tag{2.3.8}$$

A $t = 0$, $\Pi_1(0) = -a$, $\Pi_2(0) = 0$, $\Pi_3(0) = \delta = \sqrt{\Pi_0^2 - a^2} = \sqrt{\frac{I_3(2E_0I_1 - \Pi_0^2)}{I_1 - I_3}}$.

On utilise à nouveau (1.3.18) afin de déterminer la vitesse angulaire de rotation et on obtient :

$$\mu = \sqrt{\frac{(2E_0I_1 - \Pi_0^2)(I_2 - I_3)}{I_1I_2I_3}}\tag{2.3.9}$$

La figure ci-dessous représente les trajectoires (pour différentes conditions initiales) du système sur la sphère décrite par $\mathbf{\Pi}_c$, on remarque qu'elles forment des orbites périodiques dont on analysera la stabilité dans la partie suivante.

2.4 Ajustements nécessaires en présence d'énergie potentielle

En présence d'énergie potentielle il n'est plus possible d'exprimer le Lagrangien directement sous forme quadratique et ainsi de construire l'ellipsoïde d'énergie. Il est alors nécessaire de changer de métrique et de faire

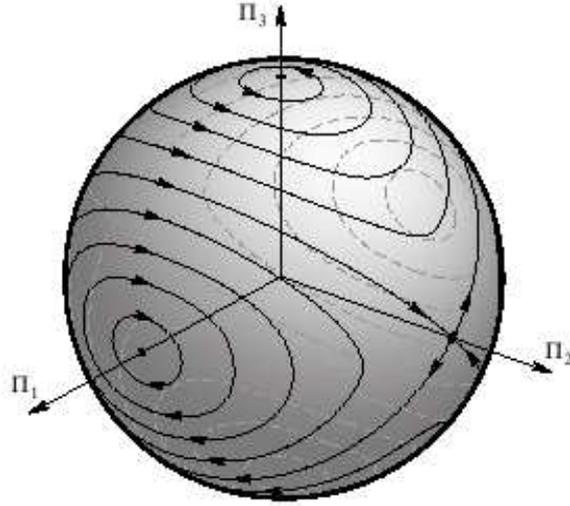


FIG. 6 – Trajectoires sur la sphère des Π_c engendrées par l’intersection avec l’ellipsoïde d’énergie

appel au principe de “Maupertuis-Lagrange-Jacobi” [16] : tout mouvement dans un potentiel $V(\mathbf{q})$ inférieur à l’énergie totale h est un mouvement géodésique de la métrique de Jacobi $\gamma_h = 2(h - V(\mathbf{q}))\gamma_{ij}$ où m_{ij} est la métrique initiale. Dans cette nouvelle métrique, le Lagrangien est à nouveau égal à l’énergie cinétique (l’opérateur d’inertie dépendant maintenant du potentiel) et la méthode géométrique décrite précédemment peut être appliquée, à quelques détails près.

Exemple 7 : Pendule plan

Pour illustrer cette situation, considérons l’exemple du pendule où l’énergie potentielle s’écrit :

$$\begin{aligned} V &= mg\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_z \\ &= \langle mg\mathbf{X} | \mathbf{\Gamma} \rangle \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

où $\mathbf{\Gamma} = R^T \mathbf{e}_z$ est le mouvement de la direction verticale vue depuis le repère du corps. Le Lagrangien du système s’écrit alors :

$$L = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_c^T I_c \boldsymbol{\omega}_c - \langle mg\mathbf{X} | \mathbf{\Gamma} \rangle \quad (2.4.2)$$

et il est possible de réécrire le principe de moindre action en présence

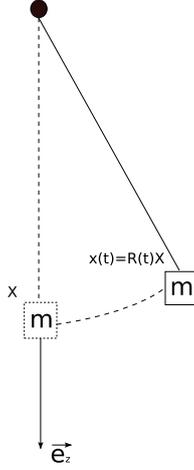


FIG. 7 – Pendule plan

d'énergie potentielle afin d'obtenir l'équation du mouvement :

$$-\frac{d}{dt}I_c\boldsymbol{\omega}_c + I_c\boldsymbol{\omega}_c \wedge \boldsymbol{\omega}_c + mg\boldsymbol{\Gamma} \wedge \mathbf{X} = 0 \quad (2.4.3)$$

Dans la métrique initiale, l'Hamiltonien est donné par :

$$H_0(\boldsymbol{\Pi}_c) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Pi}_c^T I_c^{-1}\boldsymbol{\Pi}_c + V(\mathbf{X}) \quad (2.4.4)$$

et dans le cas du pendule la matrice d'inertie principale s'écrit :

$$I_c = m\hat{X}^T\hat{X} = \begin{pmatrix} ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & ml^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.4.5)$$

Dans la métrique de Jacobi, l'opérateur d'inertie vaut maintenant $I_h = (h - V(\mathbf{X}))I_c$ et on a alors :

$$H_h(\boldsymbol{\Pi}_c) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Pi}_c^T \frac{1}{h - V(\mathbf{X})} I_c^{-1}\boldsymbol{\Pi}_c \quad (2.4.6)$$

L'hamiltonien étant conservé le long des trajectoires, $H_0 = h$ et $\frac{1}{2}\boldsymbol{\Pi}_c^T I^{-1}\boldsymbol{\Pi}_c = h - V(\mathbf{X})$ et on remarque alors que :

$$H_h(\boldsymbol{\Pi}_c) = \frac{h - V(\mathbf{X})}{h - V(\mathbf{X})} = 1 = L_h \quad (2.4.7)$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned}
L_h &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}_c I_h \boldsymbol{\Omega}_c \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\Omega_1^2}{a^2} + \frac{\Omega_2^2}{b^2} \right) \\
&= 1
\end{aligned} \tag{2.4.8}$$

avec $a^2 = \frac{1}{(h-V)I_1}$ et $b^2 = \frac{1}{(h-V)I_2}$ et $\boldsymbol{\Omega}_c$ les vecteurs de vitesse angulaire dans la métrique de Jacobi, vérifiant la relation

$$\boldsymbol{\omega}_c = [h - V(\mathbf{X})] \boldsymbol{\Omega}_c \tag{2.4.9}$$

En présence de potentiel, l'ellipsoïde d'énergie devient un cylindre de rayon $\rho = \sqrt{2/(h-V)ml^2}$ dépendant au cours du mouvement du potentiel.

Afin d'obtenir la solution géométrique du problème, il faut trouver la surface sur laquelle vit le moment d'inertie $\boldsymbol{\Pi}_c = I_h \boldsymbol{\Omega}_c$ tel que :

$$\boldsymbol{\Pi}_c = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{pmatrix} = (h-V)ml^2 \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.4.10}$$

La surface cherchée est donc un cercle dans le plan $\Pi_3 = 0$. En utilisant la relation entre les vitesses et les moments angulaires dans l'équation (2.4.8), on trouve que le rayon de ce cercle est :

$$\rho_\pi(\phi) = \sqrt{2(h-V(\phi)ml^2)} \tag{2.4.11}$$

R étant une rotation autour de \mathbf{e}_1 , la seule solution pour que (1.3.12) soit vérifiée est que les deux moments aient une direction fixe dirigée selon l'axe de rotation. On a donc :

$$\boldsymbol{\Pi}_s = \boldsymbol{\Pi}_c = \alpha \mathbf{e}_1 \quad \text{avec} \quad \alpha = [h - V(\mathbf{X})]ml^2 \Omega_1 \tag{2.4.12}$$

et la composante Ω_2 doit être nulle. D'après, (2.4.8), l'intersection est donc le point de coordonnée :

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{2}{(h-V(\mathbf{X}))ml^2}} \quad ; \quad \Omega_2 = \Omega_3 = 0 \tag{2.4.13}$$

et d'après 2.4.9 il vient :

$$\omega_1 = \frac{d\phi}{dt} = \sqrt{\frac{2[h - V(\mathbf{X})]}{ml^2}} \tag{2.4.14}$$

permettant d'établir l'équation différentielle

$$dt = \frac{l}{g\sqrt{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{\frac{1}{2}\omega_0^2 + \cos\phi - \cos\phi_0}} \quad (2.4.15)$$

A l'aide du changement de variable $\sin u = \frac{\sin\phi}{\sin(\frac{\phi_0}{2})}$ on obtient le portrait de phase présenté ci-dessous et décrit par l'équation :

$$\dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt} = \sqrt{2} \sqrt{\frac{g}{l}} \sqrt{\frac{1}{2}\omega_0^2 + \cos\phi - \cos\phi_0} \quad (2.4.16)$$

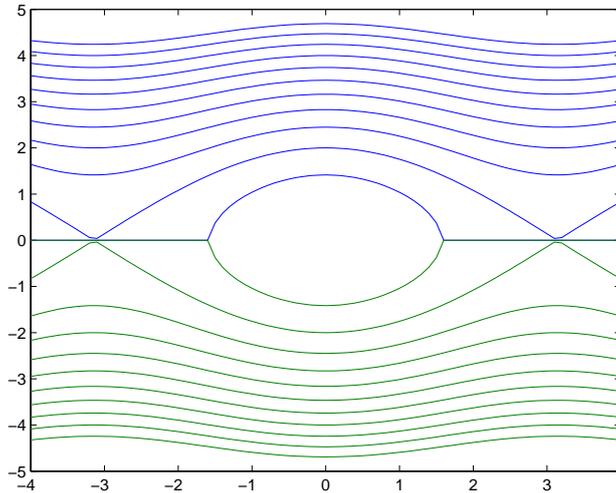


FIG. 8 – Portrait de phase $\dot{\theta}(\theta)$ pour différents niveaux d'énergie

Ce portrait de phase est bien connu des études classiques sur le pendule et représente les trajectoires pour différents niveaux d'énergie h . On remarquera qu'on a pas eu besoin de procéder à la linéarisation pour le cas des petits angles comme c'est usuel avec les études classiques.

Les positions pour lesquelles la vitesse est nulle sont les points d'équilibres et nous nous proposons maintenant d'introduire une méthode permettant d'étudier leur stabilité.

3 Equilibre et stabilité

3.1 Définitions, présentation de la méthode

Partons du postulat qu'il sera toujours possible de décrire l'évolution du système sous la forme :

$$\dot{\mathbf{u}} = F(\mathbf{u}) \quad (3.1.1)$$

Classiquement, $\mathbf{u} = (q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ et F est appelée "fonction d'évolution". Au cours du temps, l'état du système décrit une trajectoire $\mathbf{u}(t)$ dans l'espace des phases P , cette trajectoire est unique à une condition initiale $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}(0)$ près. Un état d'équilibre (ou point fixe) \mathbf{u}_e est alors défini tel que $X(\mathbf{u}_e) = 0$, la somme des forces moments extérieurs agissant sur le système est alors nulle. Si une trajectoire commence à la position \mathbf{u}_e , alors elle reste à cette position quand $t > 0$.

Une fois les points fixes déterminés, l'étude de leur stabilité permet d'obtenir de précieuses informations sur le comportement du système. De façon concrète, on peut dire qu'un système est stable en un point d'équilibre si des petites perturbations n'entraînent pas de grands bouleversement du système. Bien que les trajectoires puissent restées très complexes, la stabilité promet juste de rester proche de l'état d'équilibre. Supposons que le flot possède un point fixe $\mathbf{u} = \mathbf{u}_e$, on cherche à linéariser autour de cette position. Pour cela on pose $\mathbf{y} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_e$ et on peut alors écrire :

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y} = F(\mathbf{u}) - F(\mathbf{u}_e) \quad (3.1.2)$$

et

$$F(\mathbf{u}) = F(\mathbf{u}_e) + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}_e)d\mathbf{u} = F(\mathbf{u}_e) + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}_e)\mathbf{y} \quad (3.1.3)$$

L'équation linéarisé est alors :

$$\dot{\mathbf{y}} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}_e)\mathbf{y} \quad (3.1.4)$$

où le terme à droite correspond à la dérivée de Lie dans la direction \mathbf{y}

$$\lim \frac{F(\mathbf{u} + \epsilon\mathbf{y}) - F(\mathbf{u})}{\epsilon} \quad (3.1.5)$$

prise au point \mathbf{u}_e . Or,

$$\begin{aligned} F(\mathbf{u} + \epsilon\mathbf{y}) &= (\mathbf{u} + \epsilon\mathbf{y}) \wedge [I^{-1}(\mathbf{u} + \epsilon\mathbf{y})] \\ &= F(\mathbf{u}) + \epsilon(\mathbf{y} \wedge (I^{-1}\mathbf{u}) + \mathbf{u} \wedge (I^{-1}\mathbf{y})) + o(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

On obtient finalement :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{y} \wedge I^{-1}(\mathbf{u}_e) + \mathbf{u}_e \wedge (I^{-1}\mathbf{y}) \\ &= (\hat{\mathbf{u}}_e I^{-1} - A)\mathbf{y} \\ &= L(\mathbf{u}_e)\mathbf{y} \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

où A est la matrice antisymétrique associée au vecteur $I^{-1}\mathbf{u}_e$ et L est la matrice jacobienne de X . L'étude des valeurs propres permet de déterminer la stabilité du système. Si ces dernières sont toutes imaginaires pures ou si leurs parties réelles sont négatives, le système est stable. Si par contre, une des valeurs propres possède une partie réelle positive, alors l'état d'équilibre considéré est instable et les perturbations ont tendance à grandir au cours du mouvement.

3.2 Stabilité du problème de rotation du corps rigide

La méthode décrite précédemment peut être appliquée au problème de rotation du corps rigide décrit précédemment. Pour déterminer la condition d'équilibre, repartons de l'équations d'Euler sous la forme :

$$\dot{\mathbf{\Pi}}_c = \mathbf{\Pi}_c \wedge \boldsymbol{\omega}_c = X(\mathbf{\Pi}_c) \quad (3.2.1)$$

La condition d'équilibre est alors satisfaite si les vecteurs $\mathbf{\Pi}_c$ et $\boldsymbol{\omega}_c$ sont parallèles. Sans perte de généralité, fixons ces vecteurs selon l'axe \mathbf{e}_1 . Après normalisation, le moment angulaire à l'équilibre correspond au vecteur $\mathbf{\Pi}_e = \langle 1, 0, 0 \rangle$. D'après (3.1.7), la matrice jacobienne s'écrit alors :

$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{I_3 - I_1}{I_1 I_3} \\ 0 & \frac{I_1 - I_2}{I_1 I_2} & 0 \end{pmatrix} \delta \mathbf{y} \quad (3.2.2)$$

Les valeurs propres de (3.2.2) sont :

$$\pm \frac{1}{I_1 \sqrt{I_2 I_3}} \sqrt{(I_1 - I_2)(I_3 - I_1)} \quad (3.2.3)$$

Trois états d'équilibres peuvent être alors étudiés :

- Rotation selon le plus grand axe : $I_1 > I_2, I_1 > I_3$, les deux valeurs propres sont imaginaires pures, cet équilibre est donc stable.
- Rotation selon le plus petit axe : $I_1 < I_2, I_1 < I_3$, les deux valeurs propres sont imaginaires pures, cet équilibre est donc stable.
- Rotation selon l'axe moyen : $I_1 > I_2, I_1 < I_3$, les deux valeurs propres sont réelles et de signe opposées, cet état d'équilibre est alors instable.

On notera qu'ici, la stabilité considérée est dite spectrale. Il a été montré que dans certains cas qui ne nous concernent pas ici, ce critère de stabilité n'était pas suffisant [4]. Des méthodes plus générales nécessitant d'introduire les fonctions de Casimir permettent de palier à ce problème mais le temps nous a manqué pour les comprendre et les mettre en place dans les exemples étudiés au cours du stage.

3.3 Le pendule tournant : instabilités et bifurcation

Afin de conclure sur cette partie ainsi que la présentation des différents travaux effectués au cours de ce stage, nous nous intéressons au phénomène de bifurcations (évolution des états d'équilibre et de leur stabilité quand un paramètre dit "de contrôle" est modifié) bien connu de la mécanique non-linéaire en présentant un cas simple facilitant la compréhension.

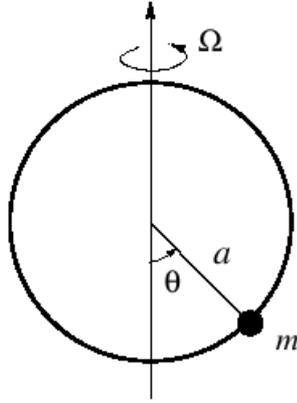


FIG. 9 – Pendule plan mis en rotation autour de l'axe \mathbf{e}_3

Pour cela, le pendule étudié dans l'exemple 7 est maintenant mis en mouvement autour de l'axe \mathbf{e}_3 à une vitesse Ψ . La position de la bille s'écrit $\mathbf{x}(t) = R(\alpha, \theta)\mathbf{X}(t)$ où $R(\alpha, \theta)$ est la composée d'une rotation $R_1(\theta)$ autour de \mathbf{e}_1 et d'une rotation $R_2(\alpha)$ autour de \mathbf{e}_3 tel que $\dot{\alpha} = \Psi$:

$$R(\alpha, \theta) = R_2(\alpha)R_1(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \cos \theta & \sin \alpha \sin \theta \\ \sin \alpha & \cos \alpha \cos \theta & -\cos \alpha \sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (3.3.1)$$

Cette description du système nous permet d'accéder aux équations du mouvement et de procéder à l'étude de stabilité. Les développements sont disponibles en annexe et ils conduisent à des résultats intéressants par rapport aux quatre positions d'équilibre :

- En $\theta_e = 0$, les valeurs propres sont régies par l'équation $\lambda^2 = \Psi^2 - \Psi_c^2$. Si $\Psi < \Psi_c^2$, les deux valeurs propres sont imaginaires et l'équilibre est stable. Quand $\Psi > \Psi_c^2$, une des valeurs propres est réelle positive et l'équilibre est donc instable.
- En $\theta_e = \pi$, les valeurs propres sont régies par l'équation $\lambda^2 = \Psi^2 - \Psi_c^2$ et une des deux est toujours réelle positive. Cet équilibre est toujours instable, ce qui semble logique car si on lâche la bille en haut, elle aura toujours tendance à retomber.

- Aux deux angles vérifiant $\cos \theta_e = \frac{g}{l\Psi^2}$, l'équation aux valeurs propres est $\lambda^2 = \Psi^2(\frac{\Psi_c^4}{\Psi^4} - 1)$ et sur son domaine de définition $\Psi > \Psi_c$, ces équilibres sont toujours stables.

Le comportement du système peut donc se résumer de la façon suivante. Pour $\Psi < \Psi_c$, il existe deux états d'équilibre dont un stable. Quand la vitesse de rotation dépasse Ψ_c , deux nouveaux états d'équilibre stable apparaissent et l'équilibre $\theta_e = 0$ devient instable. Le phénomène se produisant à $\Psi = \Psi_c$ est une bifurcation.

Les divers chapitres précédents ont permis d'exhiber quelques exemples où le formalisme des groupes de Lie et les notions de géométrie différentielle ont permis une description appropriée et une résolution des équations du mouvement élégantes. Il est maintenant important de montrer dans quelle mesure ces méthodes générales pourraient être appliquées à des problèmes plus complexes.

4 Perspectives

4.1 Perspectives théoriques

4.1.1 Généralisation et formalisation de la méthode

Il peut sembler que les méthodes employées dans ce rapport sont trop complexes par rapport à la simplicité des systèmes étudiés. Cependant, le choix de s'exercer sur ces exemples avait pour but de comprendre les diverses étapes avant de les appliquer à des systèmes plus complexes. Dans le cas du solide rigide, il a été montré précédemment que la description à l'aide des groupes de Lie permettait une résolution générale du problème qui pouvait s'appliquer à n'importe quel solide. L'exemple du pendule a quant à lui montré que l'on pouvait s'affranchir de la restriction aux petits angles pour résoudre analytiquement ce problème.

Il va être maintenant possible d'étudier des systèmes et des mouvements plus complexes avec une meilleure compréhension. Une précédente étude à l'Ircam avait permis de déterminer les solutions des corps soumis au groupe des translations et rotations dans le plan SE2 tel qu'un point du solide puisse être repéré au cours du temps par :

$$\mathbf{x}(t) = R(t)\mathbf{X} + \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 \quad (4.1.1)$$

où $R \in SO2$.

L'extension à 3 dimensions doit donc pouvoir être mise en place en s'appuyant sur les travaux présentés ici pour SO3.

D'après!!!!, le formalisme employé ici peut également être appliqué dans le cas de plusieurs solides en interaction comme dans le cas de la poutre de Reissner. L'étude des états d'équilibre et de leur stabilité devrait se révéler plus ardue.

4.1.2 Apport de la notion de connexion

Il peut sembler pertinent de vouloir évaluer la sensibilité d'un système à un changement de conditions initiales. Dans ce but, nous tentons de revenir à la notion de connexion sur les surfaces invariantes engendrées par le mouvement du solide rigide en rotation. Dans le cas où $I_1 = I_2$, reprenons la paramétrisation (2.3.5) de l'intersection afin de déterminer les vecteurs de base dans le plan tangent de l'ellipsoïde. Les résultats sont équivalents quand on se place dans le plan tangent de la sphère. Le vecteur tangent normé s'obtient facilement comme étant la dérivée par rapport au paramètre de temps : $\mathbf{e}_1 = \langle -\sin t, \cos t, 0 \rangle$. L'intersection étant une courbe sur la sphère (ainsi que sur l'ellipsoïde), on peut prendre comme vecteur normal le vecteur $\mathbf{\Pi}_c$

qui, une fois normé, s'écrit : $\mathbf{e}_3 = \left\langle \frac{\cos t}{\sqrt{1 + \frac{z^2}{R^2}}}, \frac{\sin t}{\sqrt{1 + \frac{z^2}{R^2}}}, \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{z^2}}} \right\rangle$. Le troisième vecteur de la base s'écrit alors :

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 = \left\langle \frac{-\cos t}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{\Pi_3}\right)^2}}, \frac{-\sin t}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{\Pi_3}\right)^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Pi_3}{R}\right)^2}} \right\rangle$$

D'après [7], la construction de la matrice Λ de changement de base constituée des vecteurs calculés ci dessus permet de déterminer la connexion affine par la formule $\hat{\omega} = d\Lambda\Lambda^T$. Après calculs, les relations suivantes sont obtenues :

$$\begin{aligned} d\mathbf{e}_1 &= -\frac{dt}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{\Pi_3}\right)^2}}\mathbf{e}_2 + \frac{dt}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Pi_3}{R}\right)^2}}\mathbf{e}_3 \\ d\mathbf{e}_2 &= \frac{dt}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{\Pi_3}\right)^2}}\mathbf{e}_1 + a\mathbf{e}_3 \\ d\mathbf{e}_3 &= -\frac{dt}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Pi_3}{R}\right)^2}}\mathbf{e}_1 + a\mathbf{e}_2 \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

Nous avons alors mathématiquement l'évolution des vecteurs de base quand la condition initiale sur Π_0 change. Il serait intéressant de voir de quelle manière ceci pourrait être utilisée dans la compréhension du problème.

4.1.3 Application du théorème de Poincaré en présence de potentiel : nécessité de l'espace fibré ?

La méthode géométrique faisant appel à l'intersection entre l'ellipsoïde d'énergie et l'orbite co-adjointe a montré qu'elle permettait d'obtenir dans le cas du pendule les solutions analytiques du problème. Cependant il a été nécessaire de recourir à une intégration qui peut parfois poser problème. En absence de potentiel, Poincaré a formulé un théorème qui permet d'accéder directement aux trajectoires du système.

Pour cela, utilisons la relation :

$$\boldsymbol{\omega}_s \boldsymbol{\Pi}_s = \boldsymbol{\omega}_c \boldsymbol{\Pi}_c = 2T \tag{4.1.3}$$

$\boldsymbol{\omega}_s$ vit alors dans un plan perpendiculaire à $\boldsymbol{\Pi}_s$ d'équation $\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\Pi}_s = 2T \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$.

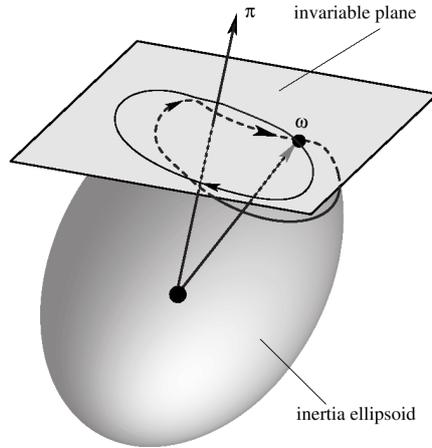


FIG. 10 – Théorème de Poinsot : l'ellipse roule sans glissement sur le plan correspondant à la conservation de $\mathbf{\Pi}_s$

On peut montrer que ce plan est le plan tangent à l'ellipsoïde d'énergie dans le repère fixe. Le mouvement du système est alors décrit comme le roulement sans glissement de cette surface sur le plan invariant.

En présence de potentiel, l'ellipsoïde devient un cylindre de rayon variable en fonction du potentiel. Il n'y a donc plus un plan tangent mais une infinité à chaque valeur du potentiel. La notion de fibré tangent pourrait résoudre ce problème. En effet, un fibré peut être vu comme la collection des plans tangents et définit un espace dans lequel il est possible de travailler. Cependant, nous n'avons eu le temps au cours de ce stage d'approfondir cette idée qui demande l'acquisition de nouvelles notions mathématiques plutôt abstraites.

4.2 Modes Non-Linéaires (NNM)

Comme présenté dans l'introduction, quand l'amplitude des vibrations devient grande, la description d'un état vibratoire à l'aide de la décomposition en somme de modes linéaires n'est plus possible. Pourtant, des variations périodiques des coordonnées sont toujours observables. Ce concept de modes non-linéaires est de plus en plus utilisé pour des structures complexes car l'estimation sur un mode-linéaire est bien plus performante que sur un grand nombre de modes linéaires.

Dans [17] et [18], Zhang introduit une définition géométrique de ces modes que nous sommes maintenant à même de comprendre. Pour cela, il part de la constatation que si le mode non-linéaire est une trajectoire du système, alors il correspond à une géodésique. Il faut alors trouver à la-

quelle de ces trajectoires correspond un mode. Leur caractère périodique entraîne qu'elles doivent être fermées et le fait que tous les points atteignent un extremum où la vitesse (et donc l'énergie cinétique) est nulle définit une sous-variété correspondant à $V(q_1, q_2, \dots, q_n) = h$ qui constitue une borne de la trajectoire.

Un mode non-linéaire associé à des conditions initiales est donc la géodésique fermée entre l'origine et la sous-variété définit précédemment de l'espace des configuration munie de la métrique de Jacobi $g_{ij} = 2(h - V(x_1, x_2, \dots, x_n))m_{ij}$. Nous disposons donc des outils nous permettant de trouver ces trajectoires. Cependant, dans les deux articles cités précédemment, les trajectoires sont ensuite déterminées par des approximations à l'aide de suite de polynômes. Nous pensons qu'il est possible de poursuivre la démarche géométrique découlant de la définition des modes afin de résoudre complètement le problème.

Pour cela, il serait nécessaire d'appliquer notre point de vue à un système masse-ressort non-linéaire afin d'évaluer si il est possible de définir des surfaces permettant d'accéder à la solution du problème.

4.3 Rapport aux trajectoires sonores, symétrie et optimisation

Les travaux présentés dans ce rapport ainsi que ceux en cours dans l'équipe acoustique instrumentale de l'Ircam vont être mis en application dès septembre au cours d'une thèse en partenariat avec l'entreprise Dassault Systèmes. Cette thèse a pour but d'apporter une composante sonores aux logiciels permettant le calcul et la simulation des mouvements de systèmes complexes et des phénomènes tels que les frottements. En marche vers toujours plus de réalisme, l'ajout de sons est vue comme un atout majeur qui doit être nécessairement implémenté.

L'enjeu va alors être d'accompagner les trajectoires mécaniques par des trajectoires sonores. Si on définit un état initial et un état final à l'aide de descripteurs (fréquence, amplitude, contenu harmonique,..), on peut alors penser que passer de l'un à l'autre par le biais de géodésiques constitue le chemin naturel, tout comme "d'aller tout droit dans un espace courbe". Il va alors falloir déterminer à l'aide des descripteurs une métrique qui soit pertinente du point de vue de la perception.

Cependant, le calcul des trajectoires à la fois mécaniques et sonores nécessitera des temps de calcul très importants qu'il faudra optimiser. Pour cela, l'utilisation des symétries afin de simplifier la résolution peut sembler du point de vue conceptuel une idée à explorer. La description à l'aide des modes non-linéaire pourra également réduire l'ordre des modèles employés et donc, optimiser les temps de calcul et diminuer la complexité des algorithmes.

4.4 Application au contrôle gestuel

Les études menées actuellement à l'Ircam au niveau du contrôle gestuel de la synthèse sonore semblent aussi inspirantes dans l'application des méthodes mises en oeuvre ici. Celles effectuées sur la gestion des textures sonores semblent assez proches dans les modes d'applications et dans les méthodes que celles évoquées dans le paragraphe précédent.

Notre point de vue géométrique peut par contre sembler pertinent par rapport à l'apprentissage des gestes. En effet, les questions actuelles se portent sur la reconnaissance de gestes qui diffèrent par un ordre de grandeur ou une rotation.

Conclusion

Premièrement, ce stage a permis de mettre en oeuvre une large étude bibliographique concernant l'application des outils de la géométrie différentielle et des groupes de Lie aux problèmes de mécanique. Celle-ci a alors permis d'évaluer dans quelle mesure certains concepts mathématiques pouvaient s'appliquer de façon pertinente à des problèmes dynamiques. L'étude du mouvement de corps rigide en rotation a alors permis de développer une démarche considérant l'évolution des systèmes dynamiques en fonction des transformations subies par l'action du groupe SO_3 , permettant de déterminer les solutions du problème en fonction de ses caractéristiques intrinsèques et d'analyser la stabilité des états d'équilibres. Cet exemple a permis de montrer le caractère général et puissant de ces outils.

En présence d'énergie potentielle, nous avons pu voir que la démarche pouvait toujours être appliquée après avoir introduit une métrique permettant de garder le lagrangien sous forme quadratique. Dans le cas du pendule, les solutions analytiques ont alors pu être déterminées sans poser de conditions sur l'amplitude des mouvements.

Finalement, les études des phénomènes d'instabilité ont permis de mettre en lumière la caractérisation de phénomènes non-linéaires dont la description semble donc possible par cette méthode.

Cet étude plutôt théorique a néanmoins permis d'acquérir les connaissances et la compréhension nécessaire à l'ébauche de nombreuses perspectives concernant aussi le rapprochement entre le formalisme physique et les concepts géométriques que les applications. Par rapport à celles-ci, le challenge va être maintenant la définition d'une métrique appropriée, que cela soit pour sa pertinence perceptive ou sa généralité. L'aspect computationnel de ces méthodes nécessitera également d'être étudié, mais il semble maintenant clair que le développement du point de vue présenté ici soit pertinent dans de nombreux cas.

5 Annexes

De Lagrange aux géodésiques

En utilisant la définition de la métrique $L = T = \frac{1}{2}g_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j$ dans 1.1.4, on peut écrire, en l'absence de forces extérieures pour une particule :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(g_{kj}\dot{q}^j + g_{ik}\dot{q}^i - \frac{1}{2}g_{ij,k}\dot{q}^i\dot{q}^j) &= 0 \\
 \frac{d}{dt}(g_{ik}\dot{q}^i) - \frac{1}{2}g_{ij,k}\dot{q}^i\dot{q}^j &= 0 \\
 g_{ik}\ddot{q}^i + g_{ik,j}\dot{q}^j\dot{q}^i - \frac{1}{2}g_{ij,k}\dot{q}^i\dot{q}^j &= 0 \\
 g_{ik}\ddot{q}^i + \frac{1}{2}(2g_{ik,j}\dot{q}^j\dot{q}^i - g_{ij,k}\dot{q}^i\dot{q}^j) &= 0 \\
 \ddot{q}^i + \frac{g^{kl}}{2}(g_{ik,j} + g_{jk,i} - g_{ij,k})\dot{q}^i\dot{q}^j &= 0 \\
 \frac{d^2}{dt^2}q^i + \Gamma_{ij}^l \frac{dq^k}{dt} \frac{dq^j}{dt} &= 0
 \end{aligned} \tag{5.0.1}$$

où les :

$$\Gamma_{ij}^l = \frac{g^{kl}}{2}(g_{ik,j} + g_{jk,i} - g_{ij,k}) \tag{5.0.2}$$

sont les symboles de Christoffel de seconde espèce.

Solutions particulières des équations des géodésiques des surfaces de révolution

On cherche à montrer que pour toutes les surfaces de révolution, les méridiens (θ =constante, ϕ paramétrée par la longueur d'arc s) ainsi que les parallèles(ϕ =constante) possédant la propriété $f'(\phi) = 0$ sont des solutions des équations des géodésiques suivantes :

$$\frac{d}{dt}(f^2\dot{\theta}) = 0 \tag{5.0.3}$$

$$\ddot{\phi} - \frac{ff'}{f'^2 + g'^2}\dot{\theta}^2 + \frac{f'f'' + g'g''}{f'^2 + g'^2}\dot{\phi}^2 = 0 \tag{5.0.4}$$

Pour les méridiens, (5.0.3) est vérifiée trivialement. Pour la seconde, il faut noter que le paramétrage par abscisse curviligne entraîne la condition $\|\frac{d}{ds}\mathbf{r}\| = 1$ menant à :

$$(f'^2 + g'^2)\dot{\phi}^2 = 1 \tag{5.0.5}$$

En dérivant une nouvelle fois, on obtient :

$$\ddot{v}(f'^2 + g'^2) + \dot{v}^2(g'g'' + f'f'') = 0 \tag{5.0.6}$$

qui est équivalent à (5.0.4). Les méridiens sont donc des géodésiques des surfaces de révolution.

Pour les parallèles, (5.0.3) donne $\dot{\theta} = cste$ et (5.0.4) donne $ff'/(f'^2 + g'^2)\dot{\theta}^2 = 0$. Comme $\dot{\theta} \neq 0$ et $f \neq 0$, il vient $f' = 0$. Cette condition est nécessaire pour que le parallèle soit une géodésique.

Principe de moindre action pour SO3

On se propose de retrouver l'équation (1.3.17) grâce à l'utilisation du principe de moindre action. Premièrement, l'énergie cinétique s'exprime pour SO3 sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
E_c &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} dm_0 \dot{\mathbf{x}}^T \dot{\mathbf{x}} dV \\
&= \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} dm_0 (\dot{R}\mathbf{X})^T (\dot{R}\mathbf{X}) dV \\
&= \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} dm_0 \mathbf{X}^T \dot{R}^T \dot{R} \mathbf{X} dV \\
&= \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} dm_0 \mathbf{X}^T \dot{R}^T R R^T \dot{R} \mathbf{X} dV \\
&= \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} dm_0 \mathbf{X}^T \hat{\Omega}_c^T \hat{\Omega}_c \mathbf{X} dV \\
&= \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} dm_0 (\boldsymbol{\omega}_c \wedge \mathbf{X})^T (\boldsymbol{\omega}_c \wedge \mathbf{X}) dV \\
&= \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} dm_0 (\mathbf{X} \wedge \boldsymbol{\omega}_c)^T (\mathbf{X} \wedge \boldsymbol{\omega}_c) dV \\
&= \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} dm_0 (\hat{X} \boldsymbol{\omega}_c)^T (\hat{X} \boldsymbol{\omega}_c) dV \\
&= \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_c^T \left[\int_{\Omega_0} dm_0 \hat{X}^T \hat{X} dV \right] \boldsymbol{\omega}_c \\
&= \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_c^T I_c \boldsymbol{\omega}_c \\
&= \frac{1}{2} \langle I_c \boldsymbol{\omega}_c, \boldsymbol{\omega}_c \rangle
\end{aligned} \tag{5.0.7}$$

Afin d'appliquer le principe de moindre action, nous allons considérer un second chemin sur le groupe défini de la façon suivante :

$$R_\varepsilon = R(t) + \varepsilon \delta R(t) \tag{5.0.8}$$

Une petite variation du vecteur $\boldsymbol{\omega}_c$ peut, en passant par l'algèbre associée,

s'écrire :

$$\begin{aligned}\delta\hat{\Omega}_c &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{R_\varepsilon^T \dot{R}_\varepsilon - R^T \dot{R}}{\varepsilon} \\ &= R^T \delta\dot{R} + \delta R^T \dot{R}\end{aligned}\quad (5.0.9)$$

Si $\hat{\eta} = R^T \delta R$ est une courbe sur le groupe alors on peut écrire :

$$\frac{d}{dt} \hat{\eta} = \dot{R}^T \delta R + R^T \delta \dot{R} \quad (5.0.10)$$

et en remplaçant dans 5.0.9, il vient

$$\begin{aligned}\delta\hat{\Omega}_c &= \frac{d}{dt} \hat{\eta} - \dot{R}^T \delta R + \delta R^T \dot{R} \\ &= \frac{d}{dt} \hat{\eta} + R^T \dot{R} R^T \delta R - R^T \delta R R^T \dot{R} \\ &= \frac{d}{dt} \hat{\eta} + \hat{\Omega}_c \hat{\eta} - \hat{\eta} \hat{\Omega}_c \\ &= \frac{d}{dt} \hat{\eta} + [\hat{\Omega}_c, \hat{\eta}]\end{aligned}\quad (5.0.11)$$

Pour SO3, le crochet de Lie correspond au produit vectoriel et les variations du vecteur ω_c sont donc de la forme :

$$\delta\omega_c = \dot{\eta} + \omega_c \wedge \eta \quad (5.0.12)$$

Le principe de moindre action peut alors s'écrire :

$$\begin{aligned}\delta A = 0 &= \delta \int_a^b T dt = \int_a^b \delta E_c dt \\ &= \int_a^b \langle I_c \omega_c | \delta \omega_c \rangle dt \\ &= \int_a^b \langle I_c \omega_c | \dot{\eta} + \omega_c \wedge \eta \rangle dt \\ &= \int_a^b \langle I_c \omega_c | \dot{\eta} \rangle + \langle I_c \omega_c | \omega_c \wedge \eta \rangle dt \\ &= [\langle I_c \omega_c | \eta \rangle]_a^b + \int_a^b \langle -\frac{d}{dt} I_c \omega_c | \eta \rangle + \langle (I_c \omega_c) \wedge \omega_c | \eta \rangle dt \\ &= \int_a^b \langle -\frac{d}{dt} (I_c \omega_c) + I_c \omega_c \wedge \omega_c | \eta \rangle dt\end{aligned}\quad (5.0.13)$$

La dernière ligne s'obtient par intégration par partie en considérant que les variations aux extrémités du chemin sont nulles et on l'on trouve bien l'équation recherchée :

$$-I_c \dot{\omega}_c + I_c \omega_c \wedge \omega_c = 0 \quad (5.0.14)$$

En présence du potentiel, il faut également considérer les variations $\delta\mathbf{\Gamma}$ du vecteur $\mathbf{\Gamma}$ en reprenant les variations de forme (5.0.8) :

$$\begin{aligned}
\delta\mathbf{\Gamma} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{R_\varepsilon^T \mathbf{e}_3 - R^T \mathbf{e}_3}{\varepsilon} \\
&= \delta R^T \mathbf{e}_3 \\
&= -R^T \delta R R^T \mathbf{e}_3 \\
&= -\hat{\eta} \mathbf{\Gamma} \\
&= -\boldsymbol{\eta} \wedge \mathbf{\Gamma} \\
&= \mathbf{\Gamma} \wedge \boldsymbol{\eta}
\end{aligned} \tag{5.0.15}$$

En reprenant les astuces de calcul utilisées pour démontrer (5.0.13), l'application du principe de moindre action en présence de potentiel donne :

$$\begin{aligned}
0 = \delta \int_a^b L dt &= \int_a^b \langle I \boldsymbol{\omega}_c | \delta \boldsymbol{\omega}_c \rangle - \langle mg \mathbf{X} | \delta \mathbf{\Gamma} \rangle dt \\
&= \int_a^b \left\langle -\frac{d}{dt} (I_c \boldsymbol{\omega}_c) + I_c \boldsymbol{\omega}_c \wedge \boldsymbol{\omega}_c, \boldsymbol{\eta} \right\rangle - \langle mg \mathbf{X} | \mathbf{\Gamma} \wedge \boldsymbol{\eta} \rangle dt \\
&= \int_a^b \left\langle -\frac{d}{dt} (I_c \boldsymbol{\omega}_c) + I_c \boldsymbol{\omega}_c \wedge \boldsymbol{\omega}_c, \boldsymbol{\eta} \right\rangle - \langle mg \mathbf{X} \wedge \mathbf{\Gamma} | \boldsymbol{\eta} \rangle dt \\
&= \int_a^b \left\langle -\frac{d}{dt} (I_c \boldsymbol{\omega}_c) + I_c \boldsymbol{\omega}_c \wedge \boldsymbol{\omega}_c, \boldsymbol{\eta} + mg \mathbf{\Gamma} \wedge \mathbf{X} | \boldsymbol{\eta} \right\rangle dt
\end{aligned} \tag{5.0.16}$$

et l'équation d'Euler du mouvement est :

$$-\frac{d}{dt} (I_c \boldsymbol{\omega}_c) + I_c \boldsymbol{\omega}_c \wedge \boldsymbol{\omega}_c, \boldsymbol{\eta} + mg \mathbf{\Gamma} \wedge \mathbf{X} = 0 \tag{5.0.17}$$

Actions du groupe SO3

Les relations 1.3.11 se démontrent simplement grâce à la définition de l'opérateur Adjoint :

$$\begin{aligned}
Ad_{R^T} \hat{\Omega}_s &= R^T \dot{R} R^T R = \hat{\Omega}_c \\
Ad_R \hat{\Omega}_c &= R R^T \dot{R} R^T
\end{aligned} \tag{5.0.18}$$

Les relations entre les vecteurs associés aux éléments de l'algèbre sont déterminées en écrivant :

$$\begin{aligned}
\hat{\Omega}_c &= Ad_{R^T} \hat{\Omega}_s = R^T \hat{\Omega}_s R \\
\hat{\Omega}_c \cdot \mathbf{v} &= R^T \hat{\Omega}_s R \cdot \mathbf{v} \\
\boldsymbol{\omega}_c \wedge \mathbf{v} &= R^T (\boldsymbol{\omega}_s \wedge R \cdot \mathbf{v}) = R^T \boldsymbol{\omega}_s \wedge \mathbf{v} \\
\boldsymbol{\omega}_c &= R^T \boldsymbol{\omega}_s
\end{aligned} \tag{5.0.19}$$

En procédant de la même manière on trouve également :

$$\omega_s = R\omega_c \quad (5.0.20)$$

Fonctions elliptiques

Les fonctions elliptiques utilisées dans le rapport pour paramétrer l'ellipse intersection de l'ellipsoïde d'énergie et l'orbite co-adjointe ont été introduites par Jacobi à partir de l'ellipse et peuvent être vues comme une généralisation des fonctions trigonométriques quand le cercle devient une ellipse [20].

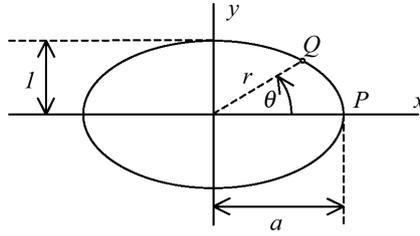


FIG. 11 – Paramétrisation de l'ellipse permettant d'introduire les fonctions elliptiques

Il est nécessaire de définir le module et l'argument d'une fonction elliptique. Pour cela, rappelons l'équation d'une ellipse en coordonnées cartésiennes :

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \quad (5.0.21)$$

On définit l'excentricité d'une ellipse par :

$$\zeta = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} \quad (5.0.22)$$

On remarquera que ce paramètre est égal à 0 pour le cercle et à 1 pour la parabole. Le module k est alors défini comme l'excentricité de l'ellipse normalisée ($b=1$) :

$$k = \sqrt{1 - \frac{1}{a^2}} \quad (5.0.23)$$

L'argument d'une fonction elliptique s'exprime par :

$$u = \int_P^Q r d\theta \quad (5.0.24)$$

et les 3 fonctions elliptiques utilisées dans le manuscrit s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} sn(u, k) &= y \\ cn(u, k) &= \frac{x}{a} \\ dn(u, k) &= \frac{r}{a} \end{aligned} \quad (5.0.25)$$

Ces fonctions peuvent être notées sans leur module, par exemple : $sn(u, k) = sn(u)$. Elles vérifient les relations :

$$\begin{aligned} cn^2 u + sn^2 u &= 1 \\ dn^2 u + k^2 sn^2 u &= 1 \\ \frac{d}{du} sn(u) &= cn(u) dn(u) \\ \frac{d}{du} cn(u) &= -sn(u) dn(u) \\ \frac{d}{du} dn(u) &= -k^2 sn(u) cn(u) \end{aligned} \quad (5.0.26)$$

Etude de stabilité des équilibres du pendule tournant

La rotation 3.3.1 utilisée pour décrire le mouvement du pendule tournant mène au vecteur de vitesse angulaire mesuré dans le repère du corps suivant $\boldsymbol{\omega}_c = \langle \dot{\theta}, -\dot{\alpha}, \dot{\alpha} \cos \theta \rangle$ et on peut retrouver la valeur de l'énergie cinétique classique pour ce problème :

$$T = \frac{1}{2} ml^2 (\omega_1^2 + \omega_2^2) = \frac{1}{2} ml^2 (\dot{\theta}^2 + \alpha \sin^2 \theta) \quad (5.0.27)$$

D'après (2.4.3), on obtient l'équation du mouvement en fonction de θ et du paramètre de contrôle Ω :

$$l\ddot{\theta} = a\Psi^2 \sin \theta \cos \theta - g \sin \theta \quad (5.0.28)$$

Les positions d'équilibre se trouvent simplement pour $\dot{\theta} = 0$, donc $\ddot{\theta} = 0$. Elles vérifient alors l'équation :

$$l\Psi^2 \sin \theta \cos \theta = g \sin \theta \quad (5.0.29)$$

Les positions $\theta = 0, \pi$, correspondant à la bille en haut ou en bas, sont donc des états d'équilibres tout comme les positions satisfaisant l'équation :

$$\cos \theta = \frac{g}{l\Psi^2} \quad (5.0.30)$$

nous permettant d'introduire une vitesse angulaire critique $\Psi_c = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Cette position n'est définie que quand $\Psi > \Psi_c$. Pour étudier la stabilité de

ce système, la linéarisation s'effectue en introduisant $\varphi = \dot{\theta}$ et le système s'écrit :

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \phi \\ \dot{\phi} &= -\Psi_c^2 \sin \theta + \Psi^2 \cos \theta \sin \theta\end{aligned}\tag{5.0.31}$$

et est associé à la matrice jacobienne :

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\Psi_c^2 \cos \theta + \Psi^2 (2 \cos^2 \theta - 1) & 0 \end{pmatrix}\tag{5.0.32}$$

de polynôme caractéristique :

$$\lambda^2 + \Psi_c^2 \cos \theta - \Psi^2 (2 \cos^2 \theta - 1) = 0\tag{5.0.33}$$

Références

- [1] Vakakis A.F. *Non-Linear Normal Modes (NNMs) and their Applications in vibration Theory : An Overview*, Mechanical Systems and Signal Processing (1997) **11**(1),3-22.
- [2] Rand R.H. *A Direct Method For Non-Linear Normal Modes*, Int. J. Non-linear Mechanics (1974) Vol. 9., pp. 363-368.
- [3] Johnson T.L., Rand R.H. *On the existence and bifurcation of Minimal Normal Modes*, Int. J. Non-linear Mechanics (1979) Vol. 14.
- [4] Lewis D, Ratiu T., Simo JC, Marsden JE *The Heavy top : a geometric treatment*, Nonlinearity **5**(1992) 1-48.
- [5] Godinho L., Natario J. *An Introduction to Riemannian Geometry with Application to Mechanics and Relativity*, 2010.
- [6] Bourguignon J-P. *Transport Parallèle et connexions en Géométrie et en Physique*
- [7] Houchmandzadeh B. *Variétés différentielles et champs de tenseurs*, Cours de l'université Joseph Fourier, 2005.
- [8] Covolo T. *Géométrie des courbes et des surfaces moyennant la théorie des repères mobiles d'Elie Cartan*, 2008.
- [9] S. E. Rasor *The geodesics Lines on the helicoid*, The Annals of Mathematics, Second Series, Vol 11, No. 2 (Jan., 1910), pp.77-85.
- [10] Beuthe M., Pireaux S. *Exercices de relativité générale*, Cours de l'université de Louvain, 2001-2002.
- [11] Lafontaine J. *Introduction aux Variétés Différentielles*, Presses Universitaires de Grenoble, 1996.
- [12] Boyer F. *Géométrie et dynamique en robotique*, 2005.
- [13] Darryl D. Holm *Geometric Mechanics, Part II : Rotating, Translating and Rolling*, Imperial College Press, 2008.
- [14] Marsden J.E., Ratiu T.S. *Introduction to Mechanics and Symmetry, Second Edition*, 1998
- [15] Briend J-Y. *Géodésiques des Surfaces de Révolution*, Journal des Elèves, Volume 1 (1994), No.1.
- [16] Szydlowski M. *The generalised Maupertuis Principle*, Regular and Chaotic Dynamics, (1998).
- [17] Zhang X. *Non-Linear Normal Modes as the extremal Geodesics on the Riemannian Manifold*, Euromech 457, Press of the ENTPE, Lyon, 2004.
- [18] Zhang X. *Geodesics, nonlinear normal modes of conservative vibratory systems and decomposition method*, Journal of Sound and Vibration **282** (2005) 971-989.

- [19] Benci V. *Closed Geodesics for the Jacobi metric and periodic solutions of prescribed energy of natural Hamiltonians systems*, Annales de l'I.H.P., section C, tome 1, n°5 (1984), p.401-412.
- [20] Schwalm W. *Elliptic function sn, cn, dn , as Trigonometry*, University N. Dakota
- [21] Barré S. *La courbure de Gauss*, Journal des Elèves, Volume 1 (1994), No.1.
- [22] Jantzen R. T. *Geodesics on the Torus and other Surfaces of Revolution Clarified Using Undergraduate Physics Tricks with Bonus : Nonrelativistic and Relativistic Kepler Problems*, 2010.
- [23] Irons M. *The curvature and Geodesics of the torus*, 2005.
- [24] Shaw S.W., Pierre C. *Normal Modes of Vibration fo Non-Linear Continuous Systems*, Journal of Sound and Vibration (1994) **169**(3),319-347.
- [25] Bouteloup D. *Elements de géométrie différentielle*, Cours de l'ENSG, 2003.